

Метод контурных токов (МКТ) и метод узловых напряжений (МУН).

Цель работы. Усвоение таких понятий методов как контурная эдс, контурное сопротивление, взаимное сопротивление контуров, узловой ток, собственная проводимость узла, взаимная проводимость узлов. Выработка навыков составления уравнений, применения эквивалентных преобразований ветвей с идеальными источниками тока в МКТ и ветвей с идеальными источниками напряжения в МУН для записи уравнений в матричной форме.

1. Основные положения методов.

1.1. Метод контурных токов

Число уравнений, составленных по законам Кирхгофа, равно числу ветвей с неизвестными токами n_b . Для уменьшения числа уравнений в качестве переменных цепи используют другие величины – контурные токи и узловые напряжения или узловые потенциалы.

Метод контурных токов (МКТ) основан на использовании уравнений равновесия напряжений в контурах, в которых протекают независимые друг от друга контурные токи.

Рассмотрим суть метода на примере цепи простой структуры, схема которой приведена на рисунке 1. Цепь состоит из трех ветвей с неизвестными токами $n_b = 3$, двух узлов $n_n = 2$ и двух независимых контуров $n_c = 2$.

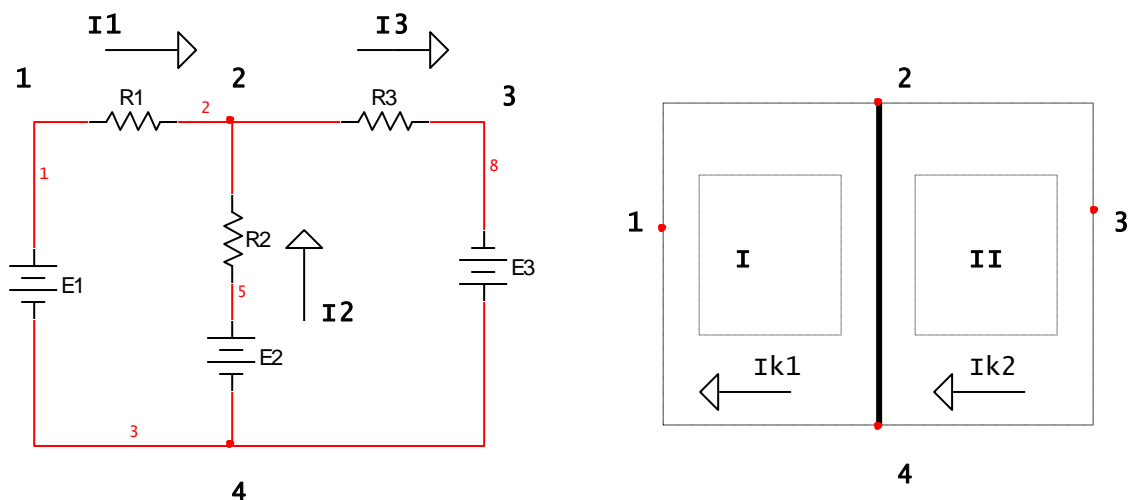


Рис.5.1. Токи ветвей – а) и контурные токи–б) в цепи простой структуры.

Используя законы Кирхгофа для токов и напряжений, запишем уравнения относительно неизвестных токов I_1, I_2, I_3

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 = E_1 - E_2 \quad (2)$$

$$I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = E_2 + E_3 \quad (3)$$

Введем в рассмотрение вспомогательные расчетные величины – контурные токи I_{k1}, I_{k2} , направления которых в независимых контурах показано на рис 5.1. пунктирными линиями. Выразим токи ветвей через контурные токи

$$I_1 = I_{k1}, \quad I_2 = I_{k2} - I_{k1}, \quad I_3 = I_{k2} \quad (4)$$

После подстановки этих соотношений в уравнения (5.2) и (5.3) получим уравнения относительно контурных токов. Запишем эти уравнения с учетом обозначений, используемых в методе контурных токов

$$R_{11} \cdot I_{k1} + R_{12} \cdot I_{k2} = E_{k1} \quad (5)$$

$$R_{21} \cdot I_{k1} + R_{22} \cdot I_{k2} = E_{k2} \quad (6)$$

Здесь $R_{11} = R_1 + R_2$ и $R_{22} = R_2 + R_3$ - собственные сопротивления контуров 1 и 2, $R_{12} = R_{21} = -R_2$ - взаимное сопротивление контуров 1 и 2, знак «-» учитывает встречные направления контурных токов I_{k1}, I_{k2} в ветви сопротивлением R_2 , $E_{k1} = E_1 - E_2$ и $E_{k2} = E_2 + E_3$ - контурные эдс.

Контурная эдс определяется как алгебраическая сумма эдс источников, входящих в контур. Если направление эдс совпадает с направлением обхода контура, то она записывается в правой части уравнений со знаком «+», в противном случае – со знаком «-». Запишем контурные уравнения в матричном виде

$$R_k \cdot I_k = E_k \quad (7)$$

Здесь $I_k = [I_{k1} \ I_{k2}]^T$ - вектор столбец контурных токов, $E_k = [E_{k1} \ E_{k2}]^T$ - вектор столбец контурных ЭДС, R_k - квадратная матрица контурных сопротивлений

$$R_k = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

Число уравнений для контурных токов n_k равно числу независимых контуров

$$n_k = n_b - (n_n - 1),$$

где n_b - число ветвей с неизвестными токами, n_n - число узлов.

Для рассматриваемого примера число уравнений $n_k = 2$ на единицу меньше числа уравнений $n_b = 3$, составленных по законам Кирхгофа. После решения системы уравнений

$$I_k = R_k^{-1} \cdot E_k \quad (8)$$

токи ветвей вычисляются по формулам (4).

