Расчетно-графическая работа № 1

по теме

"ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"

Некоторые теоретические сведения

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух заданных точек плоскости (*фокусов эллипса*) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O(x_0, y_0)$, оси которого параллельны координатным осям, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Центр эллипса расположен посередине между его фокусами.

Если фокусы лежат на оси, // Ox, то $2a$ — сумма расстояний от любой точки эллипса до его фокусов (a — большая полуось), $2c$ — расстояние между фокусами, а малая полуось эллипса вычисляется по формуле $b=\sqrt{a^2-c^2}$.

Если же фокусы эллипса лежат на оси, // Oy, то сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов = $2b$ (здесь b — большая полуось), малая полуось $a=\sqrt{b^2-c^2}$.

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух заданных точек (*фокусов гиперболы*) есть постоянная величина, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $O(x_0, y_0)$, оси которого параллельны координатным осям, а фокусы находятся на оси, // Ox, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

где $2a$ — разность расстояний от любой точки гиперболы до его фокусов, $2c$ — расстояние между фокусами, а вторая полуось вычисляется по формуле $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Центр гиперболы расположен посередине между его фокусами.

Если фокусы гиперболы лежат на оси, // Oy, то разность расстояний от любой точки гиперболы до фокусов = $2b$, $a=\sqrt{b^2-c^2}$, а уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1.$$

Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки F – *фокуса* и заданной прямой – *директрисы параболы*.

Вершина параболы расположена на прямой, проходящей через фокус перпендикулярно директрисе параболы, посередине между фокусом и директрисой.

Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O(x_0, y_0)$ и директрисой, // Ox, имеет вид

$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0),$$

где $p = c$, если фокус лежит выше директрисы, и $p = -c$, если фокус лежит ниже директрисы (ветви параболы направлены "вверх" и "вниз" соответственно); c — расстояние между фокусом и директрисой.

Если директриса // Oy, то уравнение параболы будет иметь вид

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Задача 1.

а) Составить уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $A(-8;2)$ и $B(-8;10)$ равна 10.

Решение. Данная кривая по определению является эллипсом с фокусами в точках A и B, расположенными на прямой, // оси Oy.

Расстояние между фокусами: $2c = 10 - 2 = 8 \Rightarrow c = 4$;

большая ось эллипса (по условию задачи): $2b = 10 \Rightarrow b = 5$;

малая полуось: $a = \sqrt{b^2 - c^2} = 3$;

$x_0 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = -8$; $\quad y_0 = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+10}{2} = 6 \quad \Rightarrow$

центр эллипса расположен в точке $O(-8;\ 6)$.

Таким образом, каноническое уравнение данного эллипса имеет вид

$$\frac{(x+8)^2}{3^2} + \frac{(y-6)^2}{5^2} = 1.$$

Эллипс имеет вершины в точках $M(-8;\ 11)$, $N(-5;\ 6)$, $P(-8;\ 1)$ и $Q(-11;\ 5)$.

Эксцентриситет эллипса равен отношению расстояния между фокусами к большей оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

График эллипса изображен на рис. 1.

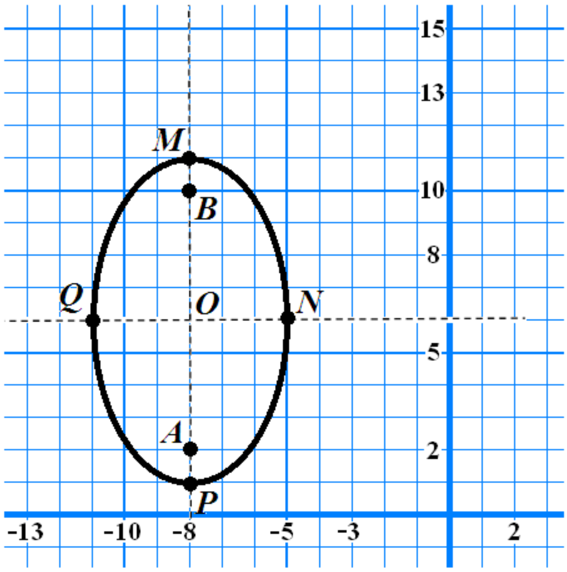


Рис. 1.

б) Составить уравнение кривой, все точки которой равноудалены от точки $M(3;4)$ и прямой $y = -2$.

Решение. Данная кривая по определению является параболой с фокусом в точке M и директрисой $y = -2$.

Так как директриса параллельна оси Ox, ее уравнение будет иметь вид $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, где $p > 0$, так как фокус расположен правее директрисы и ветви параболы направлены вверх.

