Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания 3 для студентов заочной формы обучения

Направления подготовки:

09.03.03 – Прикладная информатика
38.03.02 – Менеджмент
38.03.01 – Экономика

Составители:
Э. Н. Осипова
Л. И. Король

Санкт-Петербург
2018

РЕКОМЕНДОВАНО
на заседании кафедры
31.01.2018 г., протокол № 5

Рецензент О. Б. Тёрушкина

Учебное электронное издание сетевого распространения
Издано в авторской редакции
Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения файлов формата PDF
Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2018 294, по паролю. – Загл. с экрана.
Дата подписания к использованию 29. 06.2018 г. Рег. № 294/18
ФГБОУВО «СПбГУПТД»
Юридический и почтовый адрес: 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.
http://sutd.ru

ЛИТЕРАТУРА

Учебники

[1]. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер и др. – М.: ЮНИТИ, 2010.

[2]. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Т. 1, 2 / Д. Т. Письменный – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2011.

Сборники задач

[3]. Кремер, Н. Ш. Практикум по высшей математике для экономистов / Н. Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ, 2005.

[4]. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М.: ФМ, 2006.

[5]. Берман. Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб.: ПРОФЕССИЯ, 2005.

[6]. Данко, Д. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1, 2 / Д. Е. Данко и др. – М.: ВШ, 2002.

[7]. Письменный, Д. Т. Сборник задач по высшей математике, 2 курс / Д. Т. Письменный. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2007.

[8]. Письменный. Д. Т. Сборник задач по высшей математике, 1 курс / Д. Т. Письменный. – М.: АЙРИС ПРЕСС, 2008.

Основные темы и рекомендуемая литература для их изучения.

№	Тема	Литература
01	Функции двух переменных	[2, гл. IX]
02	Неопределённый интеграл	[1, гл.10] [2, гл.VII]
03	Определённый интеграл	[1, гл. 11] [2, гл.VIII (35 - 41)]

В контрольной работе каждый студент должен решить и представить на рецензию четыре примера (а, б, в, г) из 1 задания, по три примера (а, б, в) из 2 задания.

Контрольная должна быть выполнена в отдельной тетради с соблюдением правил, обязательных для выполнения всех работ по математике. Если работа присылается on line, то она представляется в сканированном виде с рукописного оригинала. Страницы должны быть отсканированы вертикально и подряд. **Работы, выполненные в текстовых редакторах, не принимаются.**

Контрольная работа должна быть представлена на проверку не позднее, чем за две недели до начала экзаменационной сессии.

Если все задания выполнены без ошибок, то студент допускается к защите этих работ, которая происходит во время экзаменационной сессии перед экзаменом по математике.

Если в работе есть ошибки, то их нужно исправить в этой же тетради и прислать на повторную проверку.

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, студенту необходимо изучить соответствующий теоретический материал. По каждой теме дается список вопросов, на которые необходимо ответить при подготовке к экзамену.

Если в процессе изучения теорем или при решении задач возникают вопросы, то можно обратиться к преподавателям кафедры математики для получения письменной или устной консультации.

Во время экзаменационной сессии для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия, которые носят обзорный характер.

При выполнении контрольной работы обратите внимание на оформление работы. НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ ДОЛЖНЫ БЫТЬ УКАЗАНЫ:

Фамилия, имя, отчество.

Номер студенческого билета (или зачетной книжки).

Название дисциплины и номер контрольной работы.

Номер варианта.

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует последней цифре номера студенческого билета (или зачетной книжки).

В каждом задании 20 вариантов примеров. Если год Вашего поступления в Университет – чётный, то Вы выбираете пример из первых десяти вариантов, а если – нечётный, то выбираете свой вариант из номеров с одиннадцатого по двадцатый.

Например, год поступления 2015, вариант 3, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.13, 2.13 и т. д.

Например, год поступления 2014, вариант 3, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.03, 2.03 и т. д.

Вопросы для самопроверки

01. Функции двух переменных

1. Дать определение функции двух переменных, определение области определения.
2. Какие приращения есть у функции двух переменных?
3. Дать определение частных производных и дифференциалов функции двух переменных.
4. Дать определение градиента. Геометрический смысл градиента.
5. Дать определение экстремуму функции двух переменных.
6. Сформулировать необходимые и достаточные условия экстремума.

02. Неопределённый интеграл

1. Дайте определение первообразной функции и перечислите её свойства.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Напишите таблицу основных интегралов.
4. Сформулируйте простейшие свойства неопределенного интеграла.
5. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. Приведите примеры.
6. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью метода интегрирования по частям. Приведите примеры.

7. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей I, II и III типов.

03. Определённый интеграл

1. Дайте определение определенного интеграла и укажите его геометрический смысл.

2. Пусть $\int\limits_a^b f(x)dx = 0,\ f(x) \neq 0.$ Как это истолковать геометрически?

3. Докажите основные свойства определенного интеграла: а) постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла; б) определенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых; в) $\int\limits_a^b f(x)dx = = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$ где $a \prec c \prec b.$

4. Напишите формулу замены переменной в определенном интеграле. Приведите пример.

5. Напишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.
Приведите пример.

Методические указания

Функции двух переменных

Пример. $z = \ln\frac{x}{y}$.

1. Найти область определения функции.
2. Найти градиент функции. Вычислить градиент в точке A(1, 1).
3. Проверить, что $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot y = 0$.
4. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot x^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot y^2 = -2$.

Решение.

1. Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение, следовательно

$$\frac{x}{y} > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}.$$

Сделаем чертеж (*рис. 1*)

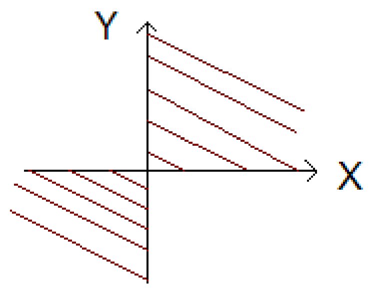

Рис. 1

2. Найдем градиент. $grad\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = \{\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\}$.

При вычислении частной производной по x рассматриваем функцию z как функцию только от переменной x, а при дифференцировании по y – как функцию только от y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y}{x}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y},$$

$grad\, z = \frac{1}{x}\vec{i} - \frac{1}{y}\vec{j} = \{\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\}.$

3.

$$\frac{\partial z}{\partial x}x + \frac{\partial z}{\partial y}y = \frac{1}{x}x - \frac{1}{y}y = 1 - 1 = 0.$$

4. При вычислении второй производной по x также рассматриваем функцию z как функцию только от переменной x, а при дифференцировании по y – как функцию только от y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)'_x = (x^{-1})'_x = \frac{-1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{-1}{y}\right)'_y = \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{-1}{x^2} \cdot x^2 - \frac{1}{y^2} \cdot y^2 = -2.$$

6. Формула Тейлора функции двух переменных. Экстремумы функции нескольких переменных. Метод наименьших квадратов

Литература. [2, гл. IX, § 46].

При исследовании функции двух переменных на экстремум обратите внимание на следующее:

1. Точки экстремума всегда лежат внутри области определения, а на границе могут находиться только наибольшие и наименьшие значения (см. функцию одной переменной).

2. Экстремум может достигаться в тех точках области определения, где z'_x и z'_y или равны 0 или не существуют.

Схема исследования на нахождение наибольших и наименьших значений

1. Найти внутренние точки области, где может быть экстремум.

2. Исследовать границы области и найти там точки, где может достигаться наибольшее и наименьшее значения.

3. Вычислить значение функции во всех найденных в п. 1 и 2 точках. Среди них выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью О*y*, прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (*рис. 2*).

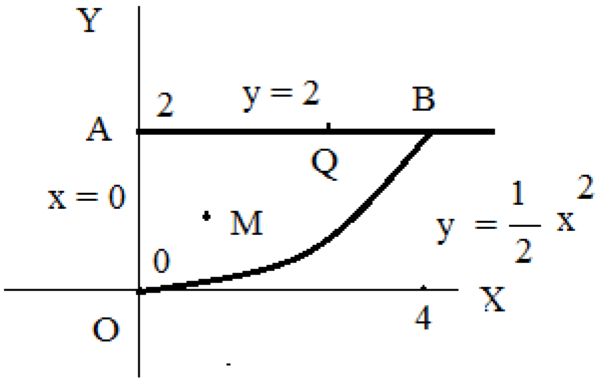

Рис. 2

Область определения функции и ее стационарные точки.

Решение. Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, могут находиться как внутри области, так и на ее границе. Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y$ равны нулю. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0, \end{cases}$$

найдем две точки О (0; 0) и М (1; 1), в которых обе частные производные равны нулю. Первая из них принадлежит границе области. Следовательно, если функция z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то это может быть только в точке М(1;1). Перейдем к исследованию функции на границе области.

На отрезке ОА имеем $x = 0$, поэтому на этом отрезке

$$z = 3y^2 (0 \leq y \leq 2)$$

есть возрастающая функция от одной переменной y; наибольшее и наименьшее значение она принимает на концах отрезка ОА.