При увеличении числа независимых контуров структура уравнений сохраняется. Для цепи, граф которой показан на рис. 2, можно записать

$$R_k = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ 0 & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & 0 & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \quad E_k = \begin{bmatrix} E_{k1} \\ E_{k2} \\ E_{k3} \\ E_{k4} \end{bmatrix}$$

Ноль в матрице R_k означает отсутствие общего сопротивления связи контуров 1 и 3, 2 и 4.

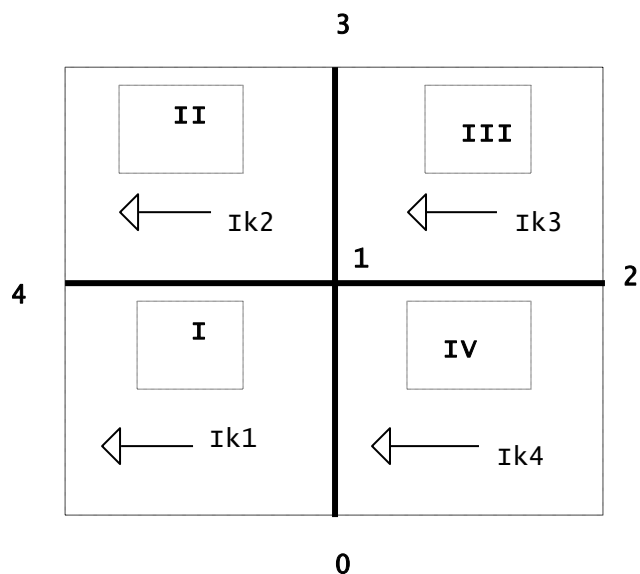


Рис.2. Граф цепи с 4-я независимыми контурами.

Составление контурных уравнений цепи ячеистой структуры сводится к записи симметричной матрицы контурных параметров R_k и вектора контурных эдс E_k . Составляющие контурных эдс равны алгебраическим суммам эдс источников, входящих в соответствующие контуры

При наличии в цепи ветви с идеальным источником тока J (рис.3а) используют дополнительный контур, контурный ток которого I_k' равен току независимого источника тока $I_k' = J$. Падения напряжений, вызванные протеканием этого тока по сопротивлениям связи, являются известными величинами, их можно перенести в правую часть уравнений и учесть как источники. Для приведения цепи к ячеистой структуре (см. рис1б, рис 2.) используют такое преобразование цепи как « расщепление источника тока » с последующим преобразованием источника тока в источник напряжения. Иллюстрация такого преобразования приведена на рис. 3б и 3в.

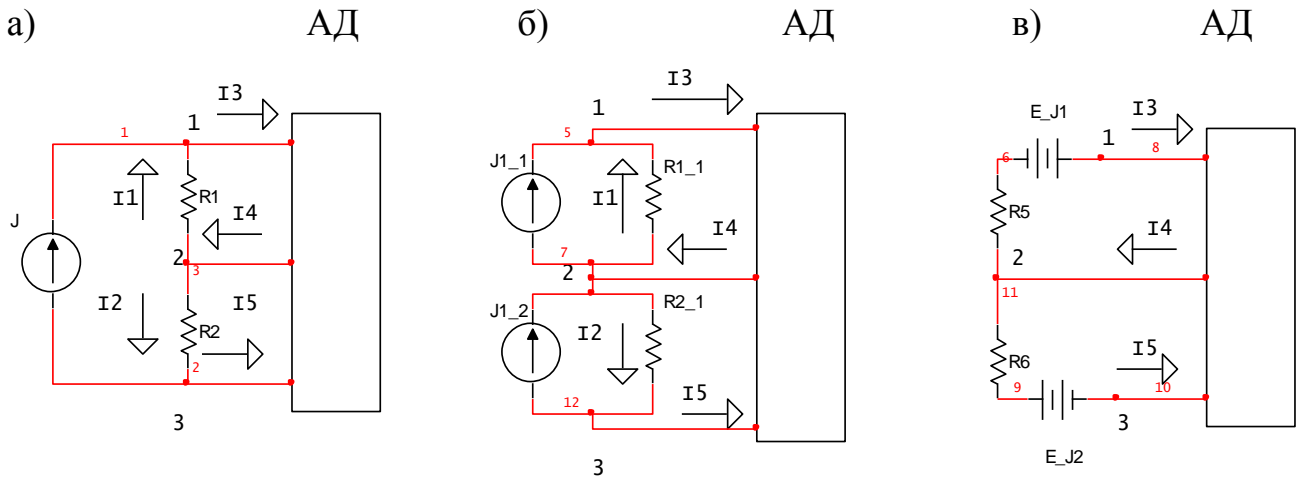


Рис. 3. Расщепление ветви с источником тока J

При расщеплении источника тока J равновесие токов в узлах 1, 2, и 3 не нарушается

$$-J - I_1 + I_3 = 0 \quad -I_4 + J - J + I_2 + I_1 = 0 \quad I_5 + J - I_2 = 0$$

После решения системы контурных уравнений и нахождения токов I_3, I_4, I_5 токи I_1, I_2 определяются по закону Кирхгофа

$$I_1 = -J + I_3 \quad I_2 = I_5 + J.$$

5.1.2 Метод узловых напряжений/потенциалов

Метод узловых напряжений (МУН) основан на первом законе Кирхгофа и уравнениях ветвей. Рассмотрим часть цепи, граф которой показан на рис. 2.

Состав ветвей, соединяющих узел 1 с узлами 0, 2, 3, 4, показан на рис. 4.

