

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра общей и технической физики

# **ФИЗИКА**

# **МЕХАНИКА**

*Методические указания к расчетно-графическим работам  
для студентов направления 21.03.01*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
2017

**ФИЗИКА. Механика:** Методические указания к расчетно-графическим работам / Санкт-Петербургский горный университет. Сост. С.С. Прошкин. СПб, 2017. 35 с.

Расчетно-графические работы предназначены для студентов бакалавриата направления 21.03.01 «Нефтегазовое дело». Задания выполняются индивидуально в соответствии с вариантом. Выполнение расчетно-графической работы позволит студенту сформировать следующие компетенции: ОПК-1; ОПК-2; ПК-1 и ПК-2.

Научный редактор проф. А.С. Мустафаев

© Санкт-Петербургский  
горный университет, 2017

решать конкретные задачи и выявлять новые закономерности; владеть способностью оценки достоверности полученных результатов (ПК-1);

- знать возможности применения современных компьютерных технологий; уметь эффективно использовать научно-техническую аппаратуру при решении конкретных профессиональных задач; владеть основами выполнения исследований с применением современных технологий и статистических методов (ПК-2).

Для повышения эффективности самостоятельной работы студентов в данном пособии приведены краткие теоретические сведения и разобраны примеры решения и оформления задач.

В приложении представлены справочные материалы, рекомендации к решению задач и содержанию отчета по РГР.

Студентам предлагается решить одно расчетно-графическое задание, которое фактически предполагает рассмотрение типовых задач по следующим разделам механики:

1. «Кинематика»;
2. «Динамика материальной точки»;
3. «Динамика вращательного и поступательного движения абсолютно твердого тела».

## 2. ТРЕБОВАНИЯ К СОДЕРЖАНИЮ ОТЧЕТА И К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ

При выполнении расчетно-графических работ по общей физике рекомендуется оформить отчет в печатном виде на листах формата А4 следующего содержания:

1. Титул в соответствии с требованиями вуза.
2. Формулировка задания в соответствии со своим вариантом.

3. Теоретические основы работы.

В краткое содержание теоретической части работы необходимо включить:

- явления или процессы, изучаемые в РГР.
- определения основных физических понятий, объектов, процессов и величин.
- законы и соотношения, описывающие изучаемые процессы.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В условиях значительного сокращения лекций и часов, отводимых на практические занятия по физике, единственным способом улучшить усвоение материала учебной программы является самостоятельная работа студента. В решении этой проблемы может помочь выполнение студентом индивидуальной расчетно-графической работы (РГР). При выполнении РГР студенту приходится сочетать теоретические знания и практические навыки решения задач. Кроме того, у него формируется умение определить, описать и объяснить физические понятия, явления, процессы и величины.

При этом студент приобретает следующие навыки:

- проводить самостоятельный поиск необходимой информации с использованием учебных, справочных и научно-популярных изданий, ресурсов Интернета;
- применять математический аппарат для аналитического решения физических задач;
- анализировать, выполнять сравнительную оценку и делать выводы по результатам своей работы;
- использовать в решениях и представлении результатов (в виде рисунков, схем, таблиц и графиков) компьютерное программное обеспечение.

Перечень планируемых результатов после выполнения РГР:

- знать основные понятия, явления и фундаментальные физические законы, лежащие в основе изучаемого явления; уметь формулировать физико-математическую модель изучаемого явления; владеть методами выбора цели, постановки задач и поиска оптимальных путей их решения (ОПК-1);
- знать основные методы исследования, методы расчета и численной оценки точности результатов измерений физических величин; уметь ставить и решать задачи для осуществления научно-исследовательской деятельности; владеть методами математического моделирования, компьютерной, аналитической и графической обработки результатов измерений (ОПК-2);
- знать основные профессиональные проблемы, решаемые с помощью физических методов исследования; уметь: самостоятельно

- пояснение к физическим величинам, входящим в формулы, и единицы их измерения.

### 4. Решение задач РГР.

При решении задач необходимо:

- выполнить рисунок или начертить схему;
- сопроводить применяемые формулы и законы пояснениями, мотивирующими решение;
- представить результат в общем виде, т. е. преобразовать выражение для определяемой величины так, чтобы в него входили лишь буквенные обозначения величин, заданных в условии задачи, и необходимые физические константы;
- проверить размерность полученного результата;
- выполнить необходимые вычисления и представить результат в Международной системе единиц;
- сформулировать полный ответ в соответствии с вопросом задачи.

### 5. Графический материал.

- представить таблицы с данными для построения графиков;
  - указать аналитическое выражение функциональной зависимости, которую необходимо построить;
  - указать на осях координат физические величины и единицы их измерения.
6. Привести анализ и выводы по результатам работы.

## 3. УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К РАЗДЕЛУ «МЕХАНИКА»<sup>1</sup>

### 3.1. Кинематика материальной точки

Механикой называется раздел физики, в котором изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. Механика является базовой основой для изучения всех остальных разделов физики. Механика делится на три раздела: кинематику, динамику и статику.

Положение материальной точки в пространстве определяется радиус-вектором, проведенным из начала координат выбранной

<sup>1</sup> В данном разделе приведены только те формулы и законы, которые могут оказаться полезными при решении данного РГР.

системы отсчета в точку пространства, где в данный момент времени находится материальная точка

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k}, \quad (3.1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы (орты), совпадающие с положительными направлениями соответствующих осей;  $r_x, r_y, r_z$  – проекции радиус-вектора и координаты материальной точки.

