Модуль II. ТЕОРИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 5. Линейные пространства, норма и скалярное произведение

21. Дано множество X. Привести примеры элементов, принадлежащих этому множеству, и примеры элементов, не принадлежащих ему. Определить, является ли X линейным пространством относительно естественных операций сложения и умножения на вещественное число (функции складываются и умножаются на число поточечно, матрицы и последовательности – поэлементно).

1. a) Множество X непрерывных функций $x(t)$, у которых $x(0) \neq x(1)$.
   b) Множество X таких числовых последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $|x_k| \leq 1,\ k = 1,2,3,\ldots$

2. a) Множество X обратимых матриц размера 2×2.
   b) Множество X непрерывных функций $x(t)$, у которых $x(-1) = x(1) = 0$.

3. a) Множество X монотонно убывающих числовых последовательностей.
   b) Множество X непрерывных функций, которые не обращаются в ноль на числовой прямой.

4. a) Множество X бесконечно малых числовых последовательностей.
   b) Множество X четных функций на числовой прямой.

5. a) Множество X числовых последовательностей, сходящихся к 1.
   b) Множество X дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $x'' - x = 0$.

6. a) Множество X непрерывных функций $x(t)$, у которых $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.
   b) Множество X симметричных матриц размера 3×3.

7. a) Множество X непрерывных функций $x(t)$, у которых $x(0) \cdot x(1) = 0$.
   b) Множество X ограниченных сверху числовых последовательностей.

8. a) Множество X таких непрерывных функций $x(t)$, что уравнение $x(t) = 0$ имеет по крайней мере одно решение на числовой прямой.
   b) Множество X числовых последовательностей, элементы которых целые четные числа.

9. a) Множество X матриц размера 2×2, определитель которых равен нулю.
   b) Множество X непрерывных функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\int_0^1 x(t)dt = 0$.

10. a) Множество X непрерывных функций $x(t)$, принимающих бесконечно большие значения при $t \to \infty$.
    b) Множество X таких числовых последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $x_{2k} \cdot x_{2k-1} = 0,\ k = 1,2,3\ldots$

11. a) Множество X дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $x''+x'-2x=0$.
    b) Множество X монотонно возрастающих числовых последовательностей.

12. a) Множество X матриц размера 3×3, определитель которых равен нулю.
    b) Множество X непрерывных функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^1 x(t)dt=1$.

13. a) Множество X непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $x'+x=0$.
    b) Множество X таких числовых последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k <\infty$.

14. a) Множество X таких непрерывно дифференцируемых функций, у которых производная не обращается в ноль на числовой прямой.
    b) Множество X таких числовых последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $x_{2k}+x_{2k-1}=0,\ k=1,2,3\ldots$

15. a) Множество X таких непрерывных функций $x(t)$, что уравнение $x(t)=t$ имеет по крайней мере одно решение на числовой прямой.
    b) Множество X бесконечно больших числовых последовательностей.

16. a) Множество X таких числовых последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k =\infty$.
    b) Множество X непрерывных функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^1 x(t)dt=0$.

17. a) Множество X непрерывных функций $x(t)$, принимающих бесконечно малые значения при $t\to\infty$.
    b) Множество X числовых последовательностей, элементы которых целые числа, кратные 3.

18. a) Множество X дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $x''=t$.
    b) Множество X числовых последовательностей, сходящихся к 0.

19. a) Множество X обратимых матриц размера 3×3.
    b) Множество X нечетных функций на числовой прямой.

20. a) Множество X непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, у которых $x(0)=x'(0)=0$.
    b) Множество X знакочередующихся числовых последовательностей.

Образец решения

Множество X монотонных функций на числовой прямой.

Решение этой задачи опирается на определение линейного пространства, сформулированное в конспекте лекций, §6, пункт 6.1. Рассмотрим свойство монотонности (нестрогой). Функция монотонна, если она либо возрастает на всей числовой прямой, либо убывает на всей числовой прямой. Например, функции $x = t^3$, $x = arctg(t)$, $x = 0$, $x = -t$, $x = e^t$, $x = e^{-t}$ принадлежат множеству X. Функции $x = t^2$, $x = \sin t$ не принадлежат множеству X.

Проверим, будут ли результаты сложения и умножения на число монотонных функций принадлежать множеству X.

Если $x \in X, \alpha \in R,$ то $\alpha x \in X$? Пусть функция x возрастает. Тогда функция αx тоже возрастает при $\alpha > 0$, убывает при $\alpha < 0$ и $\alpha x = 0$ при $\alpha = 0$. В любом случае после умножения на вещественное число функция остается нестрого монотонной. То же самое верно, если функция x убывает. Таким образом, $\alpha x \in X$.