а)

б)

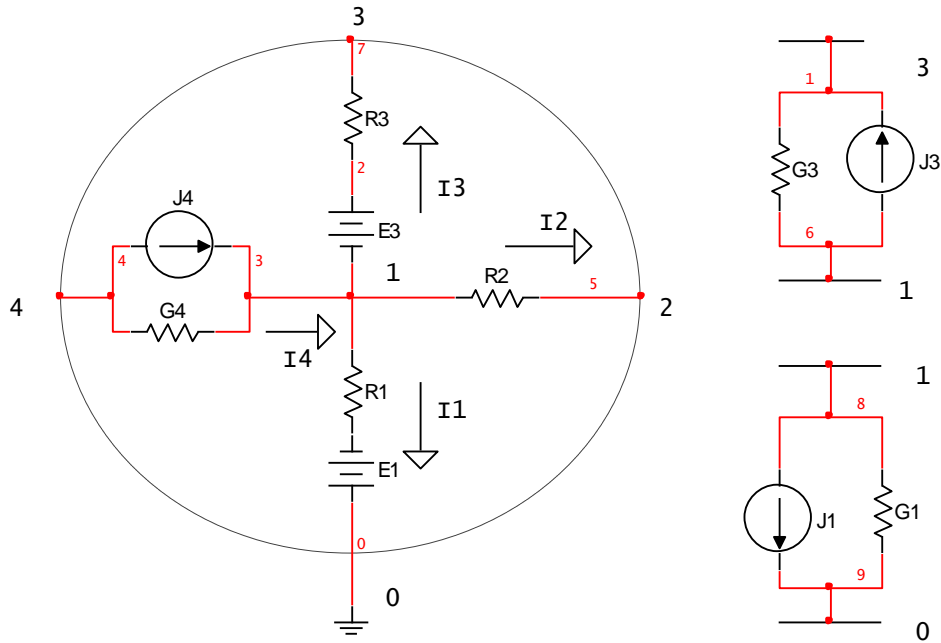


Рис.4. Участок сложной цепи –а) и схемы ветвей 1 и 3 после преобразования источников

напряжения E_1, R_1 и E_3, R_3 в источники тока J_1, G_1 и J_3, G_3 –б)

Запишем 1-ый закон Кирхгофа для узла 1

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0. \quad (9)$$

Напряжения узлов будем отсчитывать относительно базового узла 0, потенциал которого равен нулю $\varphi_0 = 0$. Положительная полярность напряжения ветви согласовано с положительным направлением тока. Запишем уравнения ветвей и выразим токи ветвей через потенциалы узлов

$$U_1 = \varphi_1 = I_1 \cdot R_1 - E_1, \quad I_1 = G_1 \cdot \varphi_1 + J_1, \quad J_1 = E_1 \cdot G_1 \quad (10)$$

$$U_2 = \varphi_1 - \varphi_2 = I_2 \cdot R_2 \quad I_2 = G_2 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (11)$$

$$U_3 = \varphi_1 - \varphi_3 = I_3 \cdot R_3 - E_3 \quad I_3 = J_3 + G_3 \cdot (\varphi_1 - \varphi_3) \quad J_3 = G_3 \cdot E_3 \quad (12)$$

$$U_4 = R_4 \cdot (I_4 - J_4) \quad I_4 = (\varphi_4 - \varphi_1) \cdot G_4 + J_4 \quad (13)$$

Уравнениям для токов I_1, I_3 соответствуют расчетные схемы, показанные на рис. 9б, на котором $J_1 = E_1 \cdot G_1$ и $J_3 = G_3 \cdot E_3$.

После подстановки выражений (10)-13) в формулу (9) и приведения подобных членов получим уравнение

$$\varphi_1 \cdot (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) - \varphi_2 \cdot G_2 - \varphi_3 \cdot G_3 - \varphi_4 \cdot G_4 = J_4 - G_1 \cdot E_1 - G_3 \cdot E_3 \quad (14)$$

Запишем формулу (14) в другом виде, используя обозначения, принятые в методе узловых напряжений,

$$\varphi_1 \cdot G_{11} + \varphi_2 \cdot G_{12} + \varphi_3 \cdot G_{13} + \varphi_4 \cdot G_{14} = J_{y1} \quad (15)$$

Собственная проводимость узла 1

$$G_{11} = G_1 + G_2 + G_3$$

есть сумма проводимостей ветвей, присоединенных к этому узлу.

Взаимные проводимости узлов 1-2, 1-3 и 1-4

$$G_{12} = -G_2, \quad G_{13} = -G_3, \quad G_{14} = -G_4$$

являются проводимостями ветвей, соединяющие смежные ветви, взятые с обратным знаком.

Узловой ток

$$J_{y1} = J_4 - E_1 \cdot G_1 - E_3 \cdot G_3$$

равен алгебраической сумме токов источников в узле 1. Знак «плюс» берется для токов источников, направленных к узлу, знак «минус» – для источников, ток которых направлен от узла.

Для остальных узлов структура уравнения имеет такой же вид. Запишем систему узловых уравнений для цепи, граф которой показан на рис. 2.

$$G_y \cdot \varphi = J_y \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & 0 & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{y1} \\ J_{y2} \\ J_{y3} \\ J_4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Здесь G_y – матрица узловых проводимостей, φ – вектор узловых напряжений,

J_y –вектор узловых токов. Взаимные проводимости G_{24}, G_{42} равны нулю, поскольку узлы 2 и 4 не являются смежными.