На отрезке АВ имеем $y = 2$, поэтому на этом отрезке функция

$$z = 2x^3 - 6x \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 2x^3 - 12x + 12 \quad (0 \le x \le 2)$$

представляет собой функцию одной переменной x; ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка.

Находим производную: $z' = 6x^2 - 12$. Решаем уравнение $z' = 0$ или $6x^2 - 12 = 0$ и находим $x = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $0 \le x \le 2$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$; соответствующей точкой отрезка AB является точка $Q(\sqrt{2};2)$. Итак, из всех значений функции z на отрезке AB наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге OB параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем

$$z = 2x^3 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \quad (0 \le x \le 2).$$

Решаем уравнение $z' = 3x^3 - 3x^2 = 0$ или $x^2(x-1) = 0$ и находим его корни: $x = 0$ и $x = 1$. Таким образом, из всех значений функции z на дуге OB наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках O, P и B.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т. е. среди значений:

$z(O) = z(0;0) = 0; \quad z(A) = z(0;2) = 12;$

$z(Q) = z(\sqrt{2};2) = 12 - 8\sqrt{2};$

$z(B) = z(2;2) = 4; \; z(P) = z(1;1/2) = -1/4;$

$z(M) = z(1;1) = -1.$

Наибольшее и наименьшее из них равны 12 и -1. Они и являются наибольшим и наименьшим значениями данной функции в данной замкнутой области: $z_{наиб} = 12, z_{наим} = -1.$

Неопределенные интегралы

Свойства

1. $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C,$ где $F'(x) = f(x)$ C число;
2. $\int dx = x + C;$

3. $\int 0\cdot dx = C;$

4. $(\int f(x)\cdot dx\,)'_x = f(x);$

5. $d(\int f(x)\cdot dx) = f(x)dx$

6. $\int d(\,F(x)\,) = F(x)+C;$

7. $\int C\cdot f(x)\cdot dx = C\cdot\int f(x)\cdot dx;$

8. $\int (f(x)\pm g(x))\cdot dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx\,;$

9. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\cdot dx = \ln(f(x))+C\,;$

10. $\int f(kx+b)\cdot dx = \frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+C$

Замена переменной под знаком неопределенного интеграла

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\cdot dx = \int f(t)\cdot dt,\ \text{где}\ \begin{cases} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)\cdot dx \end{cases}$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx,$$

Таблица неопределенных интегралов

$\int \sin x\cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
$\int \cos x\cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(kx+b)}dx = \frac{1}{k}tg\ (kx+b)+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(kx+b)}dx = -\frac{1}{k}ctg\ (kx+b)+C$
$\int e^x\cdot dx = e^x + C$	$\int e^{(kx+b)}\cdot dx = \frac{1}{k}e^{(kx+b)}+C$
$\int a^x\cdot dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^{(kx+b)}\cdot dx = \frac{1}{k}\frac{a^{(kx+b)}}{\ln a}+C$
$\int \frac{1}{x}\cdot dx = \ln\ \lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{kx+b}dx = \frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert + C$
$\int x^m\cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+C,\quad$ где $m\neq -1$	$\int (kx+b)^m dx = \frac{1}{k}\frac{(kx+b)^{m+1}}{m+1}+C,\quad$ где $m\neq -1$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$	$\int \frac{1}{(kx+b)^2+a^2}dx = \frac{1}{k}\frac{1}{a}arctg\frac{(kx+b)}{a}+C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+C$	$\int \frac{1}{(kx+b)^2-a^2}dx=\frac{1}{k}\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{(kx+b)-a}{(kx+b)+a}\right\|+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-(kx+b)^2}}dx=\frac{1}{k}\arcsin\frac{(kx+b)}{a}+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$	

Производные

Определение производной $y'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Свойства

1. $(\mathrm{const})' = 0$;
2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;
3. $(C\cdot u(x))' = C\cdot u'(x)$;
4. $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$;
5. $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$.

y(x)	**y′(x)**	**y(u(x))**	$\mathbf{y'_x(u(x)) = y'_u \cdot u'_x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{ctg}\, u$	$\frac{-1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, u$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arcctg}\, u$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
e^x	e^x	e^u	$e^u\cdot u'$

$\mathbf{y(x)}$	$\mathbf{y'(x)}$	$\mathbf{y(u(x))}$	$\mathbf{y'_x(u(x)) = y'_u \cdot u'_x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a u$	$\frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
x^m	$m \cdot x^{m-1}$	u^m	$m \cdot u^{m-1} \cdot u'$
x	1	u	u'
x^2	$2 \cdot x$	u^2	$2 \cdot u \cdot u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$

Пример 1. $\int f(x)dx = \int (6-\sqrt{x})dx$.