Если $x, y \in X$, то $x + y \in X$? Если функции x и y обе возрастают, то функция $x + y$ тоже возрастает и принадлежит множеству X. То же самое верно в случае убывания. Однако, если функция x возрастает, а функция y убывает, то функция $x + y$ может не принадлежать множеству X. Например, $x = t^3$ возрастает, $y = -t$ убывает, а функция $x + y = t^3 - t$ меняет характер монотонности (рис. 8) и поэтому не принадлежит X:

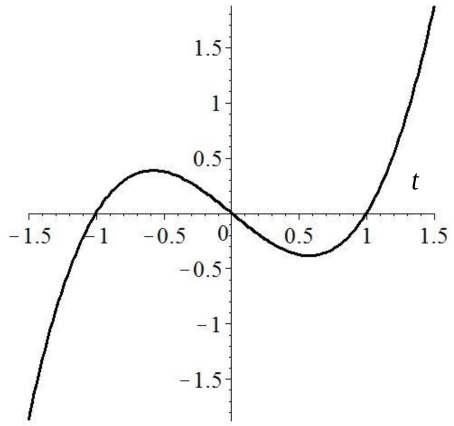

Рис. 8

Вывод: множество X не является линейным пространством.

22. Дано линейное подпространство $\tilde{X}$ в одном из линейных функциональных пространств. Найти его размерность. Ответ следует обосновать указанием подходящей линейно независимой системы в $\tilde{X}$. В условиях заданий параметр k принимает целые значения.

1. a) $\tilde{X} = \{x \in C^2[0;1]:\ x'' + 2x' + x = 0,\ x(0) = 0\}$

   b) $\tilde{X} = \left\{x \in L^2(-1;1):\ \int_{-1}^{1} x(t)\cos k\pi t dt = 0,\ k \geq 0\right\}$

2. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(0;1):\ \int_0^1 x(t)\sin k\pi t dt = 0,\ k = 1,2,3 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^3[0;1]:\ x''' = 0 \right\}$

3. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in C[-1;1]:\ \int_{-1}^1 x(t)\sqrt{1-t^2}\, dt = 0 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^2[0;1]:\ x'' - 4x' + 5x = 0 \right\}$

4. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^1[0;1]:\ x'(1) = 0 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1):\ \int_{-1}^1 x(t)\sin k\pi t dt = 0,\ k \geq 1 \right\}$

5. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^3[0;1]:\ x''' - x' = 0 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1):\ \int_{-1}^1 t^k x(t) dt = 0,\ k = 0,1,2,3 \right\}$

6. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(0;1):\ \int_0^1 x(t)\cos k\pi t dt = 0,\ k \geq 3 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^1[0;1]:\ x'(0) = x(1) = 0 \right\}$

7. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^3[0;1]:\ x''' - x'' - 4x' + 4x = 0 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1):\ \int_{-1}^1 x(t) dt = \int_{-1}^1 tx(t) dt = 0 \right\}$

8. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(0;1):\ \int_0^1 x(t)\sin^2 k\pi t dt = 0,\ k \geq 1 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^2[0;1]:\ x'' = 0 \right\}$

9. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in C[0;1]:\ x(0) = x(1) = 0 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1):\ \int_{-1}^1 x(t)\sin k\pi t dt = \int_{-1}^1 x(t)\cos k\pi t dt = 0,\ k \geq 4 \right\}$

10. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in C^1[0;1]:\ x' - \frac{xt}{t^2+1} = 0 \right\}$

b) $\tilde{X} = \left\{ x \in C[-1;1]:\ \int_{-1}^1 t^k x(t) dt = 0,\ k = 0,2,4,6,\ldots \right\}$

11. a) $\tilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1):\ \int_{-1}^1 x(t)\sin k\pi t dt = \int_{-1}^1 x(t)\cos k\pi t dt = 0,\ k \geq 1 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^1[0;1] :\ x'(0) = 0 \right\}$

12. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^3[0;1] :\ x''' - 5x'' + 6x' = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1) :\ \int_{-1}^{1} t^k x(t)dt = 0,\ k = 0,1,2,3,4 \right\}$

13. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^2[0;1] :\ x'' + x = 0,\ x(0) = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C[-1;1] :\ \int_{-1}^{1} t^k x(t)dt = 0,\ k = 1,3,5,7,\ldots \right\}$

14. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in L^2(0;1) :\ \int_{0}^{1} x(t)\sin \pi t dt = \int_{0}^{1} x(t)\sin 2\pi t dt = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^2[0;1] :\ x'' + x' - 2x = 0 \right\}$

15. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C[-1;1] :\ \int_{-1}^{1} x(t)\sin t dt = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^3[0;1] :\ x''' = 0,\ x(0) = 0 \right\}$

16. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^2[0;1] :\ x''(0) = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in L^2(0;1) :\ \int_{0}^{1} x(t)\cos k\pi t dt = 0,\ k \ge 1 \right\}$

17. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^3[0;1] :\ x''' = 0,\ x(1) = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1) :\ \int_{-1}^{1} t^k x(t)dt = 0,\ k = 0,1,2 \right\}$

18. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C[-1;1] :\ \int_{-1}^{1} x(t)dt = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^1[0;1] :\ x' - x\cos t = 0 \right\}$

19. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^1[0;1] :\ x(0) = x'(1) = 0 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in L^2(-1;1) :\ \int_{-1}^{1} x(t)\sin k\pi t dt = \int_{-1}^{1} x(t)\cos k\pi t dt = 0,\ k \ge 2 \right\}$

20. a) $\widetilde{X} = \left\{ x \in L^2(0;1) :\ \int_{0}^{1} x(t)\sin k\pi t dt = 0,\ k \ge 3 \right\}$

b) $\widetilde{X} = \left\{ x \in C^2[0;1] :\ x''(1) = 0 \right\}$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определения линейно независимой системы и размерности линейного подпространства, сформулированные в конспекте лекций, §6. Может также понадобиться информация об ортогональных тригонометрических и полиномиальных системах, изложенная в §9, §10 конспекта лекций.

Образец №1 решения

$$\tilde{X} = \{x \in C[0;1]:\ x(1) = 0\}$$

Перед нами линейное подпространство $\tilde{X}$ в пространстве непрерывных функций $X = C[0;1]$. В подпространстве $\tilde{X}$ можно указать бесконечную линейно независимую систему

$$\left\{(t-1), (t-1)^2, (t-1)^3, \ldots, (t-1)^k, \ldots\right\} \subset \tilde{X}.$$

Значит, подпространство $\tilde{X}$ бесконечномерное.

Образец №2 решения

$$\tilde{X} = \left\{x \in L^2(0;1):\ \int_0^1 x(t) \sin k\pi t dt = 0,\ k \geq 5\right\}$$

Перед нами линейное подпространство $\tilde{X}$ в пространстве квадратично суммируемых функций $X = L^2(0;1)$. Элементы подпространства $\tilde{X}$ определяются условием ортогональности бесконечному набору синусов:

$$x \perp \sin k\pi t, \quad k = 5,6,7,8,\ldots$$

Заметим, что эти синусы составляют часть полной ортогональной системы (ортогонального базиса) в пространстве $L^2(0;1)$ (см. конспект лекций, §10, пункт 10.2):

$$\left\{\sin \pi t,\ \sin 2\pi t,\ \sin 3\pi t,\ \sin 4\pi t,\ \sin 5\pi t, \ldots, \sin k\pi t, \ldots\right\}. \qquad (1)$$

Функции системы (1) ортогональны друг другу, в частности, первые четыре функции ортогональны всем остальным. Поэтому в подпространстве $\tilde{X}$ имеется по крайней мере 4 линейно независимых элемента:

$$\{\sin \pi t,\ \sin 2\pi t,\ \sin 3\pi t,\ \sin 4\pi t\} \subset \tilde{X}. \qquad (2)$$

На основе полноты и ортогональности системы (1) можно доказать, что все остальные элементы подпространства $\tilde{X}$ являются линейными комбинациями элементов (2):

$$\tilde{X} = Lin\{\sin \pi t,\ \sin 2\pi t,\ \sin 3\pi t,\ \sin 4\pi t\}.$$

Отсюда, подпространство $\tilde{X}$ конечномерное, его размерность 4.

23. Определить, можно ли с помощью функции $p(x)$ задать норму либо полунорму в указанном пространстве.

1. $C[0;1]$, $\quad p(x) = \max\limits_{t,s \in [0;1]} |x(t) - x(s)|$
2. $C^2[0;1]$, $\quad p(x) = \max\limits_{t \in [0;1]} |x''(t)| + |x(1)|$
3. $C^2[0;1]$, $\quad p(x) = \max\limits_{t \in [0;1]} |x'(t)| + \max\limits_{t \in [0;1]} |x''(t)|$
4. l^∞, $\quad p(x) = \inf\limits_{1 \leq k < \infty} |x_k|$
5. l^1, $\quad p(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|x_k|}{k}$

6. $C^1[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x'(t)|$
7. $C^1[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x(t)+x'(t)|$
8. $L^2(0;1), \quad p(x)=\int\limits_0^1 x^2(t)dt$
9. $l^1, \quad p(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_{2k-1}-x_{2k}|$
10. $l^2, \quad p(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2$
11. $C^2[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x''(t)|+|x'(0)|+|x(0)|$
12. $C^1[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x'(t)|+|x(1)|$
13. $C[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}x(t)-\min\limits_{t\in[0;1]}x(t)$
14. $l^2, \quad p(x)=|x_1|+\sqrt{\sum\limits_{k=2}^{\infty}x_k^2}$
15. $C[0;1], \quad p(x)=\min\limits_{t\in[0;1]}|x(t)|$
16. $L^3(0;1), \quad p(x)=\int\limits_0^1|x(t)|^3dt$
17. $C^2[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x''(t)|$
18. $l^\infty, \quad p(x)=\sup\limits_{1\le k,l<\infty}|x_k-x_l|$
19. $C^2[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x''(t)|+|x'(1)|+|x(1)|$
20. $C^1[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x'(t)|+|x(0)|$

Образец решения

$$C^2[0;1], \quad p(x)=\max\limits_{t\in[0;1]}|x''(t)|+|x(0)|$$

При решении этой задачи следует использовать определение нормы, сформулированное в §7 конспекта лекций, пункт 7.1, а также примеры исследования из пункта 7.3.