Общее число узловых уравнений равно числу независимых узлов или числу ветвей дерева ориентированного графа, которые показаны на рис.2 сплошными линиями,

$$N_{\text{узн}} = n_y - 1 \quad (17)$$

Решение уравнений представим в матричном виде

$$\varphi = G_y^{-1} \cdot J_y \quad (18)$$

Токи вычисляются с помощью уравнений ветвей, например по формулам (10), (11), (12).

Для важного случая двух узловой схемы имеем

$$\varphi_1 = \frac{\sum_{k=1}^p \pm E_k \cdot G_k \pm \sum_{f=1}^r J_f}{\sum_{k=1}^{p+r} G_k} \quad (19)$$

Составление уравнений, как и в случае МКТ, сводится к вычислению элементов матрицы узловых проводимостей G_y и вектора узловых токов J_y по расчетной схеме цепи, в которой источники напряжений ветвей E_k, R_k преобразованы в источники тока J_k, G_k , где $J_k = E_k \cdot G_k, G_k = 1/R_k$.

Если в схеме имеется ветвь с идеальным источником напряжения $E_d, R_d = 0$, то преобразование ИИН \rightarrow ИИТ становится невозможным в силу того, что $G_d \rightarrow \infty$. В этом случае используют эквивалентное преобразование цепи путем переноса источника напряжения в смежные ветви как показано на рис.5.

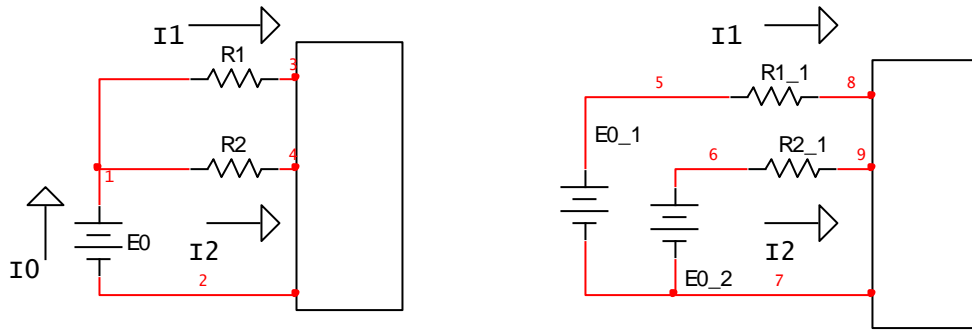


Рис.5. Расщепление идеального источника напряжения

При расщеплении источника напряжения токи I_1, I_2 в ветвях с сопротивлениями R_1, R_2 не изменятся. После нахождения токов преобразованной схемы ток источника определяется по закону Кирхгофа $I_0 = I_1 + I_2$.

2. Задание.

1. Преобразовать цепь для матричной записи контурных и узловых уравнений.
2. Составить и решить контурные и узловые уравнения.
3. По контурным токам и узловым напряжениям найти токи ветвей.
4. Проверить баланс мощности цепи.

3. Пример решения.

Структура цепи и параметры элементов заданы в таблице 1.

Таблица 1.

Структура и параметры цепи

№ варианта	Значение параметра и номера узлов элемента							
	R_1 , Ом	R_2 , Ом	E_3 , В	J_4 , А	E_5 , В	R_6 , Ом	R_7 , Ом	J_8 , А
41	8 1-5	8 1-2	16 2-4	1 1-3	16 3-4	8 3-5	8 4-5	1 5-4

Схема цепи, построенная по данным таблицы 1, показана на рис.6.

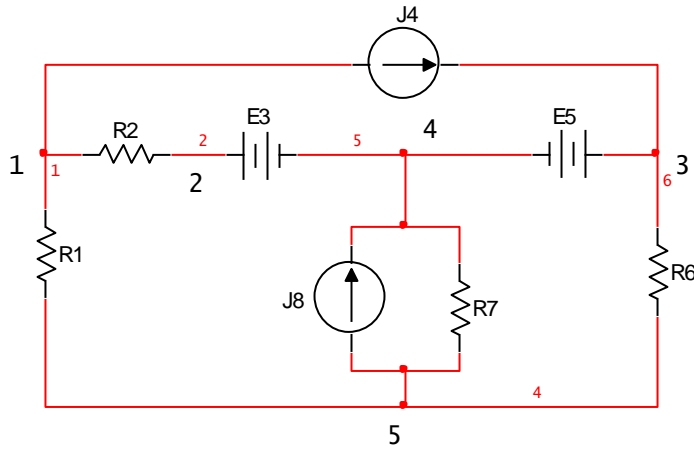


Рис.6. Схема цепи.

3.1. Метод контурных токов.

Для представления цепи в виде простой ячеистой структуры выполним расщепление идеального источника тока J_4 путем параллельного подключения источника J_4 к ветвям с элементами R_2 , E_3 и E_5 .

Параллельные ветви источников тока и сопротивлений J_4 , R_2 и J_8 , R_7 преобразуются в последовательное соединение источников напряжения E_{J_4} , E_{J_8} и соответствующих сопротивлений R_2 , R_7 как показано на рис.7.

$$E_{J_4} = J_4 \cdot R_4 = 8 \quad E_{J_8} = J_8 \cdot R_7 = 8$$

При таком преобразовании токи I_1 , I_6 остаются неизменными.

