

## РАСЧЕТ РЕЖИМА ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С НЕЛИНЕЙНЫМ РЕЗИСТОРОМ

**Цель работы:** графоаналитическое определение рабочей точки нелинейного резистора с использованием метода эквивалентного источника, решение нелинейного уравнения итерационным методом и методом Ньютона-Рафсона, определение статического и динамического сопротивления, линейризация вольтамперной характеристики нелинейного резистора в рабочей точке.

### Задание.

Структура нелинейной цепи и параметры ее линейной части заданы в таблице вариантов. Вольтамперная характеристика (ВАХ) нелинейного резистора (НР) симметрична относительно начала координат и задана совокупностью экспериментальных точек  $U_k, I_k$ , расположенных в первом квадранте.

Требуется определить:

1. Параметры эквивалентного источника относительно точек подключения НР.
2. Используя ВАХ НР и внешнюю характеристику эквивалентного источника найти координаты рабочей точки.
3. Используя аппроксимацию ВАХ НР  $U(I)$  найти ток и напряжение НР итерационным методом и методом Ньютона-Рафсона.
4. Найти статическое и динамическое сопротивление
5. Выполнить линейризацию цепи в окрестности рабочей точки

### Пример выполнения работы

- Структура и параметры цепи заданы в таблице 1.

Таблица 1.

№	$E_1, B$	НР	$J_1, A$	$R_3, Ом$	$R_2, Ом$	$E_2, B$	$R_4, Ом$
30	1-5	1-2	5-2	3-2	3-4	4-3	4-5
	100	$U(I)$	5	15	50	150	15

Схема цепи, построенная по данным таблицы 1, показана на рис.1-а.

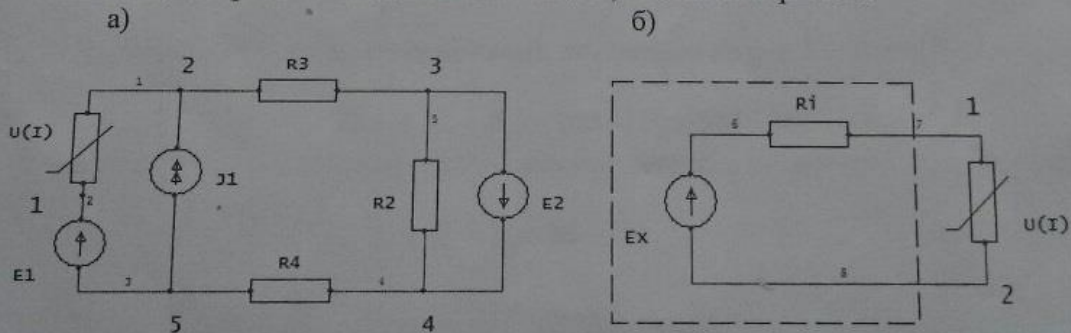


Рис.1 Схема нелинейной цепи – а) и её преобразование с помощью метода эквивалентного генератора – б)

Вольтамперная характеристика нелинейного резистора задана дискретными значениями напряжения и тока  $U_k, I_k$

$$U_e = (0, 30, 45, 54, 56, 55, 51, 48, 46, 45, 45, 50, 60, 73, 90)^T \quad (1)$$

$$I_e = (0, 0.5, 1.0, 2.0, 3.5, 4.0, 5.1, 4.5, 5.0, 5.5, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10)^T \quad (2)$$

где  $T$  – знак транспонирования.

Графики характеристики  $U_e = f(I_e)$  и обращенной характеристики  $I_e = f^{-1}(U_e)$  представлены на рис.2. При построении графиков использована линейная интерполяция.