Модуль радиус-вектора  $\vec{r}$  определяется выражением

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Движение материальной точки полностью определено, если координаты материальной точки заданы как функции времени:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Эти уравнения называются *кинематическими уравнениями движения точки*. Они эквивалентны одному векторному уравнению движения точки (3.1).

Линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчета называется *траекторией*. Уравнение траектории можно получить, исключив параметр  $t$  из кинематических уравнений.

*Длиной пути* точки называется сумма длин всех участков траектории, пройденных этой точкой за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta S = \Delta S(t)$ . Длина пути является скалярной функцией времени.

*Мгновенная скорость* — это векторная величина, равная первой производной по времени от радиуса-вектора  $\vec{r}(t)$  точки:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}, \quad (3.2)$$

где  $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$  – проекции вектора мгновенной скорости.

Модуль вектора мгновенной скорости

6

Нормальное ускорение направлено по нормали к траектории к центру ее кривизны и характеризует быстроту изменения направления вектора скорости.

Второе слагаемое полного ускорения называется *тангенциальным ускорением*

$$\vec{a}_t = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau}, \quad (3.8)$$

где  $\vec{\tau}$  – единичный вектор, связанный с движущейся точкой и направленный по касательной к траектории по вектору скорости  $\vec{v}$ .

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю. Вектор тангенциального ускорения может быть как сонаправлен с вектором мгновенной скорости  $\vec{v}$  (равноускоренное движение), так, и противоположен ей (равнозамедленное движение).

*Радиус кривизны* траектории представляет собой радиус окружности, которая совпадает с ней на данном участке траектории на бесконечно малом ее участке. Если элемент участка траектории равен  $\Delta S$ , то радиус кривизны траектории в данной точке определяют выражением:

$$R = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta \varphi} = \frac{dS}{d\varphi}, \quad (3.9)$$

где  $\Delta \varphi$  – угол, в пределах которого заключен участок траектории  $\Delta S$ .

Основной задачей кинематики является определение состояния материальной точки (ее радиус-вектора  $\vec{r}$  и скорости  $\vec{v}$  в произвольный момент времени  $t$ ). Для этого необходимо, задать, во-первых, начальные условия – радиус-вектор  $\vec{r}_0$  и скорость  $\vec{v}_0$  в начальный момент времени  $t = t_0$  и, во-вторых, зависимость ускорения  $\vec{a}$  от времени  $t$ . Тогда, используя понятия интеграла, для  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  можно записать следующие выражения:

$$d\vec{v} = \vec{a} dt, \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a} dt; \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt;$$

8

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}. \quad (3.3)$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения. Модуль мгновенной скорости (скалярная величина) равен первой производной пути по времени:

$$v = |\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \quad (3.4)$$

Из этой формулы получается важное следствие:  $dS = v dt$ .

*Длина пути*  $S$ , пройденного точкой за промежутки времени от  $t_1$  до  $t_2$ , задается интегралом:  $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ .

*Мгновенным ускорением* материальной точки называется векторная величина, определяемая следующим выражением:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (3.5)$$

где  $a_x, a_y, a_z$  – проекции ускорения  $\vec{a}$  на оси  $x, y, z$ .

Поскольку во многих случаях направление вектора ускорения заранее неизвестно, вектор ускорения удобно представить в виде векторной суммы

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t. \quad (3.6)$$

В этом случае вектор мгновенного ускорения  $\vec{a}$  называют *полным ускорением*. Тогда  $\vec{a}_n$  называется *нормальным (центростремительным) ускорением* и определяется следующим образом:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2(t)}{R} \vec{n}, \quad (3.7)$$

где  $R$  – радиус кривизны траектории в данной точке, численно равный радиусу окружности, которая сливается с траекторией на бесконечно малом ее участке;  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали, направленный к центру кривизны.

7

$$d\vec{r} = \vec{v} dt, \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt, \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \left[ \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt \right] dt.$$

При вращении точки вокруг неподвижной оси  $OZ$  вводится вектор углового перемещения  $\vec{\varphi}$ , модуль которого равен углу поворота  $\varphi$ ; направление этого вектора связано с направлением вращения правилом правого винта и  $\vec{\varphi}$  всегда направлен вдоль оси вращения. Вектор углового перемещения называется аксиальным или псевдовектором.

Если точка вращается по окружности радиусом  $R$  и описывает дугу длиной  $S$ , при этом радиус описывает угол  $\Delta \varphi$ , то между этими величинами существует следующее соотношение:

$$S = \Delta \varphi R.$$

Пусть точка вращается вокруг неподвижной оси  $OZ$  и за время  $dt$  поворачивается на угол  $d\varphi(t)$ , тогда этот бесконечно малый поворот можно задать вектором углового перемещения  $d\vec{\varphi}(t)$ . Тогда *вектором мгновенной угловой скорости* называется

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\varphi}(t)}{dt}. \quad (3.10)$$

Направление вектора угловой скорости  $\vec{\omega}(t)$  совпадает с направлением вектора  $d\vec{\varphi}(t)$ . Вектор мгновенной угловой скорости является псевдовектором.

*Вектор углового ускорения* определяется уравнением

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}. \quad (3.11)$$

Вектор мгновенного углового ускорения является псевдовектором. Вектор углового ускорения может быть как сонаправлен (равноускоренное движение), так, и противоположен вектору угловой скорости (равнозамедленное движение).