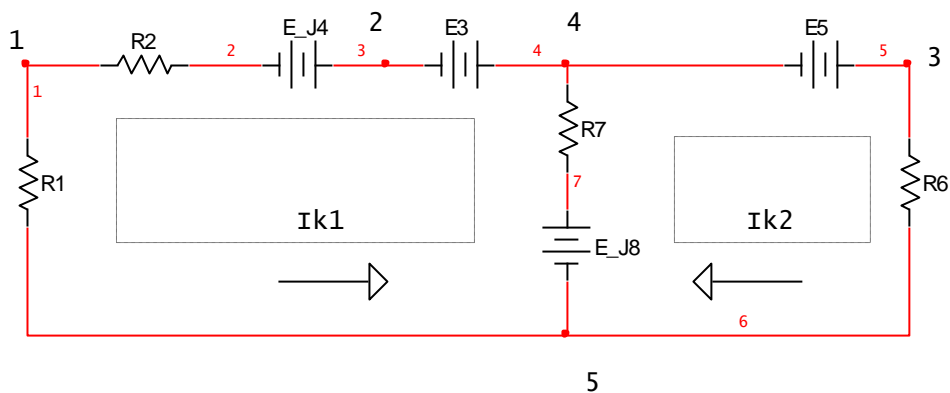


Рис. 8. Расчетная схема цепи

Источники тока J_4 , включенные параллельно источникам напряжения E_3 и E_5 в расчетной схеме (рис. 8) не учитываются, поскольку эти источники, замыкаясь через источники напряжений, не влияют на токи I_1 и I_6 .

Используя расчетную схему цепи, запишем элементы контурной матрицы и вектора контурной ЭДС

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_7 = 8 + 8 + 8 = 24 \quad R_{12} = R_{21} = 8 \quad R_{22} = R_6 + R_7 = 8 + 8 = 16$$

$$E_{k1} = E_3 - J_4 \cdot R_2 + J_8 \cdot R_7 = 16 - 8 + 8 = 16 \quad E_{k2} = E_5 + J_8 \cdot R_7 = 16 + 8 = 24$$

Решение системы уравнений

$$\begin{bmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

имеет вид $I_{k1} = 0.2$, $I_{k2} = 1.4$. Находим токи ветвей исходной схемы, показанной на рис.6.

$$I_1 = I_{k1} = 0.2 \quad I_6 = I_{k2} = 1.4 \quad I_2 = I_3 = I_1 + J_4 = 0.2 + 1 = 1.2$$

$$I_5 = I_6 - J_4 = 1.4 - 1 = 0.4 \quad I_7 = I_{k1} + I_{k2} - J_8 = 0.2 + 1.4 - 1 = 0.6$$

Как видно из рисунка 9, результаты расчета совпадают с результатами измерений.

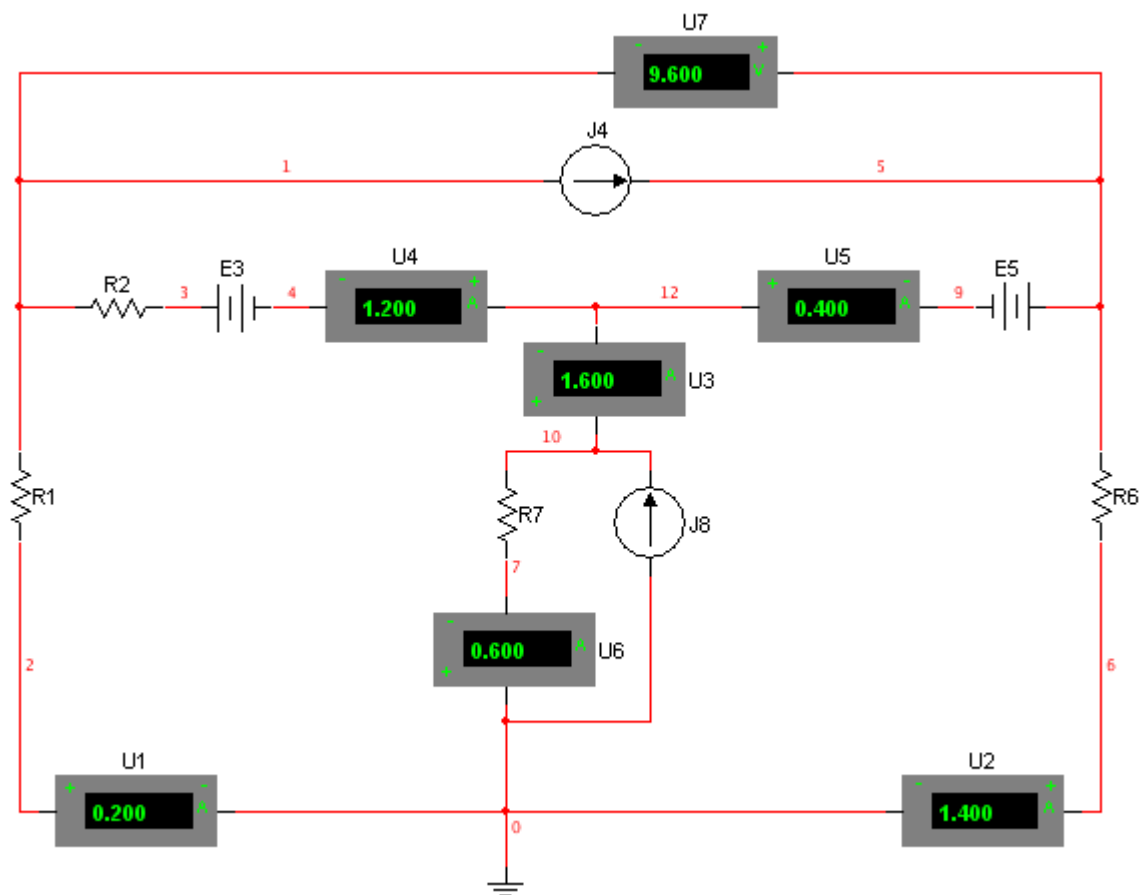


Рис.9. Результаты измерений токов цепи.