Вершина параболы расположена в точке (см. рис. 2): $O(3;\ 1)$, расстояние между фокусом и директрисой $p = 6$

$\Rightarrow$ ее уравнение имеет вид

$$(x-3)^2 = 12(y-1).$$

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

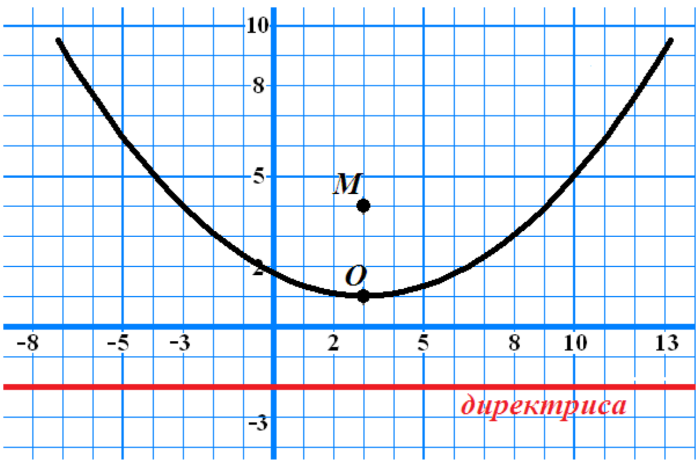


Рис. 2.

Задача 2. Прямая ℓ на плоскости Oxy проходит через точки $A(-1;\ 4)$ и $B(6;-7)$.

а) Составить каноническое, параметрические, общее уравнение этой прямой, ее уравнение в отрезках и уравнение с угловым коэффициентом.

б) Найти расстояние от точки $C(-5;\,3)$ до прямой ℓ.

в) Через точку C провести прямую $\ell_2 \,//\, \ell$ и прямую $\ell_3 \perp \ell$.

Решение. а) Уравнение прямой, проходящей ***через две заданные точки*** $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. $\Rightarrow$ $\dfrac{x+1}{6+1}=\dfrac{y-4}{-7-4}$

получаем **каноническое уравнение прямой:** $\boxed{\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y-4}{-11}.}$

Приравняв каждую дробь к параметру t и выразив x и y, получим:

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y-4}{-11}=t \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{x+1}{7}=t\\[2mm] \dfrac{y-4}{-11}=t\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x+1=7t\\ y-4=-11t\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{cases}x=7t-1\\ y=4-11t\end{cases}} \text{ —}$$

параметрические уравнения прямой.

Замечание: из этих уравнений можно найти направляющий вектор прямой: $\vec{s}=\{7;-11\}$.

Домножим в каноническом уравнении правую и левую часть на 77 и перенесем все слагаемые в левую часть, тогда получим

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y-4}{-11}\ \Big|\cdot 77 \quad\Rightarrow\quad 11(x+1)=-7(y-4) \quad\Rightarrow\quad 11x+11+7y-28=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{11x+7y-17=0} \text{ —}$$

общее уравнения прямой.

Замечание: из общего уравнения можно найти нормаль к прямой: $N=\{11;\,7\}$.

Для проверки: $\vec{N}\cdot\vec{s}=7\cdot 11+(-11)\cdot 7=0 \ \Rightarrow\ \vec{N}\perp\vec{s}$.

Преобразуем общее уравнение прямой:

$$11x+7y-17=0 \quad\Rightarrow\quad 11x+7y=17\ \big|:17 \quad\Rightarrow\quad \frac{11}{17}x+\frac{7}{17}y=1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{x}{17/11}+\frac{y}{17/7}=1} \text{ —}$$

уравнение прямой в отрезках,

где $a=\dfrac{17}{11}$ и $b=\dfrac{17}{7}$ — точки пересечения прямой с Ox и Oy.

И наконец, выразив из общего уравнения прямой y, получим:

$$11x+7y-17=0 \quad\Rightarrow\quad 7y=-11x+17\ \big|:7 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=-\frac{11}{7}x+\frac{17}{7}} \text{ —}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом.