9

Уравнения кинематики вращательного равнопеременного движения ( $\varepsilon = \text{const}$ )

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \varepsilon t.$$

Связь между линейными и угловыми кинематическими характеристиками при вращении по окружности радиусом  $R = \text{const}$ :

$$dS = d\varphi R; \quad S = \Delta\varphi R; \quad v = \omega R;$$

$$a_n = \omega^2 R; \quad a_t = \varepsilon R.$$

### 3.2. Динамика материальной точки

Динамика – это раздел классической механики, изучающий движение материальных тел под действием приложенных к ним сил, то есть дающий связь между взаимодействиями тел и изменениями в их движении.

Силой называется физическая величина, характеризующая воздействие одного тела (или нескольких тел) на другое тело или систему тел. Сила – величина векторная.

В механике встречаются три типа сил:

1) силы взаимного притяжения между телами, называемые гравитационными силами;

2) силы, обусловленные деформацией соприкасающихся тел. Они называются упругими силами. К ним относятся: сила, действующая на тело со стороны растянутой или сжатой пружины; сила, с которой нить действует на привязанный к ней груз; сила, с которой поверхность действует на лежащий груз, и т. д.;

3) силы, возникающие при соприкосновении тел, но обусловленные только явлениями, происходящими непосредственно около поверхности соприкосновения. К ним относятся силы трения.

Сила гравитационного притяжения двух материальных точек

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3.12)$$

10

$$F_{\text{тр.к}} = \mu' \frac{F_{\text{норм. давл.}}}{R}, \quad (3.16)$$

где  $\mu'$  – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины;  $R$  – радиус катящейся поверхности.

Сила сопротивления  $\vec{F}_c$  действует на тело при его поступательном движении в газе или жидкости. Эта сила зависит от скорости  $\vec{v}$  тела относительно среды и направлена противоположно вектору скорости  $\vec{v}$

$$\vec{F}_c = -b\vec{v}, \quad (3.17)$$

где  $b$  – положительный коэффициент, характерный для данного тела и данной среды. В общем случае этот коэффициент зависит от скорости, однако при малых скоростях его можно считать постоянным.

Если к материальной точке приложено несколько сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , то их действие можно заменить действием одной силы, называемой равнодействующей и представляющей собой векторную сумму данных сил (принцип суперпозиции),

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (3.18)$$

Импульс (количество движения) материальной точки

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (3.19)$$

где  $m$  – масса точки;  $\vec{v}$  – скорость движения точки.

Уравнение динамики поступательного движения материальной точки, (второй закон Ньютона) можно представить так: «Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно равнодействующей силе»:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (3.20)$$

12

где  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$  – гравитационная постоянная;  $m_1$  и  $m_2$  – массы точек;  $r$  – расстояние между точками. Вектор силы гравитационного притяжения направлен по прямой, соединяющей взаимодействующие точки.

Сила тяжести вблизи поверхности Земли (частный случай гравитационной силы)

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad (3.13)$$

где  $|\vec{g}| = \gamma \frac{M_3}{R_3^2}$  – ускорение свободного падения;  $M_3$  – масса Земли;  $R_3$  – радиус Земли.

Вес тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес вследствие притяжения к планете. Вес тела равен силе тяжести только тогда, когда тело покоится или движется равномерно и прямолинейно вверх или вниз.

Сила упругости (упруго деформированного) тела (закон Гука)

$$\vec{F} = -k \Delta \vec{x}, \quad (3.14)$$

где  $k$  – коэффициент упругости;  $\Delta \vec{x}$  – вектор упругой деформации. Вектор упругой силы направлен в сторону, противоположную вектору упругой деформации.

Максимальную силу трения скольжения по модулю можно определить по формуле

$$F_{\text{тр}} = \mu F_{\text{норм. давл.}}, \quad (3.15)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения;  $F_{\text{норм. давл.}}$  – сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу. По третьему закону Ньютона сила нормального давления равна по модулю силе реакции опоры ( $\vec{F}_{\text{норм. давл.}} = -\vec{N}$ ). Вектор силы трения скольжения направлен в сторону, противоположную направлению движения данного тела относительно другого.

Для тела, катящегося по поверхности с трением, силу трения качения можно вычислить по формуле

11

где  $\vec{F}$  – результирующая всех сил, действующих на точку;  $\vec{a}$  – ускорение, приобретаемое материальной точкой.

Уравнение (2.20) можно также записать, используя импульс

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}, \quad (3.21)$$

где  $\vec{p}$  – импульс точки. Данное уравнение оказывается справедливым и в релятивистской динамике.

Векторная физическая величина, равная произведению силы  $\vec{F}$  на время  $\Delta t$  действия данной силы называется импульсом силы. Если тело находилось в течение короткого промежутка времени  $\Delta t$  (такого, чтобы сила не успела существенно измениться) под действием силы  $\vec{F}$ , то второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: изменение количества движения тела равно импульсу силы, действующей на тело, и происходит в направлении действия силы

$$\Delta(m\vec{v}) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t, \quad (3.22)$$

где  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$  – импульсы тела в начале и в конце движения, соответственно.

В системе материальных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  существует точка, которой можно приписать полную массу системы  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  и полный импульс системы  $\vec{p}_c = m\vec{v}_c$ . Такая точка называется центром масс или центром инерции. Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

где  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор  $i$ -й точки системы.

Центр масс обладает скоростью, имеющей смысл скорости движения всей системы как целого,

13

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

где  $\vec{v}_i$  – скорость  $i$ -й точки системы.

Производная импульса системы по времени равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на частицы системы (*закон изменения импульса системы материальных точек*)

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{внеш}}, \quad (3.23)$$

где  $\vec{p}_c$  – импульс системы, равный векторной сумме импульсов отдельных точек системы,  $\vec{p}_c = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$ . Данный закон означает, что импульс системы может изменяться только под действием внешних сил.