3.2. Метод узловых напряжений.

Для записи узловых уравнений в матричном виде исключим ветвь с источником напряжения E_5 путем переноса этого источника в смежные ветви как показано на рисунке 10. Источник E_5 в ветви с источником тока J_4 на расчетной схеме не показан, поскольку такое включение источника E_5 не влияет на распределение токов в цепи.

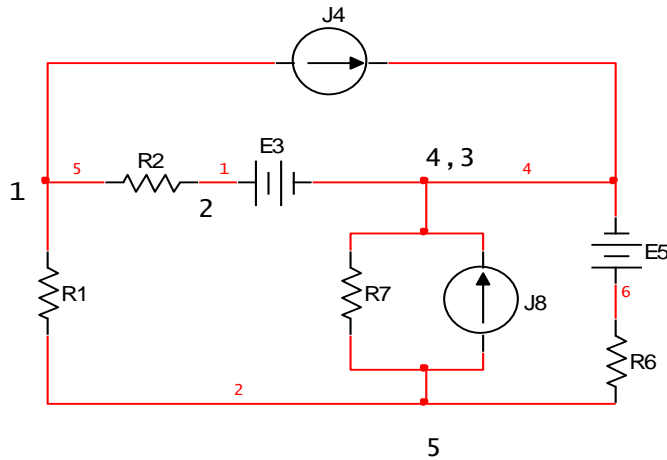


Рис.10.Расчетная схема цепи методом узловых напряжений.

В качестве базового узла примем узел 5. Запишем элементы узловой матрицы G_y и вектора узловых токов J_y , используя расчетную схему на рис.10..

$$G_{11} = G_1 + G_2 = \frac{1}{4} \quad G_{33} = G_2 + G_6 + G_7 = \frac{3}{8} \quad G_{13} = G_{31} = -G_2 = -\frac{1}{8}$$

$$J_{y1} = E_3 \cdot G_3 - J_4 = \frac{16}{8} - 1 = 1 \quad J_{y3} = J_4 + J_8 - E_5 \cdot G_6 - E_3 \cdot G_2 = 1 + 1 - \frac{16}{8} - \frac{16}{8} = -2.$$

Запишем узловые уравнения в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 0.25 & -0.125 \\ -0.125 & 0.375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Решение системы узловых уравнений: $\varphi_1 = 1.6$, $\varphi_3 = -4.8$.

Токи находят из уравнений ветвей

$$I_2 R_2 - E_3 = \varphi_3 - \varphi_1 \quad I_2 = G_2 \cdot [(\varphi_3 - \varphi_1) + E_3] = \frac{-4.8 - 1.6 + 16}{8} = 1.2$$

$$I_6 \cdot R_6 - E_5 = \varphi_3 - \varphi_5 \quad I_6 = G_6 \cdot [(\varphi_3 - \varphi_5) + E_5] = \frac{-4.8 - 0 + 16}{8} = 1.4$$

$$I_1 = G_1(\varphi_1 - \varphi_5) = \frac{1.6}{8} = 0.2 \quad I_7 = G_7 \cdot (\varphi_5 - \varphi_3) = \frac{0 - (-4.8)}{8} = 0.6$$

Ток ветви с источником E_5 (рис.6) находится по закону Кирхгофа

$$I_5 = I_6 - J_4 = 1.4 - 1 = 0.4$$

Полученные результаты совпадают с результатами расчета методом контурных токов и результатами измерений, представленными на рисунке 11.

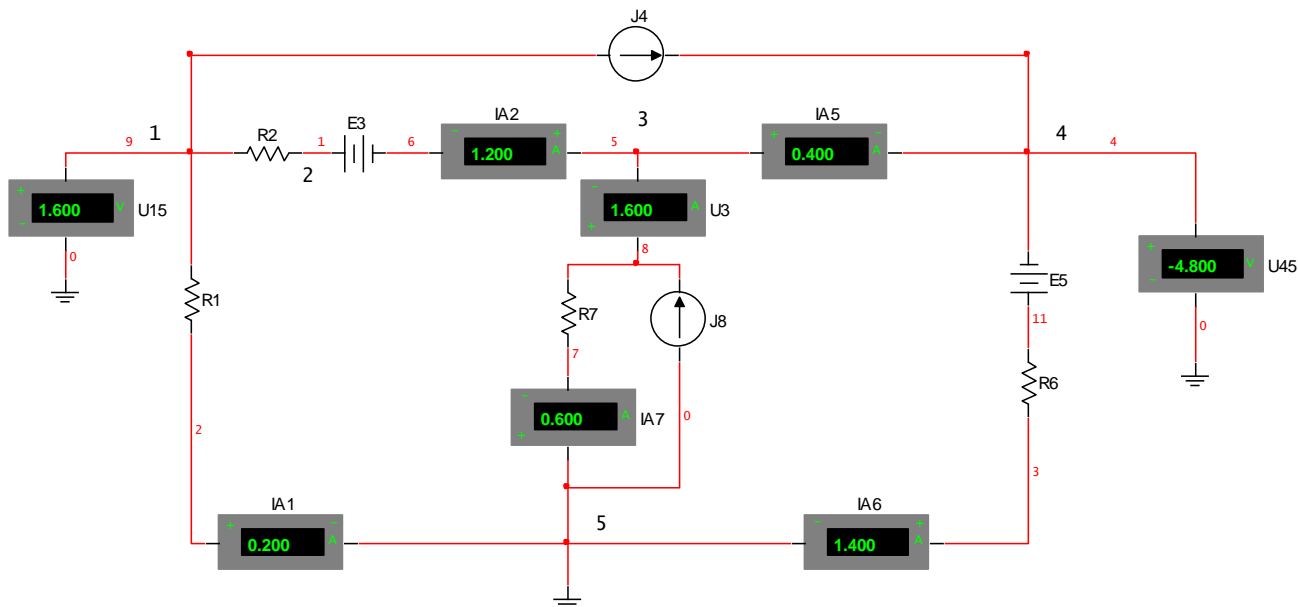


Рис.11. Результаты измерений токов и узловых напряжений преобразованной цепи.