Числовая функция $p(x)$ определена для каждой $x\in C^2[0;1]$, необходимо проверить выполнение аксиом нормы.

I. Ясно, что $p(x)\ge 0$.

Проверим, что $p(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Если $x=0$, то $p(x)=0$.

Если $p(x)=0$, то $\max\limits_{t\in[0;1]}|x''(t)|+|x(0)|=0$. Отсюда следует, что

$$x''(t)\equiv 0 \text{ на } [0;1], \tag{1}$$

$$|x(0)|=0. \tag{2}$$

Условие (1) означает, что $x(t)=c_1t+c_2$, где $c_1,c_2\in R$. Подставляем эту формулу в условие (2), получаем $c_2=0$. Следовательно, $x(t)=c_1t$. Поскольку коэффициент c_1 произвольный, то из условия $p(x)=0$ не следует обязательно, что $x=0$.

Не выполняется вторая часть первой аксиомы для нормы. Функция $p(x)$ может быть полунормой, если выполняются оставшиеся аксиомы.

II. Свойство положительной однородности выполняется:

$$p(\alpha x) = \max_{t\in[0;1]}\left|(\alpha x(t))''\right| + |\alpha x(0)| = |\alpha|\left(\max_{t\in[0;1]}|x''(t)| + |x(0)|\right) = |\alpha|\,p(x).$$

III. Проверим неравенство треугольника. Воспользуемся соотношениями $|a+b| \le |a| + |b|$ и $\max(a(t)+b(t)) \le \max a(t) + \max b(t)$:

$$p(x+y) = \max_{t\in[0;1]}\left|(x(t)+y(t))''\right| + |x(0)+y(0)| \le$$

$$\le \max_{t\in[0;1]}|x''(t)| + |x(0)| + \max_{t\in[0;1]}|y''(x)| + |y(0)| = p(x) + p(y).$$

Неравенство треугольника выполняется.

Вывод: функция $p(x)$ задает полунорму в пространстве $C^2[0;1]$.

24. Найти норму функции $x = x(t)$ в пространстве $C[a;b]$.

1. $x(t) = t^4 - 2t^2 + 5$, $[a;b] = [-2;2]$
2. $x(t) = t - \sqrt{t}$, $[a;b] = [0;1]$
3. $x(t) = \sqrt[3]{(t^2 - 2t)^2}$, $[a;b] = [0;3]$
4. $x(t) = \sin 2t - t$, $[a;b] = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
5. $x(t) = t - \ln(1+t)$, $[a;b] = \left[-\frac{1}{2};4\right]$
6. $x(t) = \dfrac{1 - t + t^2}{1 + t - t^2}$, $[a;b] = [0;1]$
7. $x(t) = \sqrt{100 - t^2}$, $[a;b] = [-6;8]$
8. $x(t) = t^3 - 3t^2 + 6t - 2$, $[a;b] = [-1;1]$
9. $x(t) = t^2 e^{-t}$, $[a;b] = [0;3]$
10. $x(t) = arctg\,\dfrac{1-t}{1+t}$, $[a;b] = [0;1]$
11. $x(t) = -t^2 \cdot \sqrt{t^2 + 2}$, $[a;b] = [-3;2]$
12. $x(t) = \sqrt[3]{t^3 - 3t^2 + 8}$, $[a;b] = [-1;3]$
13. $x(t) = \dfrac{3t^2 + 4t + 4}{t^2 + t + 1}$, $[a;b] = [-4;2]$
14. $x(t) = \cos 2t + t$, $[a;b] = [0;\pi]$
15. $x(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $[a;b] = [0;3]$
16. $x(t) = t - \ln(1+t^2)$, $[a;b] = [0;2]$
17. $x(t) = te^{-t^2}$, $[a;b] = [0;1]$
18. $x(t) = (t^2 - 2t)\ln t - \frac{3}{2}t^2 + 4t$, $[a;b] = [1;3]$
19. $x(t) = \dfrac{1}{9t\sqrt{1-t}}$, $[a;b] = \left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$
20. $x(t) = t^5 - 5t^4 + 5t^3 + 1$, $[a;b] = [-1;2]$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулу для вычисления нормы в пространстве $C[a;b]$, которая приведена в конспекте лекций, §7, пункт 7.2.

25. Найти норму бесконечной числовой последовательности x в пространстве l^∞.