Если на систему тел не действуют внешние силы или их векторная сумма равна нулю, то такая система называется замкнутой. Поскольку внутренние силы не могут изменить импульс системы, импульс замкнутой системы остается постоянным (*закон сохранения импульса замкнутой штерциальной системы*):

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{p}_c = \text{const}. \quad (3.24)$$

Однако и в незамкнутых системах закон сохранения импульса можно использовать в следующих случаях:

1) если проекции всех внешних сил на какое-то направление в сумме равны нулю, то проекция импульса на это направление сохраняется;

2) если внешние силы, действующие на систему, значительно меньше внутренних сил, то изменением импульса системы за счёт действия внешних сил можно пренебречь по сравнению с величиной импульса системы, а внутренние силы импульс системы не изменяют, таким образом,  $\vec{p}_c = \text{const}$ .

14

*Момент импульса материальной точки относительно оси OZ*, проходящей через точку  $O$ , – это проекция вектора  $\vec{L}$  на ось  $OZ$ . Можно показать, что верно выражение

$$L_z = I_z \omega_z, \quad (3.30)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси  $OZ$ .

*Моментом инерции абсолютно твердого тела относительно оси* называется величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равная сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний до той же оси.

*Момент инерции материальной точки*

$$I = mR^2,$$

где  $R$  – расстояние от оси вращения до точки.

Моменты инерции некоторых однородных тел простейшей формы относительно осей, проходящих через центр масс, приводятся ниже.

1. Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр инерции шара,

$$I_c = \frac{2}{5}mR^2,$$

где  $R$  – радиус шара.

2. Момент инерции цилиндра (диска) относительно оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра (диска),

$$I_c = \frac{1}{2}mR^2,$$

где  $R$  – радиус диска.

3. Момент инерции тонкого обруча относительно оси, совпадающей с геометрической осью обруча,

$$I_c = mR^2,$$

где  $R$  – радиус обруча.

16

### 3.3. Динамика абсолютно твердого тела

*Момент силы* относительно точки (центра вращения)  $O$  представляет собой векторное произведение

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \quad (3.25)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы  $\vec{F}$ .

Модуль момента силы определяется следующим образом:

$$M = Fr \sin \alpha = FI, \quad (3.26)$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями радиус-вектора  $\vec{r}$  и силы  $\vec{F}$ ,  $I = r \sin \alpha$  – плечо силы относительно центра вращения  $O$ , т. е. длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на прямую, вдоль которой действует вектор силы (линия действия силы).

*Момент силы относительно закрепленной оси вращения OZ*, проходящей через точку  $O$ , это проекция вектора  $\vec{M}$  на ось  $OZ$

$$M_z = RF_z, \quad (3.27)$$

где  $R$  – расстояние от точки  $O$  до прямой, вдоль которой действует сила  $F_z$ ;  $F_z$  – проекция силы  $\vec{F}$  на плоскость, проходящую через точку  $O$  и перпендикулярную оси вращения  $OZ$ .

*Момент импульса относительно точки*

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad (3.28)$$

где  $\vec{p}$  – импульс;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку приложения импульса.

*Модуль момента импульса*

$$L = pr \sin \alpha, \quad (3.29)$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями радиус-вектора  $\vec{r}$  и импульса  $\vec{p}$ .

15

4. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр инерции стержня и направленной перпендикулярно оси стержня,

$$I_c = \frac{1}{12}ml^2,$$

где  $l$  – длина стержня.

5. Момент инерции тонкостенной сферы относительно оси, проходящей через центр инерции сферы,

$$I_c = \frac{2}{3}mR^2,$$

где  $R$  – радиус сферы.

Момент инерции  $I$  тела относительно произвольной оси  $OZ'$  равен сумме момента инерции  $I_c$  этого тела относительно оси, параллельной оси  $OZ$  и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями (*Теорема Гюйгенса-Штейнера*)

$$I = I_c + md^2,$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно произвольной оси  $OZ'$ ;  $I_c$  – момент инерции относительно оси, проходящей через центр инерции тела и параллельной оси  $OZ$ ;  $d$  – расстояние между осями.

*Момент импульса системы материальных точек (тела) относительно точки O* – это векторная сумма моментов импульса всех материальных точек, из которых состоит система,

$$\vec{L}_c = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i. \quad (3.31)$$

Производная момента импульса системы по времени равна суммарному моменту всех внешних сил, действующих на систему,

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{\text{внеш}} = \vec{M}^{\text{внеш}}. \quad (3.32)$$

17

Момент импульса системы  $\vec{L}_c$  и суммарный момент внешних сил  $\vec{M}^{внеш}$  определены относительно одной и той же точки  $O$ .

Момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным, т. е. не меняется во времени, причем это утверждение справедливо для момента импульса, взятого относительно любой точки инерциальной системы отсчета, (*закон сохранения момента импульса замкнутой инерциальной системы*):

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{L}_c = \text{const.} \quad (3.33)$$

Однако и в незамкнутых системах закон сохранения момента импульса можно использовать, если сумма проекции моментов внешних сил на какое-то направление равна нулю, тогда проекция момента импульса на это направление сохраняется.

В случае постоянного момента инерции тела основное уравнение динамики вращательного движения примет вид (*основное уравнение динамики вращения твердого тела*)

$$I_z \varepsilon_z = M_z^{внеш}, \quad (3.34)$$

где  $I_z$  – момент инерции тела относительно оси  $OZ$ ;  $\varepsilon_z$  – проекция углового ускорения на ось  $OZ$ ;  $M_z^{внеш}$  – суммарный момент внешних сил относительно оси  $OZ$ .