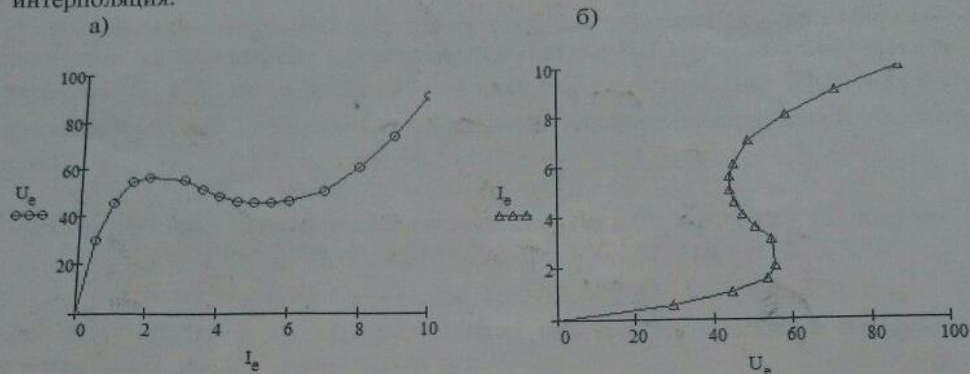


Рис.2. ВАХ нелинейного резистора  $U_e(I_e)$  - а) и  $I_e(U_e)$  - б)

В соответствии с рис. 2-б резистор имеет характеристику  $S$ -типа, которая является однозначной функцией тока и неоднозначной функцией напряжения.

Для определения тока и напряжения НР заменим линейную часть нелинейной цепи эквивалентным источником, как показано на рис. 1-б. Параметрами источника является напряжение холостого хода  $E_x$  и внутреннее сопротивление  $R_i$ . Напряжение холостого хода измеряется относительно узлов 1-2 при исключении из цепи НР, сопротивление  $R_i$  определяется как входное сопротивление пассивного двухполюсника относительно зажимов 1-2, измеренное при равенстве нулю напряжений  $E_1, E_2$  и тока  $J_1$ .

### 1. Определение параметров эквивалентного генератора

Напряжение ХХ определяется по схеме, показанной на рис.3-а. Используя принцип суперпозиции, получим

$$E_x = E_1 + E_2 - J_1(R_3 + R_4) = 100 + 150 - 5(15 + 15) = 100 \quad (3)$$

Внутреннее сопротивление источника в соответствии с расчетной схемой (рис. 3-б) определяется по формуле

$$R_i = R_3 + R_4 = 30 \quad (4)$$

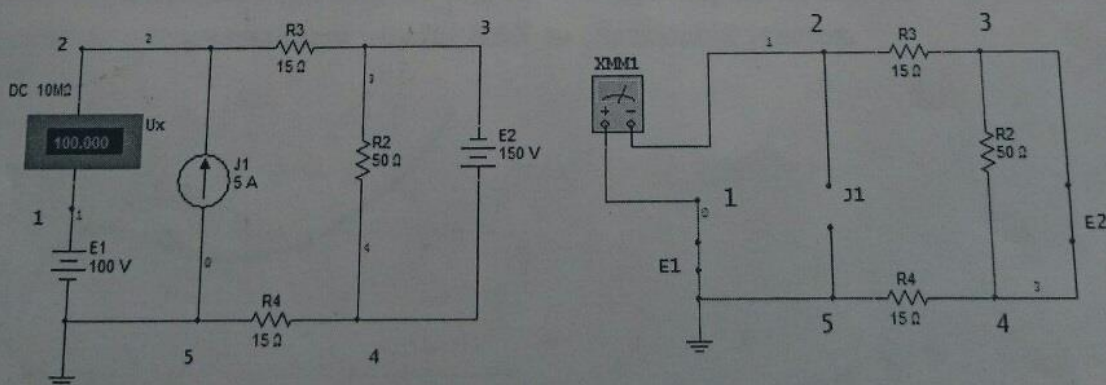


Рис.3. Расчетные схемы для определения напряжения ХХ - а) и внутреннего сопротивления - б).

## 2. Построение входной и выходной характеристики нелинейного делителя напряжения

Расчетная схема (рис. 1-б) представляет собой нелинейный делитель напряжения. Ток источника определяется по входной характеристике  $I(U_1)$  при заданном значении источника  $U_1 = E_x$ , напряжение НР – по выходной характеристике  $U_2(U_1)$  при входном напряжении  $U_1 = E_x$ . Входное напряжение двухполюсника определяется по закону Ома и ЗКН

$$U_{eR} = R_l I_e \quad U_{1e} = U_{eR} + U_e \quad (5)$$

После подстановки экспериментальных данных (1) и (2) в формулу (5) получим

$$U_{eR} = (0, 15, 30, 45, 60, 90, 105, 120, 135, 150, 180, 210, 240, 270, 300)^T \quad (6)$$

$$U_{1e} = (0, 45, 75, 99, 116, 145, 156, 168, 181, 195, 210, 226, 260, 300, 390)^T \quad (7)$$

Входная и выходная характеристики нелинейного четырехполюсника, построенные по данным (1), (2), (6) и (7), показаны на рис. 4.