Решение. Используем теорему: интеграл от разности функций равен разности интегралов.

$$\int (6-\sqrt{x})dx = \int 6dx - \int \sqrt{x}dx = 6\int dx - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = 6x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int f(x)dx = \int \sin 2xdx$.

Решение. Сравним наш интеграл с табличным

$$\int \sin xdx = -\cos x + C.$$

У нас $f(x) = \sin 2x$, формально интеграл не табличный. Используем теорему о линейной замене переменной:

если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

В интеграле $ax+b = 2x$, т. е. $a = 2$, следовательно, $\int \sin 2xdx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$.

Проверим полученный результат дифференцированием

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2} + C\right)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)2 + 0 = \sin 2x.$$

Интеграл взят правильно.

Пример 3. $\int f(x)dx = \int \sin^2 x \cos xdx$, т. е. $f(x) = \sin^2 x \cos x$.

Решение. Так как $(\sin x)' = \cos x$, то используем метод «подведение под знак дифференциала»:

У нас $\sin x = t$. Тогда $dt = d(\sin x) = \cos x dx$, тогда новая переменная интегрирования будет уже не *t*, а sin*t*.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (\cos x dx) = \int \left(\sin x\right)^2 d(\sin x) = \frac{(\sin x)^3}{3} + C.$$

Пример 4. $\int f(x)dx = \int \frac{x^2}{x^3+7}dx$, т. е. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+7}$.

Решение.

Так как $(x^3+7)' = 3x^2$, то используем метод «подведение под знак дифференциала», $x^3 + 7 = t$. Тогда $dt = d(x^3+7) = 3x^2 dx$. Домножим в числителе на 3, при этом надо и знаменатель умножить на 3.

$$\int \frac{x^2}{x^3+7}dx = \int \frac{3x^2 dx}{3(x^3+7)} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{x^3+7}.$$

Так как $(x^3+7)' = 3x^2$, то $3x^2 dx = d\left(x^3+7\right)$,

тогда $\int \frac{x^2}{x^3+7}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{x^3+7} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3+7\right)}{x^3+7} = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+7\right) + C.$

Проверим дифференцированием

$$(\ln(x^3+7))' = \frac{1}{x^3+7}(3x^2+0) = \frac{3x^2}{x^3+7}.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{e^{arctg(x)}}{1+x^2}dx$.

Решение. Используем теорему о замене переменной

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt, \text{ где } \begin{cases} t = \varphi(x), \\ dt = \varphi'(x) \cdot dx. \end{cases}$$

Особенностью данного интеграла является то обстоятельство, что его подынтегральное выражение содержит множитель $\frac{dx}{1+x^2}$, который является дифференциалом функции arctg *x*. Поэтому в данном интеграле целесообразно ввести замену переменной: t = arctg x. Отсюда $dt = d(\text{arctg}(x)) = \frac{1}{1+x^2}dx$ и $e^{arctg\ x} = e^t$. Подставляя в исходный интеграл, имеем $\int \frac{e^{\text{arctg}(x)}}{1+x^2}dx = \int e^{\text{arctg}(x)} d\left(\text{arctg}\left(x\right)\right) = e^{\text{arctg}(x)} + C$.

Пример 6. Найти $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$.

Решение. Здесь уместна замена t = cos x, т. к. dt = - sin x dx, *и* $\sin^3 x\, dx$ = $\sin^2 x$ sinx dx. Поэтому

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x(\sin x \cdot dx) = -\int (1-t^2)t^2 \cdot dt = \int (t^4 - t^2)dt =$$
$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 7. Найти $\int x\sin(x)dx$.

Решение. Используем метод интегрирования по частям

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Так как производная от x равна 1, то возьмем $u = x$. Используем формулу, приведя схему записи удобную при использовании метода интегрирования по частям.

$$\int x\sin(x)dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C\ .$$

Пример 8. Найти $\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие. Знаменатель имеет два различных действительных корня, разложим подынтегральную функцию на простейшие слагаемые

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}.$$

Приравняем числители и учтем, что коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие слева и справа должны совпадать

$$x+1 = (A+B)x - A \Rightarrow A = -1,\ \ A+B = 1 \Rightarrow B = 2$$

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}\right)dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C.$$

Пример 9. Найти $\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2}dx$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие. Знаменатель имеет действительные корни, причем корень -1 имеет кратность два. Разложим подынтегральную функцию на простейшие слагаемые