### 3.4. Механическая работа и энергия

Пусть тело движется под действием силы, которая в процессе движения может меняться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение  $d\vec{r}$ , тогда *элементарной работой* силы  $\vec{F}$  называется скалярная величина

$$dA = \vec{F} d\vec{r}. \quad (3.35)$$

*Полной работой* силы  $\vec{F}$  на перемещении  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  называется интеграл, который берется вдоль траектории движения,

18

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.39)$$

Если тело совершает только вращательное движение относительно неподвижной оси, то его кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3.40)$$

где  $I$  – момент инерции тела относительно оси вращения.

Кинетическая энергия тела, которое движется поступательно со скоростью  $v_c$  и одновременно вращается с угловой скоростью относительно оси, проходящей через центр инерции тела, равна

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \quad (3.41)$$

где  $v_c$  – скорость поступательного движения центра инерции тела.

Энергия, обусловленная воздействием тел друг на друга, называется *потенциальной энергией*. В разных случаях она выражается по-разному, так как зависит от взаимного расположения тел. Численное значение потенциальной энергии всегда определяется по отношению к нулевой конфигурации тел, для которой потенциальная энергия условно считается равной нулю. Выбор нулевой конфигурации, т. е. начала отсчета потенциальной энергии, совершенно произволен. В каждой конкретной задаче этот выбор производится так, чтобы максимально упростить ее решение.

*Потенциальная энергия материальной точки массой  $m_1$  в гравитационном поле материальной точки массой  $m_2$*

$$E_n = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (3.42)$$

*Потенциальная энергия материальной точки вблизи поверхности Земли*

$$E_n = mgh, \quad (3.43)$$

20

$$A_{12} = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_S \vec{F} \vec{\tau} dS = \int_S F \cos \alpha dS = \int_S F_{\tau} dS, \quad (3.36)$$

где  $d\vec{r}$  – элементарное перемещение;  $\vec{\tau}$  – орт касательной к траектории движения;  $\alpha$  – угол между векторами силы и перемещения в данной точке, т. е. это угол между силой  $\vec{F}$  и касательной к траектории в данной точке;  $F_{\tau}$  – проекция силы  $\vec{F}$  на орт касательной  $\vec{\tau}$ .

В случае прямолинейного движения под действием постоянной силы ее полная работа определяется скалярным произведением

$$A = FS \cos \alpha, \quad (3.37)$$

где  $S$  – модуль перемещения;  $\alpha$  – угол между векторами силы и перемещения.

Если перемещаемое тело нельзя рассматривать как материальную точку, то в формуле работы  $S$  есть модуль перемещения его центра масс.

Если тело вращается, то для определения *работы при вращении тела относительно неподвижной оси* справедливо следующее выражение:

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\vec{\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi, \quad (3.38)$$

где  $\vec{M}$  – момент силы, действующей на тело;  $M_z$  – момент силы относительно оси вращения  $OZ$ , проходящей через точку  $O$ ,  $M_z = RF_{\tau}$ .

В случае, когда речь идет о работе нескольких сил, то их работа равна алгебраической сумме работ, совершенных каждой силой в отдельности. Если силы приложены к одному и тому же телу, то полная работа всех сил равна произведению модуля результирующей силы на модуль перемещения и на косинус угла между векторами силы и перемещения.

*Кинетическая энергия* – это энергия, которой обладает тело вследствие своего движения. В случае поступательного движения тела она выражается формулой

19

где  $g$  – ускорение свободного падения;  $h$  – высота над поверхностью Земли. Нулевое значение потенциальной энергии в этом случае выбрано относительно поверхности Земли.

*Потенциальная энергия упруго деформированного тела*

$$E_n = \frac{k\Delta x^2}{2}, \quad (3.44)$$

где  $k$  – коэффициент упругости;  $\Delta x$  – деформация. В этом случае потенциальная энергия равна нулю, когда тело не деформировано.

Силы поля, работа которых на любом замкнутом пути равна нулю, называются *консервативными*. Все силы, не являющиеся консервативными, называют *неконсервативными*. К ним относятся все силы трения, сила сопротивления, сила тяги и гироскопические силы. Работа этих сил зависит от пути между начальным и конечным положениями тела (и не равна нулю на любом замкнутом пути) или равна нулю, как в случае гироскопических сил.

*Связь между консервативной силой и потенциальной энергией*. При перемещении тела под действием консервативной силы работа, которую производит данная сила, равна убыли потенциальной энергии,

$$A_{12} = -\Delta E_n = E_{n1} - E_{n2}. \quad (3.45)$$

Для элементарной работы можно записать

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_{\tau} dS = -dE_n, \quad (3.46)$$

где  $(-dE_n)$  – убыль потенциальной энергии в направлении перемещения. Отсюда можно получить

$$\vec{F} = -\left( \frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k} \right) = -\text{grad} E_n. \quad (3.47)$$

Консервативная сила равна взятому со знаком минус градиенту потенциальной энергии частицы в данной точке поля. Данная формула позволяет, зная функцию  $E_n$ , восстановить поле сил  $\vec{F}$ .