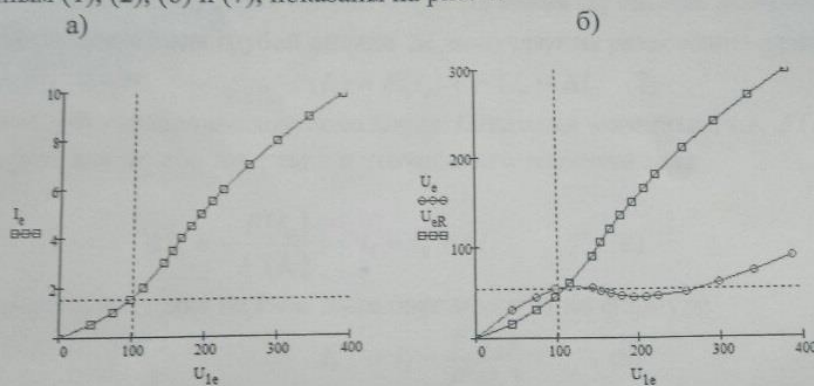


Рис.4. Входная характеристика – а) и выходные характеристики четырехполюсника – б)

Рабочий режим НР при входном напряжении  $U_{1e} = E_x = 100$  определяется графически, как показано на рис.4:  $I = 1.5$ ,  $U_2 = 55$ ,  $U_{Rl} = 45$ .

## 3. Определение рабочей точки с помощью внешней характеристики источника и ВАХ НР

Рабочая точка НР может быть определена как точка пересечения внешней характеристики эквивалентного источника и вольтамперной характеристики нелинейного резистора в соответствии с выражением:  $E_x - R_l I = U(I)$ . Схема определения РТ ( $U_2 = 54$ ,  $I = 1.45$ ) для случая  $E = 100$  и  $R_l = 30$  приведена на рис. 4. При уменьшении сопротивления источника до значения  $R_l = 12$  (пунктирная линия) рабочая точка переходит с возрастающего участка ВАХ на спадающий участок.

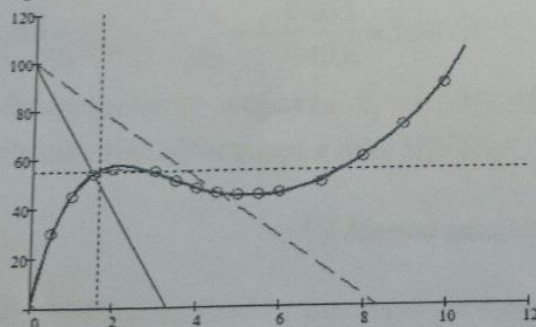


Рис.4. Графическое определение координат рабочей точки.

#### 4. Определение рабочей точки с помощью решения нелинейного уравнения

Экспериментальная характеристика НР может быть аппроксимирована полиномом

$$U(I) = a_0 I + a_1 I^2 + a_2 I^3 + a_3 I^4 + a_4 I^5 \quad (5)$$

где  $a_0 = 70.1$ ,  $a_1 = -29.8$ ,  $a_2 = 5.31$ ,  $a_3 = -0.426$ ,  $a_4 = 0.013$

График этой зависимости показан на рис.4. Рабочий ток находится из решения нелинейного уравнения

$$F(I) = E_s - IR_l - U(I) = 0 \quad (6)$$

В электротехнических расчетах для решения нелинейных уравнений широко используется итерационный метод и метод Ньютона-Рафсона