б) Найдем расстояние от точки $C(-5;\,3)$ до найденной прямой:

$$d=\frac{|Ax^*+By^*+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|11\cdot(-5)+7\cdot 3-17|}{\sqrt{11^2+7^2}}=\frac{51}{\sqrt{170}}\approx 3{,}91.$$

в) Если прямая $\ell_2 \,//\, \ell$, то их нормали совпадают. Тогда можно составить общее уравнение прямой ℓ_2, учитывая, что она проходит через точку $C(-5;\,3)$:

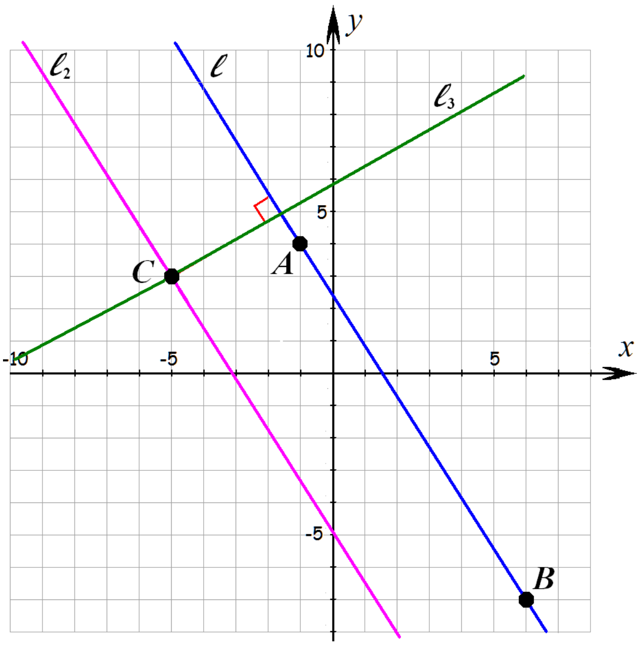


Рис. 3.

$$11(x+5)+7(y-3)=0 \quad \Rightarrow$$

$$11x+55+7y-21=0 \quad \Rightarrow \quad 11x+7y+34=0 \text{ —}$$

общее уравнения прямой ℓ_2.

Если прямая $\ell_3 \perp \ell$, то нормаль к ℓ_3 совпадает с направляющим вектором прямой ℓ. Тогда:

$$7(x+5)-11(y-3)=0 \quad \Rightarrow \quad 7x+35-11y+33=0$$

$$\Rightarrow \quad 7x-11y+68=0 \text{ —}$$

общее уравнения прямой ℓ_3.

Прямые ℓ, ℓ_2 и ℓ_3 изображены на рис. 3.

<u>Задача 3.</u> В пространстве даны точки $A(1;\,0;\,-3)$, $B(-2;\,1;\,4)$, $C(5;\,-4;\,0)$ и $D(3;\,-2;\,1)$.

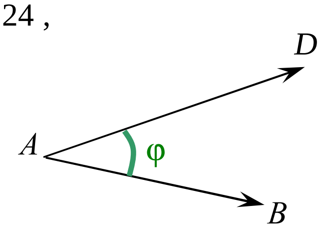
а) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=\{-3;1;7\}$, $\overrightarrow{AD}=\{2;-2;4\}$

$$\Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{9+1+49}=\sqrt{59}, \quad \left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24},$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-6-2+28=20,$$

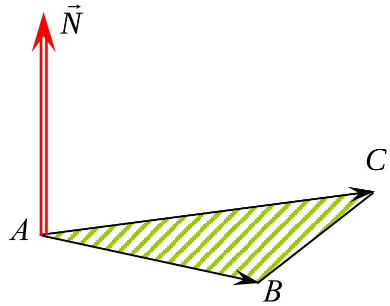
$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}=\frac{20}{\sqrt{59}\sqrt{24}}\approx 0.5314.$$



б) Найти $S_{\Delta ABC}$ — площадь треугольника ABC (с помощью векторного произведения). Проверить, что вектор $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=\{-3;1;7\}$, $\overrightarrow{AC}=\{4;-4;3\}$.

$$\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 7\\ 4 & -4 & 3\end{vmatrix}=\{31;37;8\}.$$



<u>Проверка</u>: $\vec{N}\cdot\overrightarrow{AB}=-93+37+56=0 \;\Rightarrow\; \vec{N}\perp\overrightarrow{AB}$;

$\vec{N}\cdot\overrightarrow{AC}=124-148+24=0 \;\Rightarrow\; \vec{N}\perp\overrightarrow{AC}$ (ч.т.д.).

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{N}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{961+1369+64}=\frac{\sqrt{2394}}{2}\approx 48.93 \ (\text{ед}^2).$$

Приближенно $S_{\Delta ABC}\approx 48.93$ ед^2.

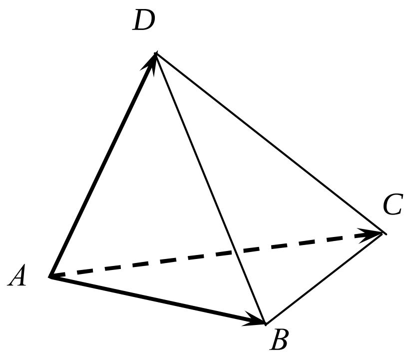
в) Найти V_{ABCD} — объем пирамиды $ABCD$ (с помощью смешанного произведения).