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{\left(x-1\right)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Dx}{x(x-1)^2}.$$

Приравняем числители и учтем, что коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие слева и справа должны совпадать:

$$2x+1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Dx=(A+B)x^2+(-2A-B+D)x+A$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+D=2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow A=1,\ B=-1,\ D=3$$

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{\left(x-1\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{2x+1}{x(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}\right)dx=\ln|x|-\ln|x-1|+3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+C.$$

Пример 10. Найти $\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)}$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие, разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+D}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+D)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Приравняем числители

$$x\equiv A(x^2+1)+(Bx+D)(x+1);\quad 0\cdot x^2+1\cdot x+0\equiv(B+A)x^2+(B+D)x+(A+D).$$

Так как коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие слева и справа должны совпадать, то

$$\begin{cases} B+A=0 \\ B+D=1 \\ A+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+A=0 \\ B-A=1 \\ A+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B=1 \\ \frac{1}{2}+D=1 \\ A+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)}=\int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{2xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\mathrm{arctgx}+C$$

Здесь использовано

$$\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x+1|+C,$$

$$\int\frac{\mathrm{xdx}}{\mathrm{x}^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2\mathrm{xdx}}{\mathrm{x}^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\mathrm{x}^2+1\right)+\mathrm{C}.$$

В последнем интеграле использовано свойство, в котором используется условие, что числитель есть производная знаменателя.

Пример 11. Найти $\int\frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}dx$.

Решение. Сделаем замену переменной, позволяющую избавится от иррациональности

$$x+2=t^6\Rightarrow\sqrt[3]{x+2}=t^2,\quad \sqrt{x+2}=t^3,\ dx=d(t^6-2)=6t^5dt$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}dx=\int\frac{t^3\cdot 6t^5dt}{t^2+3}=6\int\frac{t^8dt}{t^2+3}=$$

Под интегралом стоит неправильная дробь, поэтому разделим числитель на знаменатель и вычислим получившиеся интегралы

$$\frac{t^8}{t^2+3}=t^6-3t^4+9t^2-27+\frac{81}{t^2+3}$$

$$=\int\frac{t^8}{t^2+3}dt=\int\left(t^6-3t^4+9t^2-27+\frac{81}{t^2+3}\right)dt=$$

$$=\frac{t^7}{7}-\frac{3t^5}{5}+\frac{9t^3}{3}-27t+\frac{81}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^7}{7}-\frac{3\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^5}{5}+3\left(\sqrt[6]{x+2}\right)^3-27\left(\sqrt[6]{x+2}\right)+\frac{81}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\left(\sqrt[6]{x+2}\right)}{\sqrt{3}}+C.$$

Определенный интеграл

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^2(x^2-x+\sqrt{x})dx.$

Так как интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, то

$$\int\limits_0^2(x^2-x+\sqrt{x})dx=\int\limits_0^2x^2dx-\int\limits_0^2xdx+\int\limits_0^2\sqrt{x}dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_0^2=\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+\frac{2}{3}\cdot 2^{3/2}\right)-0.$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{7/\sqrt{3}}^{\sqrt{98/3}}\frac{\sqrt{3x^2-49}}{x}dx.$

Решение. Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на x, получим

$$\int\limits_{7/\sqrt{3}}^{\sqrt{98/3}}\frac{\sqrt{3x^2-49}}{x}dx=\int\limits_{7/\sqrt{3}}^{\sqrt{98/3}}\frac{\sqrt{3x^2-49}\cdot x\cdot dx}{x^2}.$$

Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt{3x^2-49}=t$,

тогда $3x^2-49=t^2 \Rightarrow 3x^2=t^2+49 \Rightarrow x^2=\frac{t^2+49}{3} \Rightarrow 2x\cdot dx=\frac{2}{3}t\cdot dt \Rightarrow x\cdot dx=\frac{1}{3}t\cdot dt.$

Подставим найденные выражения в подынтегральную функцию, получим:

$$\frac{\sqrt{3x^2-49}(x\cdot dx)}{x^2}=\frac{t\cdot\frac{1}{3}(t\cdot dt)}{\frac{1}{3}\left(t^2+49\right)}=\frac{t^2}{t^2+49}dt.$$

Теперь в подынтегральном выражении другая переменная (t), поэтому нужно заменить пределы интегрирования:

$$t=\sqrt{3x^2-49} \Rightarrow t_{нижн}=\sqrt{3x^2_{нижн}-49}=\sqrt{3\frac{49}{3}-49}=0;\ t_{верхн}=\sqrt{3x^2_{верхн}-49}=\sqrt{3\frac{98}{3}-49}=7.$$