21

Сумма кинетической и потенциальной энергии тела (системы тел) называется *полной механической энергией тела (системы тел)*

$$E_m = E_k + E_p. \quad (3.48)$$

Если на систему тел, рассматриваемую относительно инерциальной системы отсчета, не действуют внешние силы, а внутренние силы только консервативные, то выполняется *закон сохранения полной механической энергии*

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow E_m = E_k + E_p = \text{const}. \quad (3.50)$$

Если система тел является неинерциальной, в ней присутствуют неконсервативные силы и действуют внешние силы, то выполняется *закон изменения полной механической энергии*

$$E_{m2} - E_{m1} = A_{12}^{\text{внешн. сил}} + A_{12}^{\text{неконс. сил}} + A_{12}^{\text{сил инерц.}}, \quad (3.51)$$

где  $A_{12}^{\text{внешн. сил}}$ ,  $A_{12}^{\text{неконс. сил}}$ ,  $A_{12}^{\text{сил инерц.}}$  – работа внешних сил, неконсервативных сил и сил инерции соответственно при переводе системы тел из состояния 1 в состояние 2.

#### 4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

##### Задача.

Самолет летит на высоте  $h$  со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. В некоторый момент времени он выпускает в направлении своего полета снаряд, который спустя время  $t_B$  взрывается.

В результате взрыва снаряда образуются два осколка массой  $m_1$  и  $m_2$ . При этом первый осколок летит по параболической траектории, имея начальную скорость  $v_1$ , направленную горизонтально поверхности земли. В результате разрыва данный осколок приобрел угловую скорость вращения  $n_1$  вдоль своей продольной оси. Второй осколок, имея скорость  $v_2$ , также летит по параболической траектории под некоторым углом к горизонту  $\beta$ .

22

Таблица 2

Параметры осколков

Вариант	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$n_1$ , об/с	$r_1$ , см
1	12	4	50	15
2	11	2	60	20
3	9	3	35	14
4	12	6	45	17
5	14	3	70	14
6	14	5	45	22
7	12	5	60	26
8	16	4	25	24
9	12	2	20	20
10	12	3	40	23
11	16	4	45	19
12	10	5	75	22
13	14	4	65	14
14	10	2	55	17
15	15	7	50	18
16	12	4	25	22
17	16	6	50	21
18	17	4	35	18
19	16	5	40	15
20	15	4	45	18

Считая первый осколок цилиндром массой  $m_1$  и радиусом  $r_1$ , найти суммарную энергию, которая выделится при его падении на землю. Определить скорости осколков  $v_1$  и  $v_2$  сразу после взрыва, а также угол  $\beta$ , под которым полетит второй осколок к горизонту.

В таблицах 1 и 2 приведены численные значения известных величин.

В таблице 3 знаком «+» отмечены функциональные зависимости траектории снаряда, для которых необходимо построить соответствующие графики.

Таблица 1

Параметры траектории снаряда

Вариант	$h$ , м	$\alpha^\circ$	$v_0$ , км/ч	$t_B$ , с
1	2050	10	550	11,25
2	2100	-10	500	16,21
3	1950	15	450	14,75
4	2150	-15	560	12,56
5	2200	10	600	15,30
6	1900	-15	400	14,36
7	2100	10	450	14,88
8	1950	20	500	13,87
9	2050	-20	550	14,89
10	1800	35	650	19,23
11	1950	10	450	15,66
12	1800	15	550	14,76
13	2700	25	650	18,23
14	2700	-10	550	14,57
15	1900	-15	440	15,12
16	2750	-10	555	16,25
17	2250	20	450	15,45
18	2150	-30	700	22,79
19	2600	15	500	14,78
20	2250	-20	440	17,35

23

Таблица 3

Графические зависимости для снаряда и осколков

Вариант	$R(t)$	$a_t(t)$	$a_n(t)$	$y(x)$	$y_2(x)$	$v_2(t)$
1		+		+	+	
2	+		+	+		
3	+			+		+
4		+		+		+
5	+			+	+	
6	+			+	+	
7			+	+		+
8	+			+	+	
9		+	+	+		
10		+		+		+
11	+		+	+		
12		+		+		+
13			+	+	+	
14	+	+		+		
15			+	+		+
16		+		+	+	
17	+			+	+	
18		+		+		+
19			+	+		+
20		+		+	+	

Где  $R$  – радиус кривизны траектории снаряда;  $y(x)$  – траектория снаряда;  $y_2(x)$  – траектория второго осколка;  $a_t$  и  $a_n$  – тангенциальная и нормальная составляющие ускорения снаряда;  $v_2$  – скорость второго осколка.

## 5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Задача 1.

Мяч бросили с поверхности Земли с начальной скоростью  $v_0 = 10$  м/с под углом  $\alpha = 40^\circ$  к горизонту. Найти: 1) на какую высоту  $H$  поднимется мяч; 2) на каком расстоянии  $L$  от места бросания мяч упадет на Землю; 3) сколько времени  $t_B$  мяч будет находиться в движении; 4) скорость мяча  $\vec{v}_B$  в точке падения. Определить нормальное  $a_n$  и тангенциальное  $a_t$  ускорения, радиус кривизны  $R$  в верхней точке  $A$  траектории и в момент времени  $t_1 = 1,15$  с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать (рис. 5.1).

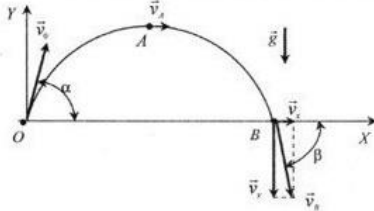


Рис. 5.1

Выберем систему отсчета. Начало отсчета поместим в точке бросания  $O$  (см. рис. 5.1). Ось  $Y$  направим вертикально вверх, а ось  $X$  – горизонтально в сторону движения мяча. Траектория движения мяча представляет собой параболу.