1. $x=\left\{\dfrac{\ln^4 k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

2. $x=\left\{\dfrac{k-4}{4k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

3. $x=\left(\dfrac{\ln 1}{\sqrt[3]{1}},-\dfrac{\ln 2}{\sqrt[3]{2}},\dfrac{\ln 3}{\sqrt[3]{3}},-\dfrac{\ln 4}{\sqrt[3]{4}},\ldots\right)$

4. $x=\left\{\ln\dfrac{k+1}{k}-\dfrac{1}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

5. $x=\left\{\dfrac{40k}{(3k+10)^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

6. $x=\left\{\dfrac{3^k+1}{k!}\right\}_{k=1}^{\infty}$

7. $x=\left\{\sin\dfrac{\pi k}{2}-\cos\dfrac{\pi k}{3}\right\}_{k=1}^{\infty}$

8. $x=\left\{\dfrac{\ln^5 k}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

9. $x=\left\{\dfrac{1-3k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

10. $x=\left\{\dfrac{\ln k-1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

11. $x=\left(\sin\dfrac{\pi}{7},\sin\dfrac{2\pi}{7},\sin\dfrac{3\pi}{7},\sin\dfrac{4\pi}{7},\ldots\right)$

12. $x=\left\{\dfrac{-8k}{k^2+133}\right\}_{k=1}^{\infty}$

13. $x=\left\{1+\cos\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$

14. $x=\left\{\dfrac{2k-3}{3k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

15. $x=\left\{\dfrac{k^5}{3^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

16. $x=\left\{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{3}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$

17. $x=\left(\dfrac{\ln^2 1}{\sqrt{1}},\dfrac{\ln^2 2}{\sqrt{2}},\dfrac{\ln^2 3}{\sqrt{3}},\dfrac{\ln^2 4}{\sqrt{4}},\ldots\right)$

18. $x=\left\{\dfrac{12k}{99+k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

19. $x=\left\{k^3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$

20. $x=\left\{\cos\dfrac{\pi k}{2}+\sin\dfrac{\pi k}{3}\right\}_{k=1}^{\infty}$

Указание к решению

Пространство l^∞ состоит из таких бесконечных числовых последовательностей, которые являются ограниченными. Как указано в конспекте лекций, §7, пункт 7.2, норма последовательности x в пространстве l^∞ вычисляется по формуле

$$\|x\|_{l^\infty}=\sup_{1\le k<\infty}|x_k|.$$

Супремум (точная верхняя грань) значений $|x_k|$ может достигаться при некотором натуральном k или может совпадать с $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k|$.

26. Записать неравенство треугольника в пространстве $L^3(0;1)$ и убедиться, что оно выполнено для данных функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$.

1. $x(t)=\cos\frac{\pi t}{2}, \quad y(t)=t$
2. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[6]{t}}, \quad y(t)=\sqrt[3]{t}$
3. $x(t)=t+1, \quad y(t)=t-1$
4. $x(t)=te^t, \quad y(t)=-t$
5. $x(t)=\frac{t}{t+1}, \quad y(t)=\frac{1}{t+1}$
6. $x(t)=\ln t, \quad y(t)=-1$
7. $x(t)=t, \quad y(t)=e^t$
8. $x(t)=\cos\pi t, \quad y(t)=1$
9. $x(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y(t)=t$
10. $x(t)=\sin 2\pi t, \quad y(t)=1$
11. $x(t)=\sqrt{t}, \quad y(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$
12. $x(t)=1+t, \quad y(t)=t$
13. $x(t)=t^2+t, \quad y(t)=t^2-t$
14. $x(t)=1, \quad y(t)=e^t$
15. $x(t)=\sin\pi t, \quad y(t)=t$
16. $x(t)=\sqrt{t}, \quad y(t)=t$
17. $x(t)=t^2-1, \quad y(t)=t^2+1$
18. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{1-t}}, \quad y(t)=\sqrt{1-t}$
19. $x(t)=e^{-t}, \quad y(t)=e^t$
20. $x(t)=1-t, \quad y(t)=1+t$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать информацию, которую предоставляет §7 конспекта лекций: формулу для вычисления нормы в пространстве $L^3(0;1)$ и третью аксиому в определении нормы, называемую также неравенством треугольника.

27. Записать неравенство Гёльдера в пространствах $L^p(a;b)$ и $L^q(a;b)$ с данными показателями p и q. Убедиться, что оно выполнено для данных функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$.

1. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}, \quad y(t)=t+1, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(0;1)$
2. $x(t)=\frac{1}{1+t^2}, \quad y(t)=t, \quad p=\frac{3}{2}, \quad q=3, \quad (a;b)=(0;1)$
3. $x(t)=\ln t, \quad y(t)=t, \quad p=4, \quad q=\frac{4}{3}, \quad (a;b)=(0;1)$
4. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[5]{2-t}}, \quad y(t)=t, \quad p=4, \quad q=\frac{4}{3}, \quad (a;b)=(1;2)$
5. $x(t)=\ln^3 t, \quad y(t)=t, \quad p=\frac{4}{3}, \quad q=4, \quad (a;b)=(0;1)$
6. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[6]{t}}, \quad y(t)=1-t, \quad p=5, \quad q=\frac{5}{4}, \quad (a;b)=(0;1)$
7. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t-1}}, \quad y(t)=t, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(1;2)$
8. $x(t)=\sqrt{1-t}, \quad y(t)=t, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(0;1)$
9. $x(t)=\ln^2 t, \quad y(t)=t, \quad p=\frac{3}{2}, \quad q=3, \quad (a;b)=(0;1)$

10. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[5]{t}}, \quad y(t)=1-t, \quad p=4, \quad q=\frac{4}{3}, \quad (a;b)=(0;1)$

11. $x(t)=\ln(t+1), \quad y(t)=t, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(-1;0)$

12. $x(t)=t-1, \quad y(t)=e^{t}, \quad p=\frac{5}{4}, \quad q=5, \quad (a;b)=(-1;1)$

13. $x(t)=1+t^{2}, \quad y(t)=e^{t}, \quad p=\frac{3}{2}, \quad q=3, \quad (a;b)=(0;1)$

14. $x(t)=\sqrt{1-t^{2}}, \quad y(t)=t, \quad p=4, \quad q=\frac{4}{3}, \quad (a;b)=(0;1)$

15. $x(t)=\frac{1}{1+t^{2}}, \quad y(t)=t^{2}, \quad p=\frac{3}{2}, \quad q=3, \quad (a;b)=(0;1)$

16. $x(t)=\ln t, \quad y(t)=\sqrt{t}, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(0;1)$

17. $x(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}, \quad y(t)=t, \quad p=5, \quad q=\frac{5}{4}, \quad (a;b)=(0;1)$

18. $x(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{t+1}}, \quad y(t)=t, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(-1;1)$

19. $x(t)=\ln t, \quad y(t)=t^{2}, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(0;1)$

20. $x(t)=t, \quad y(t)=e^{t+1}, \quad p=\frac{3}{2}, \quad q=3, \quad (a;b)=(-1;1)$

Образец решения

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^{2}}}, \quad y(t)=t, \quad p=3, \quad q=\frac{3}{2}, \quad (a;b)=(-1;1)$$

При решении этой задачи следует использовать информацию, которую предоставляет §7 конспекта лекций: формулу для вычисления нормы в пространстве $L^{p}(a;b)$ и неравенство Гёльдера.

Для функций $x\in L^{p}(a;b)$ и $y\in L^{q}(a;b)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, неравенство Гёльдера выглядит следующим образом: $\|x\cdot y\|_{L^{1}(a;b)} \le \|x\|_{L^{p}(a;b)}\cdot\|y\|_{L^{q}(a;b)}$. При $p=3$, $q=\frac{3}{2}$ и $(a;b)=(-1;1)$ получаем

$$\int_{-1}^{1}|x(t)\cdot y(t)|dt \le \left(\int_{-1}^{1}|x(t)|^{3}dt\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\int_{-1}^{1}|y(t)|^{\frac{3}{2}}dt\right)^{\frac{2}{3}}. \qquad (1)$$

Вычислим отдельно каждую компоненту неравенства (1) для данных функций x и y.

$$\int_{-1}^{1}|x(t)\cdot y(t)|dt = \int_{-1}^{1}\frac{|t|}{\sqrt{1+t^{2}}}dt = 2\int_{0}^{1}\frac{t}{\sqrt{1+t^{2}}} = \int_{0}^{1}\frac{d(1+t^{2})}{\sqrt{1+t^{2}}} = 2\sqrt{1+t^{2}}\Big|_{0}^{1} = 2(\sqrt{2}-1);$$

$$\int_{-1}^{1}|x(t)|^{3}dt = \int_{-1}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1+t^{2})^{3}}} \overset{t=tgs}{=} \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos s ds = \sin s\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \sqrt{2};$$

$$\int_{-1}^{1}|y(t)|^{\frac{3}{2}}dt \;=\; \int_{-1}^{1}|t|^{\frac{3}{2}}dt \;=\; 2\int_{0}^{1}t^{\frac{3}{2}}dt \;=\; \frac{4}{5}.$$

Подставим полученные результаты в неравенство (1):

$$2\left(\sqrt{2}-1\right) \le \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Приближенные значения левой и правой части неравенства показывают, что оно верное:

$$0.828 \le 0.967.$$

28. Определить, принадлежит ли бесконечная числовая последовательность x шару $B_1(0)$ в пространстве l^2.