Подставим в данный интеграл полученные значения, тогда получим

$$\int\limits_{7/\sqrt{3}}^{\sqrt{98/3}}\frac{\sqrt{3x^2-49}}{x}dx=\int\limits_0^7\frac{t^2}{t^2+49}dt=\int\limits_0^7\frac{\left(t^2+49\right)-49}{t^2+49}dt=\int\limits_0^7\left(1-\frac{49}{t^2+49}\right)dt=\left(t-49\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\frac{t}{7}\right)\Bigg|_0^7=$$

$$\left(7-7\operatorname{arctg}\frac{7}{7}\right)-\left(0-7\operatorname{arctg}\frac{0}{7}\right)=7-\operatorname{arctg}1=7-\frac{\pi}{4}=\frac{28-\pi}{4}.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x}$ и $x+y=6$.

Решение. Первое уравнение задаёт гиперболу, а второе – прямую линию. Найдём точки их пересечения: $\frac{5}{x}=6-x \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=5\end{cases} \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=1\end{cases}$,

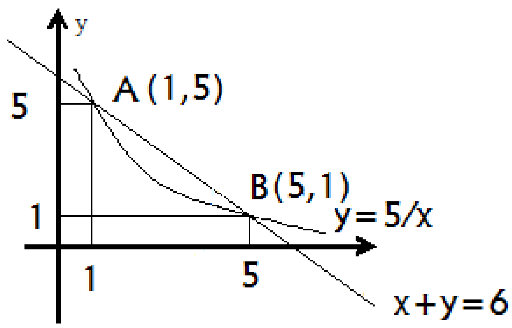

Рис. 3

Обозначим эти точки через A и B. Итак, A(1; 5), B(5; 1). Искомая площадь S равна разности площадей фигур, ограниченных линиями $x=1$, $x=5$, $y=0$, $y=6-x$ (обозначим эту площадь через S_1) и линиями $x=1$, $x=5$, $y=0$, $y=\frac{5}{x}$ – – площадь S_2 (*рис.3*). Таким образом

$$S=S_1-S_2=\int\limits_a^b f_1(x)dx-\int\limits_a^b f_2(x)dx=\int\limits_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$$

$$S=\int\limits_1^5\left(6-x-\frac{5}{x}\right)dx=\int\limits_1^5 6dx-\int\limits_1^5 xdx-\int\limits_1^5\frac{5}{x}dx=6x\Big|_1^5-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^5-5\ln x\Big|_1^5=30-6-\frac{25}{2}+\frac{1}{2}-5(\ln 5-\ln 1)=$$
$$=12-5\ln 5.$$

Ответ: S =(12 – 5 ln5) *ед*^{2}.

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и параболой $y = \sqrt[3]{x}$ (*рис. 4*).

Найдем точки пересечения линий. Для этого решим уравнение $x = \sqrt[3]{x}$. Получим $x_1 = 0, \;\; x_2 = 1$.

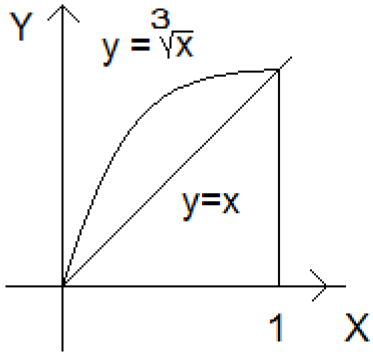

Рис. 4

Объём тела может быть вычислен по формуле $V = V_1 - V_2 = \pi\int_a^b f_1^2(x)dx - \pi\int_a^b f_2^2(x)dx$,

где

$f_1(x) = \sqrt[3]{x}, \;\; f_2(x) = x$.

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx - \pi\int_0^1 x^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{5/3}\Bigg|_0^1 - \pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) = \pi\frac{4}{15}.$$

Ответ: $V = \pi\dfrac{4}{15}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3

1. Дана функция двух переменных

1. Для функции из пункта 1 найти область определения функции двух переменных $z = f(x, y)$. Изобразить ее на координатной плоскости и заштриховать.
2. Для функции из пункта 2 найти градиент и проверить, удовлетворяет ли функция двух переменных $z = f(x, y)$ указанному дифференциальному уравнению первого порядка.