##### 4.1 Метод Ньютона-Рафсона

Численное решение нелинейного уравнения  $F(I) = 0$  находится в два приема. Сначала делают грубую оценку корней и затем уточняют их значение на основе принятого алгоритма. Для получения нулевого приближения  $I_0$  обычно используют графический метод. Поправку для грубой оценки  $\Delta I_0$  получают из разложения функции в ряд Тейлора

$$F(I_1) \approx F(I_0) + F'(I_0) \cdot \Delta I_0 \quad (7)$$

Считая, что уточненное значение корня  $I_1$  является истинным, т.е.  $F(I_1) = 0$ , получим формулы для первой поправки и уточненного значения тока

$$\Delta I_0 = -\frac{F(I_0)}{F'(I_0)} \quad I_1 = I_0 + \Delta I_0 \quad (8)$$

Уточненное значение на  $k$ -ом шаге определяется по формуле

$$I_{k+1} = I_k - \frac{F(I_k)}{F'(I_k)} \quad (9)$$

Расчет производится до получения пренебрежимо малого значения поправки. Для рассматриваемого примера имеем

$$F(I) = 100 - 100.1 \cdot I + 29.8I^2 - 5.31I^3 + 0.426I^4 - 0.013I^5 \quad (10)$$

$$F'(I) = -100.1 + 59.61I - 15.93I^2 + 1.7I^3 - 0.066I^4 \quad (11)$$

В качестве нулевого приближения примем значение тока  $I_0 = 1.45$ , полученное графоаналитическим методом в разделе 2. Определим поправку и уточненное значение тока

$$\Delta I_0 = -\frac{F(1.45)}{F'(1.45)} = -\frac{3.12}{-42.27} = 0.0738, \quad \delta I_0 = \frac{\Delta I_0}{I_0} \cdot 100 = 5.1\%, \quad I_1 = 1.524$$

На следующем шаге уточнения имеем

$$\Delta I_1 = -\frac{F(1.524)}{F'(1.524)} = -\frac{0.055}{-40.6} = 1.34 \cdot 10^{-3}, \quad \delta I_1 = \frac{\Delta I_1}{I_1} \cdot 100 = 0.09\%, \quad I_2 = 1.525$$

Ввиду малости поправки  $\delta I_1 = 0.09\%$  оценку  $I_2 = 1.525$  можно принять за точное значение. Находим напряжение НР:  $U_2(1.525) = 54.25$

##### 4.2. Метод итераций

В методе итераций нелинейное уравнение  $F(I)$  представляют в виде

$$F(I) = 0 \rightarrow I = G(I) \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что

$$G(I) = 0.999 + 0.298I^2 - 0.053I^3 + 4.26 \cdot 10^{-3}I^4 - 1.32 \cdot 10^{-4}I^5 \quad (13)$$

Приближенное значение корня  $I_0$  подставляют в правую часть уравнения (13) и полученное значение  $I_1 = G(I_0)$  принимают за уточненное значение. Процесс повторяется в соответствии с алгоритмом

$$I_{k+1} = G(I_k), \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \quad (14)$$

В качестве нулевого приближения примем значение тока  $I_0 = 1.5$ . Итерационная процедура имеет вид

$$I_1 = G(1.5) = 1.51, \quad I_2 = G(1.51) = 1.516, \quad I_3 = G(1.516) = 1.52, \quad I_4(1.52) = 1.522$$

$$I_5 = G(1.522) = 1.523 \quad I_6 = G(1.523) = 1.524 \quad I_7 = G(1.524) = 1.525$$

Из сравнения методов следует, что метод Ньютона-Рафсона имеет более высокую сходимость.

### 5. Статическое и динамическое сопротивление..

Статическое сопротивление  $R_s$  нелинейного резистора определяется как отношение напряжения к току

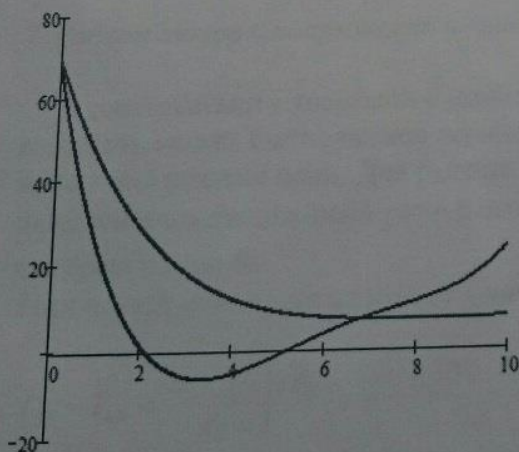
$$R_s(I) = \frac{U(I)}{I} = 70.1 - 29.8I + 5.31I^2 - 0.426I^3 + 0.013I^4 \quad (15)$$