1. $x=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{9}},\frac{3}{\sqrt{27}},\frac{4}{\sqrt{81}},\ldots\right)$

2. $x=\left\{\frac{\sqrt{2^k}}{\sqrt{k!}}\cos\frac{\pi k}{3}\right\}_{k=1}^{\infty}$

3. $x=\left\{\frac{1}{3^{k-1}}\sin\frac{\pi k}{3}\right\}_{k=1}^{\infty}$

4. $x=\left\{\frac{1}{k}\left(\sin k+\cos\frac{k}{2}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$

5. $x=\left\{\sqrt{\frac{2^{k-1}}{k!}}\cos\frac{\pi k}{3}\right\}_{k=1}^{\infty}$

6. $x=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{9},0,\frac{16}{81},\frac{64}{243},0,\ldots\right)$

7. $x=\left\{\frac{1}{2^k}\sin\frac{\pi k}{3}\right\}_{k=0}^{\infty}$

8. $x=\left\{\sqrt{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}\right\}_{k=2}^{\infty}$

9. $x=\left\{\frac{2}{k}\cos\frac{k}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

10. $x=\left(\sin\frac{1}{2},\sin\frac{1}{4},\sin\frac{1}{8},\sin\frac{1}{16},\ldots\right)$

11. $x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{2}{\sqrt{4}},\frac{3}{\sqrt{8}},\frac{4}{\sqrt{16}},\ldots\right)$

12. $x=\left\{\frac{2^k}{\sqrt{5^k}}\cos\frac{\pi k}{3}\right\}_{k=1}^{\infty}$

13. $x=\left\{\frac{2^k\cdot arctg\,(k+1)}{3^k}\right\}_{k=0}^{\infty}$

14. $x=\left\{\sqrt{2}\sin\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

15. $x=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{\sqrt{16}},0,\frac{1}{\sqrt{64}},\frac{1}{\sqrt{128}},0,\ldots\right)$

16. $x=\left\{\frac{1}{\sqrt{k!}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$

17. $x=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},-\frac{1}{8},\ldots\right)$

18. $x=\left(\frac{arctg1}{\sqrt{1}},\frac{arctg\,2}{\sqrt{2}},\frac{arctg\,3}{\sqrt{4}},\frac{arctg\,4}{\sqrt{8}},\ldots\right)$

19. $x=\left(\sin\frac{2}{3},\sin\frac{4}{9},\sin\frac{8}{27},\sin\frac{16}{81},\ldots\right)$

20. $x=\left\{\frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$

Указание к решению

Решение этой задачи опирается на определение шара в нормированном пространстве и формулу для вычисления нормы в пространстве l^2, которые приведены в §7 конспекта лекций. Числовая последовательность x принадлежит единичному шару с центром в нуле, если длина (норма) x меньше 1:

$$x \in B_1(0) \iff \|x\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} < 1 \iff \|x\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < 1.$$

$$x \notin B_1(0) \iff \|x\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \geq 1 \iff \|x\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \geq 1.$$

Следовательно, нужно вычислить или оценить сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$.

Образец №1 решения

$$x = \left\{ \frac{k+1}{\sqrt{5^k}} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Оценим снизу сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$, отбросив все его слагаемые, начиная с третьего:

$$\|x\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{5^k} = \frac{4}{5} + \frac{9}{25} + \frac{16}{125} + \frac{25}{625} + \ldots > \frac{4}{5} + \frac{9}{25} = \frac{29}{25} > 1.$$

Таким образом, $x \notin B_1(0)$ в пространстве l^2.

Образец №2 решения

$$x = \left(\sin\frac{1}{2\sqrt{1}}, \sin\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sin\frac{1}{2\sqrt{6}}, \sin\frac{1}{2\sqrt{24}}, \ldots \right)$$

Найдем формулу для общего члена последовательности x:

$$x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \ x_k = \sin\frac{1}{2\sqrt{k!}}.$$

Составим числовой ряд

$$\|x\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{2\sqrt{k!}}.$$

Оценим сверху сумму этого ряда, используя неравенство $\sin\alpha < \alpha$, которое верно для любых положительных α:

$$\sin^2\frac{1}{2\sqrt{k!}} < \frac{1}{4k!}.$$

Тогда

$$\|x\|_{l^2}^2 < \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{4}(e-1) < 1.$$

Таким образом, $x \in B_1(0)$ в пространстве l^2.

29. Найти скалярное произведение бесконечных числовых последовательностей x и y в пространстве l^2.

1. $x=\left(-1,\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27},\ldots\right),\quad y=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ldots\right)$

2. $x=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\right),\quad y=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right)$

3. $x=\left\{\frac{1}{2^k}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad y=\left(\frac{1}{2^1},\frac{1}{3^2},\frac{1}{2^3},\frac{1}{3^4},\frac{1}{2^5},\ldots\right)$

4. $x=\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\ldots\right),\quad y=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},-\frac{1}{6},\ldots\right)$

5. $x=\left\{\frac{3^k}{(k-1)!}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad y=\left\{-\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

6. $x=\left\{(-1)^k\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2k}\right\}_{k=0}^{\infty},\quad y=\left\{\frac{1}{(2k)!}\right\}_{k=0}^{\infty}$