№	1	2
1.1	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}.$	$z = y \cdot \sin(x^2 - y^2),$ $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$
1.2	$z = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$	$z = y \cdot e^{x^2 - y^2},\ \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$
1.3	$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$z = x \cdot \sin(x^2 - y^2),\ x^2\frac{\partial z}{\partial y} + xy\frac{\partial z}{\partial x} = xy.$
1.4	$z = \frac{y-3}{x^2 + y^2}$	$z = tg^3(2x - 3y),\ 3\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.5	$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$	$z = e^{\frac{x}{y^2}},\ 2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.6	$z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$	$z = x \cdot e^{y^2 - x^2},\ x^2\frac{\partial z}{\partial y} + xy\frac{\partial z}{\partial x} = zy.$
1.7	$z = \sqrt{xy}$	$z = \ln(x^2 + xy + y^2),\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2.$
1.8	$z = x \ln y$	$z = y\ln(x^2 - y^2),\ \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$
1.9	$\ln(x^2 + y^2 - 4)$	$z = x \cdot e^{y^2 - x^2},\ \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x^2}.$
1.10.	$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2 - 4}$	$z = e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{y},\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.11	$z = \frac{x+y}{(x+y)(y-3)}$	$z = e^{\frac{y}{x}},\ x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Окончание таблицы

№	1	2
1.12	$z=\sqrt{9-x^2-y^2}$	$z=\sin\frac{x}{y},\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
1.13	$z=\ln(xy)$.	$z=\ln(e^x+e^y),\ \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$
1.14	$z=\frac{x^3+4xy+y^2}{xy}$	$z=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
1.15	$z=\frac{4+x}{(x+3)(y-5)}$	$z=tg\frac{x}{y},\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
1.16	$z=\sqrt{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1}$	$z=tg\frac{y}{x},\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
1.17	$z=\sqrt{\frac{x}{y}}$	$z=\frac{x^3-y^3}{x^3-4y^3},\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
1.18	$z=\frac{x}{y^2}$	$z=\sin(x^2+y^2),\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
1.19	$z=\ln(16-x^2-y^2)$	$z=\ln(x^2+y^2),\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$
1.20	$z=\ln(xy^2).$	$z=\frac{y}{x^2-y^2},\ \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z=f(x;y)$ **в замкнутой области D, заданной системой неравенств. Сделать чертеж.**

№	Функция	Область
2.1.	$z=x^2+y^2-9xy+27$;	$0\le x\le 3,\quad 0\le y\le 3.$
2.2.	$z=x^2+2y^2+1;$	$x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad x+y\le 3.$
2.3.	$z=3-2x^2-xy-y^2;$	$x\le 1,\quad y\ge 0,\quad y\le x.$
2.4.	$z=x^2+3y^2+x-y;$	$x\ge 1,\quad y\ge -1,\quad x+y\le 1.$
2.5.	$z=x^2+2xy+2y^2;$	$-1\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2.$
2.6.	$z=5x^2-3xy+y^2+4;$	$x\ge -1,\quad y\ge -1,\quad x+y\le 1.$
2.7.	$z=10+2xy-x^2;$	$0\le y\le 4-x^2.$
2.8.	$z=x^2+2xy-y^2+4x;$	$x\le 0,\quad y\le 0,\quad x+y+2\ge 0.$

2.9.	$z = x^2 + xy - 2;$	$4x^2 - 4 \le y \le 0.$
2.10.	$z = x^2 + xy;$	$-1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 3.$
2.11.	$z = x^2 + 2xy + 2y^2;$	$0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2.$
2.12.	$z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6;$	$0 \le x \le 4; \quad 0 \le y \le 4.$
2.13.	$z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y;$	$0 \le x \le 2; \quad 0 \le y \le 3.$
2.14.	$z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y;$	$0 \le x \le 3; \quad 0 \le y \le 2.$
2.15.	$z = x^3 + y^3 - 3xy;$	$0 \le x \le 2; \quad 0 \le y \le 3.$
2.16.	$z = \frac{x^2}{2} - xy$	$y \ge \frac{x^2}{3}; \quad y \le 3.$
2.17.	$z = x^2 - xy + y^2 - 4x;$	$x \ge 0; \quad y \ge 0; \quad 2x + 3y \le 12.$
2.18.	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y;$	$x \le 0; \quad y \le 4; \quad x + y \ge -3.$
2.19.	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$	$0 \le x \le 2; \quad -1 \le y \le 1.$
2.20.	$z = x^3 + y^3 - 9xy - 25;$	$0 \le x \le 5; \quad 0 \le y \le 5.$

3. Найти неопределенные и определенный интегралы. В двух первых примерах (п. а) и б) проверить результаты дифференцированием.