Динамическое сопротивление  $R_d$  определяется как отношение приращений напряжения и тока в окрестности рабочей точки

$$R_d(I) = \frac{dU}{dI} = 70.1 - 59.61I + 15.93I^2 - 1.704I^3 + 0.066I^4 \quad (16)$$

Графики статического и динамического сопротивления показаны на рис.5. Статическое сопротивление определяется тангенсом угла наклона прямой, соединяющей начало координат с рабочей точкой, динамическое сопротивление - тангенсом угла наклона касательной к ВАХ в рабочей точке (рис 5-б). На выпуклом участке ВАХ динамическое сопротивление падает, на вогнутом участке возрастает с ростом тока. В точках максимума и минимума немонотонной характеристики динамическое сопротивление равно нулю, на спадающем участке величина  $R_d$  отрицательна.

а)



б)

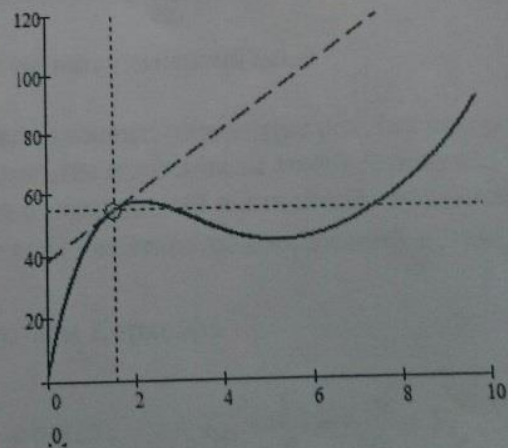


Рис.5. Статическое  $R_s(I)$  и динамическое сопротивление  $R_d(I)$  - а) нелинейного элемента с вольтамперной характеристикой  $U(I)$  - б)

### 6. Линеаризация ВАХ НР в окрестности рабочей точки.

Для расчета режима НР в окрестности рабочей точки используют линейную схему замещения нелинейного элемента, параметры которой вытекают из формулы для ряда Тейлора, в который характеристика  $U(I)$  разлагается вблизи рабочей точки  $(U_a, I_a)$

$$U_l(I) = U_a + R_d(I_a) \cdot (I - I_a) = E_d(I_a) + R_d(I_a) \cdot I, \quad (17)$$

$$E_d(I_a) = U_a - R_d(I_a) \cdot I_a \quad (18)$$

Здесь  $E_d(I_a) = U_l(0)$  - точка пересечения касательной  $U_l(I)$  с осью ординат.

Уравнение (17) можно рассматривать как уравнение ветви с источником напряжения  $E_d(I_a)$  и сопротивлением  $R_d(I)$ . Для рассматриваемого примера имеем

$$U_a = 54.25, \quad I_a = 1.525, \quad R_d(I_a) = 10.57, \quad E_d(I_a) = 38.12.$$

Этим параметрам соответствует пунктирная линия, показанная на рис.5-6.

$$U_l(I) = 38.12 + 10.57I$$

Схема замещения нелинейного резистора для небольших отклонений от рабочей точки показана на рис.7.

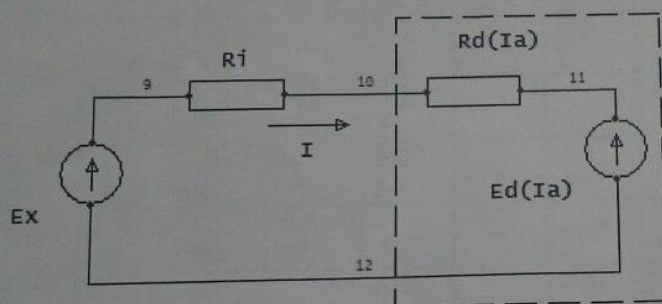


Рис.7. Схема замещения нелинейного резистора для расчета режима в окрестности рабочей точки

В точке экстремума динамическое сопротивление равно нулю  $R_d = 0$ , и схема замещения содержит только источник напряжения  $E_d(I_a) = U_a$ . Линейные схемы замещения используются для оценки устойчивости нелинейных цепей, при расчете режима переменного тока электронных усилителей и т.п.