Так как сопротивлением воздуха можно пренебречь, то полное ускорение  $\vec{a}$  тела в любой момент времени будет равно ускорению свободного падения  $\vec{g}$  и направлено вертикально вниз. Следовательно, уравнения кинематики поступательного движения тела в векторной форме будут иметь вид

26

Решение уравнения (5.8) позволяет определить время  $t_B$  достижения телом точки  $B$ . С учетом того, что  $t_B \neq 0$ , получаем

$$t_B = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (5.9)$$

Подстановка полученного выражения (4.9) в формулу (4.1) позволяет определить расстояние  $L$  от точки бросания до точки падения

$$L = x(t_B) = v_0 \cos \alpha t_B = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g}. \quad (5.10)$$

Модуль скорости тела в любой точке траектории

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}. \quad (5.11)$$

Подставив выражение (5.9) для времени  $t_B$  в формулу (5.11), получим скорость мяча в точке  $B$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \left(v_0 \sin \alpha - g \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2} = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = v_0.$$

Для определения направления вектора  $\vec{v}$  найдем угол  $\beta$  из соотношения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y(t_B)}{v_x(t_B)} = \frac{v_0 \sin \alpha - 2v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad (5.12)$$

следовательно,  $\beta = -\alpha$ .

Тангенциальное ускорение  $a_t$ , по определению  $a_t = \frac{dv}{dt}$ , тогда из уравнения (5.11) следует

28

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g} t.$$

В проекциях на оси  $X$  и  $Y$  они примут следующую форму:

$$x = v_0 \cos \alpha t; \quad (5.1)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha = \text{const}; \quad (5.2)$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{g t^2}{2}; \quad (5.3)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (5.4)$$

В точке  $A$ , которая является точкой максимального подъема тела, вертикальная составляющая скорости  $v_y(t_A) = 0$ . Тогда выражение (5.4) примет вид

$$v_0 \sin \alpha - g t_A = 0, \quad (5.5)$$

что позволяет определить время  $t_A$  достижения телом точки  $A$

$$t_A = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (5.6)$$

Подставив выражение (5.6) для времени  $t_A$  в уравнение (5.3), определим максимальную высоту подъема тела

$$H = y(t_A) = v_0 \sin \alpha t_A - \frac{g t_A^2}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2 g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (5.7)$$

В точке  $B$ , которая является точкой падения тела на Землю, координата  $y(t_B) = 0$ . Поэтому из выражения (5.3) следует

$$y(t_B) = v_0 \sin \alpha t_B - \frac{g t_B^2}{2} = t_B \left( v_0 \sin \alpha - \frac{g t_B}{2} \right) = 0. \quad (5.8)$$

27

$$a_t = g \frac{gt - v_0 \sin \alpha}{\sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}}. \quad (5.13)$$

Так как полное ускорение  $a = g = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ , а тангенциальное ускорение  $a_t$  выражается формулой (5.14), то можно найти нормальное ускорение точки

$$a_n = \sqrt{g^2 - a_t^2} = g \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}}. \quad (5.14)$$

Поскольку  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , то можно найти радиус кривизны для любой точки траектории

$$R(t) = \frac{v^2(t)}{a_n(t)} = \frac{\sqrt{((v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2)^{3/2}}}{g v_0 \cos \alpha}. \quad (5.15)$$

Для нахождения  $a_t$ ,  $a_n$ ,  $R$  в верхней точке  $A$  траектории движения тела подставим в уравнения (5.14) – (5.16) выражение для времени  $t_A$  (5.6)

$$a_t(t_A) = g \frac{\left( \frac{g v_0 \sin \alpha}{g} - v_0 \sin \alpha \right)}{\sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}} = 0 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n(t_A) = g \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + \left( v_0 \sin \alpha - g \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2}} = g = 9,81 \text{ м/с}^2;$$

$$R(t_A) = \frac{(v_0 \cos \alpha)^2}{g} = \frac{(10,0 \cdot \cos(40,0^\circ))^2}{9,81} = 5,98 \text{ м.}$$

29



Согласно формуле (5.7) высота подъема  $y(t_A)$  тела в точке  $A$  составит

$$H = y(t_A) = \frac{(10,0)^2 \cdot \sin^2(40,0^\circ)}{2 \cdot 9,81} = 2,11 \text{ м.}$$

Для нахождения величин  $a_t$ ,  $a_n$ ,  $R$  в момент времени  $t_1$  подставим заданное значение времени в выражения (5.14) – (5.16)

$$a_t(t_1) = 5,25 \text{ м/с}^2; \quad a_n(t_1) = 8,29 \text{ м/с}^2; \quad R(t_1) = 9,92 \text{ м.}$$

Используя формулы (5.9) и (5.10), определим время  $t_B$  полета тела и расстояние  $L$ , на котором оно окажется в момент падения,

$$t_B = 1,31 \text{ с}; \quad L = 10,0 \text{ м.}$$

#### Задача 2.

Снаряд массой  $m = 5$  кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость  $v = 300$  м/с. В данной точке траектории он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой  $m_1 = 3$  кг полетел в обратном направлении со скоростью  $v_1 = 100$  м/с. Определить скорость  $v_2$  второго осколка.

Систему снаряд и осколки можно считать замкнутой, тогда для нее можно записать закон сохранения импульса

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \quad (5.16)$$

Так как снаряд и осколки сразу до и после разрыва движутся вдоль одной прямой, то можно ограничиться проекцией (4.16) на одну горизонтальную ось

$$mv = -m_1v_1 + m_2v_2. \quad (5.17)$$

Теперь учтем, что масса второго осколка равна  $m_2 = m - m_1$ . Тогда искомая скорость определится из выражения

$$v_2 = \frac{mv + m_1v_1}{m_2} = \frac{5 \cdot 300 + 3 \cdot 100}{2} = 900 \text{ м/с.}$$

30

#### Задача 4

На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом  $R = 20$  см, момент инерции которого  $I = 0,15$  кг·м<sup>2</sup>, намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой  $m = 0,5$  кг. До начала вращения барабана высота груза над полом составляла  $h = 2,3$  м (рис. 5.2). Определить: а) время опускания груза до пола; б) силу натяжения нити; в) кинетическую энергию груза в момент удара о пол.