№	а	б	в	г
3.1	$\int \sin(2x)dx$	$\int e^x \sqrt{(1+e^x)}dx$	$\int xe^{3x}dx$	$\int_0^2 \sqrt{1+4x}dx$
3.2	$\int \cos(2x)dx$	$\int \frac{xdx}{(x^2+4)^3}$	$\int x\ln(2x)dx$	$\int_0^1 3^{x+1}dx;$
3.3	$\int \frac{1}{2x+3}dx$	$\int e^{\sin x}\cos xdx$	$\int xarctgxdx$	$\int_1^2 \sqrt[3]{2+x}dx$
3.4	$\int \sqrt{1+x}dx$	$\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$	$\int x\sin 2xdx$	$\int_1^2 \sqrt[3]{5-x}dx$
3.5	$\int \sqrt[4]{2x+1}dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)};$	$\int x\cos 3xdx;$	$\int_0^3 e^{2-3x}dx$
3.6	$\int \frac{1}{\sin^2(3x-2)}dx$	$\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$	$\int xe^{-x}dx$	$\int_0^2 \sqrt{2x+5}dx$
3.7	$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx$	$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	$\int (2x+1)arctgxdx$	$\int_0^2 \sqrt{2x+5}dx$

№	а	б	в	г
3.8	$\int\sqrt{2x+1}dx$	$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$	$\int(3x+5)\ln xdx$	$\int_1^3\frac{1}{2x-1}dx$
3.9	$\int e^{1-2x}dx$	$\int\cos x\cdot 3^{\sin x}dx$	$\int x\sin(4x)dx$	$\int_2^3(1-2x)dx$
3.10	$\int\cos(1-x)dx$	$\int x\sqrt{x^2+1}dx$	$\int x\cos(2x)dx$	$\int_{-2}^2(x^4+3)dx$
3.11	$\int\sqrt[4]{1-2x}dx$	$\int\frac{dx}{x(2\ln x+3)}$	$\int x\ln(x^2+1)dx$	$\int_0^3\frac{1}{x+2}dx$
3.12	$\int e^{2x+3}dx$	$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\int(2x-1)e^{3x}dx$	$\int_1^2\sqrt{4x-1}dx$
3.13	$\int(1-3x)^3dx$	$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	$\int(2x-1)\cos xdx$	$\int_{-2}^2(x^3-2)dx$
3.14	$\int\sin(3x-1)dx$	$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$	$\int(4x+3)\sin xdx$	$\int_0^3 e^{2x-1}dx;$
3.15	$\int(2x-3)^4dx$	$\int\frac{(\sqrt[3]{4+\ln x})dx}{x}$	$\int(x-1)arctgxdx$	$\int_0^1 2^{x-1}dx;$
3.16	$\int\sin(2-5x)dx$	$\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$	$\int(x-2)e^{-x}dx$	$\int_{-2}^0\sqrt{1-3x}dx$
3.17	$\int\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$	$\int\frac{arctgx}{1+x^2}dx$	$\int(x+2)\sin 5xdx$	$\int_{-1}^2(1-4x^3)dx;$
3.18	$\int 2^{1-x}dx$	$\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tgx}}$	$\int(x-1)\ln xdx$	$\int_2^5(x^3+2x)dx$
3.19	$\int\frac{1}{\cos^2(3x-2)}dx$	$\int\frac{\sqrt{ctgx}}{\sin^2 x}dx$	$\int(1-x)arctgxdx$	$\int_{-1}^2(4x^2-1)dx;$
3.20	$\int\frac{1}{3-4x}dx$	$\int\frac{dx}{x(2\ln x+3)}$	$\int x\cdot\cos(2x+1)dx$	$\int_2^5(x^3-x)dx$

4. Геометрические приложения определенного интеграла

4.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

4.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=5$.

4.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=1-3x^2$ и прямой $y=-2$.

4.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3-x^2$ и прямой $y=-1$.

4.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$ и прямой $y=\frac{1}{2}$.

4.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$ и прямой $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ и прямой $y=\frac{1}{2}$.

4.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\cos x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ и прямой $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=e^{2x}$, осью ОХ и прямыми $x=-1$, $x=2$.

4.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\sin^2 x, 0\le x\le\pi$.

4.11. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

4.12. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$.

4.13. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{2}{1+x}$ и прямыми $x=1$, $x=4$.

4.14. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{x^2}{2}$ и кубической параболой $y=\frac{x^3}{8}$.

4.15. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

4.16. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной параболами $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

4.17. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2\sqrt{x}.$

4.18. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{4 - x^2}$.

4.19. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной гиперболой $y = \dfrac{1}{1+2x}$ и прямыми $x = 3,\ x = 5$.

4.20. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \dfrac{x^2}{3}$ и кубической параболой $y = \dfrac{x^3}{9}$.