Решение. $\overrightarrow{AB}=\{-3;1;7\}$, $\overrightarrow{AC}=\{4;-4;3\}$, $\overrightarrow{AD}=\{2;-2;4\}$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 7\\ 4 & -4 & 3\\ 2 & -2 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=(48+6-56)-(-56+16+18)=54-34=20,$$

$$\Rightarrow\ V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{10}{3}\ (\text{ед}^3).$$

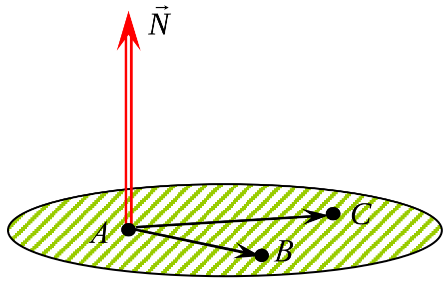


г) Составить общее уравнение плоскости ABC (в качестве нормали к плоскости взять вектор $\vec{N}$, найденный в пункте ***б***). Проверить, что все три точки A, B и C принадлежат этой плоскости.

Решение. Обозначим плоскость ABC как α. Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{N}=\{A; D; C\}$ и проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Возьмем в качестве точки привязки точку $A(1; 0; -3)$, в качестве нормали к плоскости — вектор $\vec{N}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{31; 37; 8\}$, найденный в п. ***б***). Тогда



$$31(x-1)+37y+8(z+3)=0,$$

$$31x-31+37y+8z+24=0,$$

$$31x+37y+8z-7=0 \text{ — общее уравнение плоскости } \alpha.$$

<u>Проверка:</u> $(\cdot)\ A(1;0;-3)$: $31\cdot1+37\cdot0+8\cdot(-3)-7=0$,

$$31-24-7=0,$$

$$0=0\ \Rightarrow\ (\cdot)\ A\in\alpha;$$

$(\cdot)\ B(-2;1;4)$: $31\cdot(-2)+37\cdot1+8\cdot4-7=0$,

$$-62+37+32-7=0,$$

$$0=0\ \Rightarrow\ (\cdot)\ B\in\alpha;$$

$(\cdot)\ C(5;-4;0)$: $31\cdot5+37\cdot(-4)+8\cdot0-7=0$,

$$155-148-7=0,$$

$$0=0\ \Rightarrow\ (\cdot)\ C\in\alpha, \text{ ч.т.д.}$$

д) Найти h — расстояние от точки D до плоскости ABC с помощью формулы расстояния от точки до плоскости. Убедиться, что $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h$ (см. пп. ***б*** и ***в***).

Решение. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости α: $Ax+By+Cz+D=0$ можно найти по формуле

$$h=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\left|\vec{N}\right|}=\frac{\left|31\cdot3+37\cdot(-2)+8\cdot1-7\right|}{\sqrt{2394}}=\frac{20}{\sqrt{2394}}=\frac{10\sqrt{2394}}{1197}\ (\text{ед.}).$$

Приближенно $h\approx0.82$ ед.

Проверка: $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2394}}{2}\cdot\frac{20}{\sqrt{2394}} = \frac{10}{3} = V_{ABCD}$, ч.т.д.

е) Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки A и B.

Решение. $\overrightarrow{AB} = \{-3; 1; 7\}$ — направляющий вектор прямой AB. Возьмем точку $A(1;\, 0;\, -3)$ в качестве точки привязки. Тогда:

канонические уравнения прямой AB: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{7}$;

параметрические уравнения: $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = t, \\ z = -3 + 7t. \end{cases}$

ж) Найти расстояние от точки D до прямой AB с помощью формулы расстояния от точки до прямой.

Решение. Расстояние от точки D до прямой можно найти по формуле $d = \frac{\left| \vec{s} \times \overrightarrow{AD} \right|}{|\,\vec{s}\,|}$, где A — некоторая точка прямой, $\vec{s}$ — направляющий вектор. Тогда

$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = \{-3; 1; 7\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2; -2; 4\}$ $\Rightarrow$ $|\,\vec{s}\,| = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}$,

$$\vec{s} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \{18; 26; 4\} \quad \Rightarrow \quad \left| \vec{s} \times \overrightarrow{AD} \right| = \sqrt{324+676+16} = \sqrt{1016} = 2\sqrt{254}$$

$\Rightarrow$ $d = \frac{\left| \vec{s} \times \overrightarrow{AD} \right|}{|\,\vec{s}\,|} = \frac{2\sqrt{254}}{\sqrt{59}}$ (ед.), приближенно $d \approx 4.15$ ед.