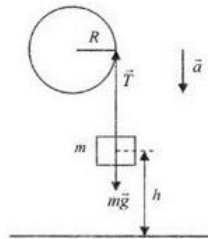


Рис. 5.2

По закону сохранения энергии с учетом поступательного и вращательного движения вала и груза

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (5.19)$$

Из уравнений кинематики можно записать следующие соотношения

$$\omega = \frac{v}{R}; \quad h = \frac{at^2}{2}; \quad v = at.$$

Данные соотношения подставим в (5.19)

32

Поскольку  $v_2$  оказалась положительной по величине, это означает, что второй осколок полетел в том же направлении, что и снаряд.

#### Задача 3.

Шар радиусом  $R = 10$  см и массой  $m = 5$  кг вращается вокруг своей оси симметрии по закону  $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ , где  $B = 2$  рад/с<sup>2</sup>;  $C = -0,5$  рад/с<sup>3</sup>. Определить суммарный момент сил относительно оси вращения для момента времени  $t = 3$  с.

Согласно уравнению динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$M_z = J_z \varepsilon,$$

где  $J_z = \frac{2}{5}mR^2$  – момент инерции шара;  $\varepsilon$  – угловое ускорение.

Поскольку кинематическое уравнение зависимости углового перемещения от времени задано в явном виде:  $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ , остальные кинематические характеристики можно найти с помощью последовательного дифференцирования:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2Bt + 3Ct^2;$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2B + 6Ct.$$

Тогда искомый момент сил относительно оси вращения равен

$$M_z = \frac{2}{5}mR^2(2B + 6Ct). \quad (5.18)$$

Теперь подставим значения коэффициентов и время  $t = 3$  с в формулу (5.18)

$$M_z = \frac{2}{5} \cdot 5 \cdot 10^{-2} (2 \cdot 2 - 6 \cdot 0,5 \cdot 3) = -0,1 \text{ Н·м.}$$

31

$$mg \frac{at^2}{2} = \frac{a^2 t^2}{2} \left( m + \frac{I_z}{R^2} \right).$$

Тогда для ускорения системы получим

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I_z}{R^2}} = 3,92 \text{ м/с}^2.$$

Искомое время опускания груза до пола найдем следующим образом:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 1,08 \text{ с.}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения вала:

$$TR = I_z \varepsilon,$$

откуда сила натяжения нити с учетом формулы  $\varepsilon = \frac{a}{R}$ :

$$T = \frac{I_z a}{R^2},$$

Тогда искомая сила натяжения нити равна

$$T = \frac{I_z a}{R^2} = 14,7 \text{ Н.}$$

Кинетическая энергия груза в момент удара о пол равна:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{ma^2 t^2}{2} = 4,48 \text{ Дж.}$$

## 6. РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. СПб., М.: Лань, 2010
2. *Детлаф А.А.* Курс физики. / Детлаф А.А., Яворский Б.М. М.: Высшая школа, 2009.
3. *Прошкин С.С., Ниленский Н.В., Самолетов В.А.* Сборник задач по механике, термодинамике и молекулярной физике. Дубна. Феникс, 2006, - 464 с.
4. *Савельев И.В.* Курс физики, Т. 2. СПб., М.: Лань, 2010.
5. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики, Т. 3, М., Наука, 2009.
6. *Трофимова Т.И.* Курс физики. М.: Высшая школа, 2009.
7. *Чертов А.Г.* Задачник по физике. / Чертов А.Г., Воробьев А.А. М.: Высшая школа, 2008.
8. *Яворский Б.М.* Основы физики, Т. 2. / Яворский Б.М., Пинский А.А. М.: Наука, 2009

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Основные физические постоянные

Таблица 4

Физическая величина	Численное значение
Скорость света в вакууме	$c = 2,9979250(10) \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$G = 6,672 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> /кг·с <sup>2</sup>
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Постоянная Больцмана	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Молярная газовая постоянная	$R = 8,314$ Дж/(К·моль)
Элементарный заряд	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона	$m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг = 0,511 МэВ
Масса протона	$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $\hbar = h/2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> )
<i>Постоянная Ридберга</i>	$R = 3,29 \cdot 10^5$ с <sup>-1</sup>
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф·м <sup>-1</sup>
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Требования к содержанию отчета и к решению задач по расчетно – графической работе.....	4
2. Учебные материалы к разделу «Механика».....	5
3. Задание для расчетно-графической работы.....	22
4. Примеры решения задач.....	26
Рекомендательный библиографический список.....	27
Приложения.....	34

## ФИЗИКА

### МЕХАНИКА

*Методические указания к расчетно-графическим работам для студентов направления 21.03.01*

Составитель *С.С. Прошкин*

Печатается с оригинал-макета, подготовленного кафедрой общей и технической физики

Ответственный за выпуск *С.С. Прошкин*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.2002

Подписано к печати 27.03.2017. Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 2,0. Усл.кр.-отт. 2,0. Уч.-изд.л. 1,5. Тираж 100 экз. Заказ 242. С 59.

Санкт-Петербургский горный университет  
РИЦ Санкт-Петербургского горного университета  
Адрес университета и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2