7. $x=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{8},0,\frac{1}{16},\ldots\right),\quad y=\left(\frac{1}{3},0,0,\frac{1}{9},0,0,\frac{1}{27},0,0,\frac{1}{81},\ldots\right)$

8. $x=\left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243},\ldots\right),\quad y=\left(0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4},0,-\frac{1}{8},\ldots\right)$

9. $x=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},-\frac{1}{16},-\frac{1}{32},-\frac{1}{64},\ldots\right),\quad y=\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\right)$

10. $x=\left\{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2k+1}\right\}_{k=0}^{\infty},\quad y=\left\{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right\}_{k=0}^{\infty}$

11. $x=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\ldots\right),\quad y=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\right)$

12. $x=\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\frac{1}{720},\ldots\right),\quad y=\left(1,0,-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,0,\left(\frac{\pi}{4}\right)^4,0,-\left(\frac{\pi}{4}\right)^6,\ldots\right)$

13. $x=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},-\frac{1}{32},\ldots\right),\quad y=\left(1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\right)$

14. $x=\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=2}^{\infty},\quad y=\left\{\frac{1}{k-1}\right\}_{k=2}^{\infty}$

15. $x=\left\{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}\right\}_{k=0}^{\infty},\quad y=\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k+1}\right\}_{k=0}^{\infty}$

16. $x=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right\}_{k=1}^{\infty},\quad y=\left\{-\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$

17. $x=\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},-\frac{1}{32},\ldots\right),\quad y=\left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\ldots\right)$

18. $x=\left(4,-2,1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\ldots\right)$, $y=\left(-3,1,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27},\ldots\right)$

19. $x=\left(\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{1\cdot 2},\dfrac{1}{1\cdot 2},\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ldots\right)$, $y=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3\cdot 4},\dfrac{1}{4\cdot 5},\dfrac{1}{4\cdot 5\cdot 6},\ldots\right)$

20. $x=\left(1,\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{9},\dfrac{8}{27},\dfrac{16}{81}\ldots\right)$, $y=\left(1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16}\ldots\right)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать формулу для вычисления скалярного произведения в пространстве l^2, которая приведена в конспекте лекций, §8, пункт 8.2. Вычисление скалярного произведения для двух числовых последовательностей x и y сводится к вычислению суммы числового ряда. Сумма числового ряда может быть найдена непосредственно по определению (как предел последовательности частичных сумм) либо с использованием известных формул. В данной задаче может понадобиться формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии и стандартные разложения функций в ряд Тейлора (например, экспоненты, синуса, косинуса, натурального логарифма).

30. Записать неравенство Коши – Буняковского в пространстве $L^2(a;b)$ и убедиться, что оно выполнено для данных функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$.

1. $x(t)=\dfrac{1}{\sin t}$, $y(t)=\cos t$, $(a;b)=\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$
2. $x(t)=t^2$, $y(t)=\ln t$, $(a;b)=(0;1)$
3. $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$, $y(t)=t+1$, $(a;b)=(0;8)$
4. $x(t)=\cos\dfrac{t}{2}$, $y(t)=\sin\dfrac{t}{2}$, $(a;b)=(0;\pi)$
5. $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t+1}}$, $y(t)=t+2$, $(a;b)=(-1;0)$
6. $x(t)=\cos t$, $y(t)=t$, $(a;b)=(0;\pi)$
7. $x(t)=\ln t$, $y(t)=\sqrt{t}$, $(a;b)=(0;1)$
8. $x(t)=\dfrac{1}{t+1}$, $y(t)=t^2$, $(a;b)=(0;2)$
9. $x(t)=t$, $y(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t-1}}$, $(a;b)=(1;2)$
10. $x(t)=\sqrt{1+t^2}$, $y(t)=t$, $(a;b)=(-1;1)$
11. $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}+1}$, $y(t)=\sqrt{t}-1$, $(a;b)=(0;9)$
12. $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-t}}$, $y(t)=t$, $(a;b)=(0;1)$

13. $x(t)=\dfrac{1}{\cos t}$, $y(t)=\sin t$, $(a;b)=\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

14. $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $(a;b)=(0;\pi)$

15. $x(t)=t$, $y(t)=\ln t$, $(a;b)=(0;1)$

16. $x(t)=t$, $y(t)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t-1}}$, $(a;b)=(1;2)$

17. $x(t)=\sin t$, $y(t)=t$, $(a;b)=(0;\pi)$

18. $x(t)=\sqrt{1-t^3}$, $y(t)=t^2$, $(a;b)=(0;1)$

19. $x(t)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{t}}$, $y(t)=t+1$, $(a;b)=(0;1)$

20. $x(t)=t$, $y(t)=\dfrac{1}{1+\sqrt{t}}$, $(a;b)=(0;1)$

Указание к решению

При решении этой задачи следует использовать информацию, которую предоставляет §8 конспекта лекций: неравенство Коши – Буняковского, формулы для вычисления нормы и скалярного произведения в пространстве $L^2(a;b)$.