Таблица №1.3

Варианты заданий

№ вар.	Значение параметра и номера узлов элемента								
	1	2	3	4	5	6	7	8	m
1	$E_1 = 35B,$ 1-4	$R_2 = 50\Omega,$ 1-2	$E_3 = 5B,$ 2-4	$J_4 = 2A,$ 1-3	$R_5 = 50\Omega,$ 3-5	$R_6 = 50\Omega,$ 3-4	$J_7 = 2A,$ 5-4	$R_8 = 50\Omega,$ 4-5	2,5
2	$J_1 = 1A,$ 1-4	$R_2 = 40\Omega,$ 1-4	$R_3 = 40\Omega,$ 1-2	$E_4 = 4B,$ 2-4	$R_5 = 40\Omega,$ 2-3	$R_6 = 40\Omega,$ 3-5	$J_7 = 1A,$ 1-3	$E_8 = 4B,$ 4-5	2
3	$R_1 = 100\Omega,$ 1-5	$R_2 = 100\Omega,$ 1-2	$E_3 = 5B,$ 2-4	$J_4 = 1A,$ 1-3	$R_5 = 100\Omega,$ 3-5	$J_6 = 1A,$ 5-3	$R_7 = 100\Omega,$ 3-4	$E_8 = 5B,$ 4-5	5
4	$E_1 = 6B,$ 1-5	$R_2 = 60\Omega,$ 1-2	$E_3 = 6B,$ 4-2	$R_4 = 60\Omega,$ 1-3	$R_5 = 60\Omega,$ 3-5	$J_6 = 2A,$ 3-4	$R_7 = 60\Omega,$ 4-5	$J_8 = 2A,$ 4-5	3
5	$R_1 = 100\Omega,$ 1-4	$J_2 = 2A,$ 1-4	$R_3 = 100\Omega,$ 1-2	$J_4 = 2A,$ 1-5	$J_5 = 2A,$ 3-2	$R_6 = 100\Omega,$ 3-4	$E_7 = 10B,$ 3-5	$R_8 = 100\Omega,$ 4-5	5