### 7. Расчет токов и напряжений в линейной части нелинейной цепи

В соответствии с теоремой о компенсации элемент, параметры режима которого известны, может быть заменен компенсационным источником тока/напряжения без изменения режима цепи. Для расчета токов и напряжений в линейной части нелинейной цепи заменим нелинейный резистор известным источником напряжения  $E_c = U_a$ , как показано на рис.8.

Токи ветвей находятся по закону Ома и законам Кирхгофа

$$I_{R3} = I_{R4} = \frac{E_1 + E_2 - E_c}{R_3 + R_4} = \frac{100 + 150 - 54.25}{30} = 6.525, \quad I_{R2} = \frac{E_2}{R_2} = \frac{150}{50} = 3,$$

$$I_{E2} = I_{R3} + I_{R2} = 6.525 + 3 = 9.525, \quad I_{E1} = I_{R3} - J_1 = 6.525 - 5 = 1.525, \quad U_{J1} = E_1 - E_c = 45.75.$$

Результаты расчета совпадают с показаниями приборов схемы, показанной на рис. 8.

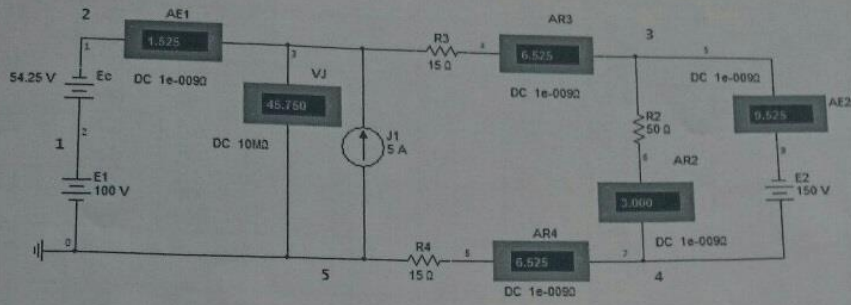


Рис.8. Расчетная схема токов в линейной части нелинейной цепи

### Варианты заданий

Таблица вариантов

№	E1	E2	E3	J1	J2	R1	R2	R3	R4	R5	NR
1	1-2 100	1-4 100		5-1 10		2-3 2	1-5 10	4-5 5	3-4 2		3-1
2	1-2 120	4-2 20		6-5 5			4-3 3	5-6 4	3-5 1	2-6 1	3-1
3	1-2 100	4-5 50		5-3 5		1-3 4	4-5 25	3-4 10	2-5 2		2-3
4	1-2 50	4-2 200	6-5 50				3-4 5	5-6 20	3-5 10	2-6 10	1-3
5	1-2 70	4-5 200		6-5 5		1-3 6	3-4 10	5-6 10	2-6 10		2-3
6	1-2 116	5-4 100	5-6 36				3-4 12	5-6 36	1-6 12	1-3 8	2-3
7	1-2 200	7-2 50		4-6 50		1-3 10	6-7 1	4-5 20	4-6 1	2-3 10	3-4
8	1-2 100	4-5 100		3-5 5			4-5 50	1-3 10	3-4 20	1-5 20	2-3
9	1-2 100	3-2 200		5-4 10		1-2 50	3-4 18	4-5 10	5-1 8		4-1
10	1-2 100	5-6 200		4-6 10		1-3 20	4-5 10	3-4 5	2-6 5		2-3
11	1-2 180	6-5 100	7-2 100			1-3 6	6-7 10	4-5 1	2-3 30	5-7 10	3-4
12	1-2 280			3-5 5	4-2 10	1-3 12	3-5 12	2-4 14	4-5 10		2-5
13	1-2 100	3-4 180		6-5 15		4-6 1	1-3 24	5-6 4	1-4 12		2-5
14	1-2 80	3-4 60	5-6 60			2-3 16	3-6 30	4-5 30	4-6 10	3-7 16	6-7
15	1-2 150	4-2 150	6-7 100			1-3 10	4-3 15	5-6 10	5-7 10	1-2 4	3-5
16	1-2 200	4-1 150		5-6 10		2-3 10	3-4 15	3-6 8	1-5 2		5-6
17	1-2	5-4		6-3		2-3	3-4	1-3	5-6	5-6	1-6