6	$R_1 = 80M,$ 1-4	$R_2 = 80M,$ 1-3	$J_3 = 1A,$ 1-3	$R_4 = 80M,$ 1-2	$E_5 = 8B,$ 3-4	$E_6 = 8B,$ 2-5	$J_7 = 1A,$ 3-5	$R_8 = 80M,$ 4-5	4
7	$J_1 = 1A,$ 5-1	$J_2 = 1A,$ 1-4	$R_3 = 120M,$ 1-4	$E_4 = 6B,$ 1-2	$R_5 = 120M,$ 2-3	$E_6 = 6B,$ 4-3	$R_7 = 120M,$ 2-5	$R_8 = 120M,$ 4-5	6
8	$R_1 = 200M,$ 1-5	$E_2 = 40B,$ 1-4	$R_3 = 200M,$ 1-2	$E_4 = 40B,$ 3-2	$R_5 = 200M,$ 3-5	$J_6 = 2A,$ 3-4	$R_7 = 200M,$ 4-5	$J_8 = 2A,$ 5-4	10
9	$J_1 = 2A,$ 1-5	$R_2 = 100M,$ 1-5	$J_3 = 2A,$ 1-4	$E_4 = 10B,$ 1-2	$R_5 = 100M,$ 2-4	$R_6 = 100M,$ 2-3	$E_7 = 10B,$ 5-3	$R_8 = 100M,$ 4-5	5
10	$R_1 = 80M,$ 1-4	$R_2 = 80M,$ 1-2	$E_3 = 8B,$ 1-3	$J_4 = 1A,$ 2-3	$R_5 = 80M,$ 2-3	$R_6 = 80M,$ 2-5	$E_7 = 8B,$ 4-5	$J_8 = 1A,$ 3-5	4
11	$R_1 = 60M,$ 1-5	$R_2 = 60M,$ 1-3	$J_3 = 1A,$ 1-2	$J_4 = 1A,$ 5-2	$R_5 = 50M,$ 2-5	$E_6 = 6B,$ 2-3	$R_7 = 60M,$ 3-4	$E_8 = 6B,$ 5-4	3
12	$E_1 = 12B,$ 1-5	$R_2 = 120M,$ 1-4	$J_3 = 2A,$ 1-2	$R_4 = 120M,$ 1-2	$J_5 = 2A,$ 2-5	$R_6 = 120M,$ 2-3	$E_7 = 12B,$ 3-4	$R_8 = 120M,$ 4-5	6
13	$R_1 = 40M,$ 1-5	$J_2 = 2A,$ 4-1	$R_3 = 40M,$ 1-4	$R_4 = 40M,$ 1-2	$E_5 = 4B,$ 2-3	$J_6 = 2A,$ 3-4	$E_7 = 4B,$ 5-3	$R_8 = 40M,$ 4-5	2
14	$J_1 = 2A,$ 1-5	$R_2 = 20M,$ 1-4	$R_3 = 20M,$ 1-2	$R_4 = 20M,$ 2-3	$E_5 = 2B,$ 3-4	$J_6 = 1A,$ 1-2	$E_7 = 2B,$ 4-5	$R_8 = 20M,$ 3-5	1
15	$R_1 = 100M,$ 1-4	$E_2 = 10B,$ 1-3	$R_3 = 100M,$ 1-2	$J_4 = 1A,$ 2-3	$R_5 = 100M,$ 2-3	$J_6 = 1A,$ 5-2	$E_7 = 10B,$ 4-5	$R_8 = 100M,$ 3-5	5
16	$R_1 = 60M,$ 1-5	$J_2 = 2A,$ 5-1	$R_3 = 60M,$ 1-3	$E_4 = 6B,$ 1-2	$R_5 = 60M,$ 2-3	$R_6 = 60M,$ 2-4	$E_7 = 6B,$ 5-4	$J_8 = 2A,$ 5-3	3
17	$E_1 = 8B,$ 1-5	$R_2 = 80M,$ 1-4	$R_3 = 80M,$ 1-2	$R_4 = 80M,$ 2-4	$J_5 = 2A,$ 1-2	$R_6 = 80M,$ 2-3	$E_7 = 8B,$ 3-5	$J_8 = 2A,$ 4-5	4
18	$R_1 = 60M,$ 1-5	$J_2 = 1A,$ 1-3	$R_3 = 60M,$ 1-2	$R_4 = 60M,$ 2-5	$E_5 = 12B,$ 2-3	$J_6 = 1A,$ 2-5	$E_7 = 12B,$ 4-5	$R_8 = 60M,$ 3-4	3
19	$J_1 = 1A,$ 5-1	$R_2 = 40M,$ 1-5	$R_3 = 40M,$ 1-2	$E_4 = 2B,$ 1-3	$R_5 = 40M,$ 2-3	$R_6 = 40M,$ 2-4	$E_7 = 2B,$ 4-5	$J_8 = 1A,$ 5-3	2
20	$R_1 = 80M,$ 1-5	$J_2 = 2A,$ 1-3	$E_3 = 8B,$ 1-3	$J_4 = 2A,$ 5-2	$R_5 = 80M,$ 2-5	$R_6 = 80M,$ 2-3	$E_7 = 8B,$ 5-4	$R_8 = 80M,$ 3-4	4
21	$E_1 = 12B,$ 1-5	$R_2 = 60M,$ 1-4	$J_3 = 2A,$ 1-4	$R_4 = 60M,$ 1-2	$E_5 = 12B,$ 2-3	$R_6 = 60M,$ 3-5	$J_7 = 2A,$ 3-4	$R_8 = 60M,$ 4-5	3
22	$R_1 = 100M,$ 1-4	$R_2 = 100M,$ 1-3	$R_3 = 100M,$ 1-2	$J_4 = 1A,$ 2-3	$R_5 = 100M,$ 2-3	$J_6 = 1A,$ 2-5	$E_7 = 10B,$ 5-4	$E_8 = 10B,$ 5-3	5
23	$R_1 = 120M,$ 1-5	$R_2 = 120M,$ 1-3	$J_3 = 2A,$ 1-3	$R_4 = 120M,$ 1-2	$E_5 = 12B,$ 3-2	$R_6 = 120M,$ 2-4	$E_7 = 12B,$ 4-5	$J_8 = 2A,$ 5-3	6
24	$J_1 = 1A,$ 5-1	$R_2 = 100M,$ 1-4	$R_3 = 100M,$ 1-2	$E_4 = 20B,$ 3-2	$R_5 = 100M,$ 1-5	$R_6 = 100M,$ 3-5	$J_7 = 1A,$ 4-3	$E_8 = 20B,$ 4-5	5

25	$R_1 = 80M,$ 1-5	$R_2 = 80M,$ 1-2	$E_3 = 16B,$ 2-4	$J_4 = 1A,$ 1-3	$E_5 = 16B,$ 3-4	$R_6 = 80M,$ 3-5	$R_7 = 80M,$ 4-5	$J_8 = 1A,$ 5-4	4
26	$R_1 = 160M,$ 1-4	$R_2 = 160M,$ 1-2	$E_3 = 16B,$ 1-3	$J_4 = 1A,$ 2-3	$R_5 = 160M,$ 2-3	$R_6 = 160M,$ 2-5	$E_7 = 16B,$ 4-5	$J_8 = 1A,$ 3-5	8
27	$R_1 = 40M,$ 1-5	$R_2 = 40M,$ 1-3	$J_3 = 1A,$ 1-2	$J_4 = 1A,$ 5-2	$R_5 = 40M,$ 2-5	$E_6 = 4B,$ 2-3	$R_7 = 40M,$ 3-4	$E_8 = 8B,$ 5-4	2
28	$E_1 = 6B,$ 1-5	$R_2 = 60M,$ 1-4	$J_3 = 2A,$ 1-2	$R_4 = 60M,$ 1-2	$J_5 = 2A,$ 2-5	$R_6 = 60M,$ 2-3	$E_7 = 6B,$ 3-4	$R_8 = 60M,$ 4-5	3
29	$R_1 = 20M,$ 1-5	$J_2 = 2A,$ 4-1	$R_3 = 20M,$ 1-4	$R_4 = 20M,$ 1-2	$E_5 = 2B,$ 2-3	$J_6 = 2A,$ 3-4	$E_7 = 2B,$ 5-3	$R_8 = 20M,$ 4-5	1
30	$J_1 = 2A,$ 1-5	$R_2 = 100M,$ 1-4	$R_3 = 100M,$ 1-2	$R_4 = 100M,$ 2-3	$E_5 = 10B,$ 3-4	$J_6 = 1A,$ 1-2	$E_7 = 10B,$ 4-5	$R_8 = 100M,$ 3-5	5