Практическое занятие № 16

Тема: Предметных задачи, описывающие реальный физический процесс, решение которых сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных в MathCad

Цель: Выработать практические навыки решения прикладных задач в MathCad

Во многих случаях для описания физических процессов используют уравнений с частными производными до второго порядка включительно.

Так, например, изучение свободных колебаний различной природы приводит к *волновым уравнениям* вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

где $u(x,y,z,t)$ – функция, описывающая волновой процесс, x, y, z – координаты, c – скорость распространения волны в данной среде, t – время. Оператор $\left(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2\right)$ принято обозначать значком Δ, который в этом случае носит название оператора Лапласа.

Процессы распространения тепловой энергии описываются *уравнением теплопроводности*

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}-k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=Q, \qquad (2)$$

где ρ и C – плотность и теплоемкость вещества, T – температура, k – коэффициент теплопроводности, Q – плотность источников тепла.

Анализ стационарных состояний, например, статических тепловых, электрических, магнитных полей или деформаций при статических нагрузках проводят, используя *уравнение Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x,y,z), \qquad (3)$$

где $u(x,y,z)$ – функция, описывающая статическое поле, $f(x,y,z)$ – распределенные источники. Если $f(x,y,z)=0$, то (3) обращается в *уравнение Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\ . \qquad (4)$$

Для решения уравнения Пуассона (3) или Лапласа (4) на области, имеющей квадратную форму, в пакете MathCAD служат функции relax и multigrid.

Функция relax использует метод релаксации для нахождения приближенного решения. При этом уравнение Пуассона представляется в виде (см. (10)):

$$a_{j,k}u_{j+1,k}+b_{j,k}u_{j-1,k}+c_{j,k}u_{1,k+1}+d_{j,k}u_{j,k-1}+e_{j,k}u_{j,k}=f_{j,k}\ .$$

Обращение к функции relax выполняется следующим образом:

relax(a, b, c, d, e, f, u0, R) ,

где a, b, c, d, e – квадратные матрицы одинакового размера, содержащие коэффициенты вышеприведенного уравнения, f – квадратная матрица, содержащая значения правой части уравнения в точках области, в которой ищется решение, u0 – квадратная матрица, содержащая граничные значения решения на границе области и начальное приближение для решения внутри области, R – спектральный радиус итераций Якоби. Параметр R управляет сходимостью алгоритма релаксации. Оптимальное значение R зависит от параметров задачи и выбирается в пределах $0 < R < 1$.

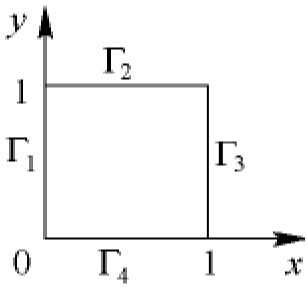


Рис. 10. Модель пластины

Рассмотрим пример с использованием функции relax. Найдем распределение температуры $T(x,y)$ на тонкой квадратной пластине (рис.10). Распределение описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0\,.$$

Заданы следующие граничные условия: на левой стороне пластины $T(\Gamma_1)=273+97y^3$ К; на верхней стороне – $T(\Gamma_2)=273+85x^2$ К; на правой стороне – $T(\Gamma_3)=358-28y^2$ К; на нижней стороне – $T(\Gamma_4)=350+20\cos(\pi x)$ К.

Запишем решение задачи в MathCAD следующим образом.

Формирование равномерной сетки

$\Delta x := 0.1 \quad \Delta y := 0.1 \qquad i := 0..10 \quad j := 0..10 \qquad x_i := \Delta x\cdot i \quad y_j := \Delta y\cdot j$

Граничные условия

$\Gamma1(y) := 273 + 97\cdot y^3 \quad \Gamma2(x) := 273 + 85\cdot x^2 \quad \Gamma3(y) := 358 - 28\cdot y^2 \quad \Gamma4(x) := 350 + 20\cdot\cos(\pi\cdot x)$

$T_{j,0} := \Gamma1(y_j) \qquad T_{0,i} := \Gamma2(x_i) \qquad T_{j,10} := \Gamma3(y_j) \qquad T_{10,i} := \Gamma4(x_i)$

Коэффициенты дифференциального уравнения

$a_{j,i} := 1 \qquad b_{j,i} := 1 \qquad c_{j,i} := 1 \qquad d_{j,i} := 1 \qquad e_{j,i} := -4 \qquad f_{j,i} := 0$

Решение уравнения

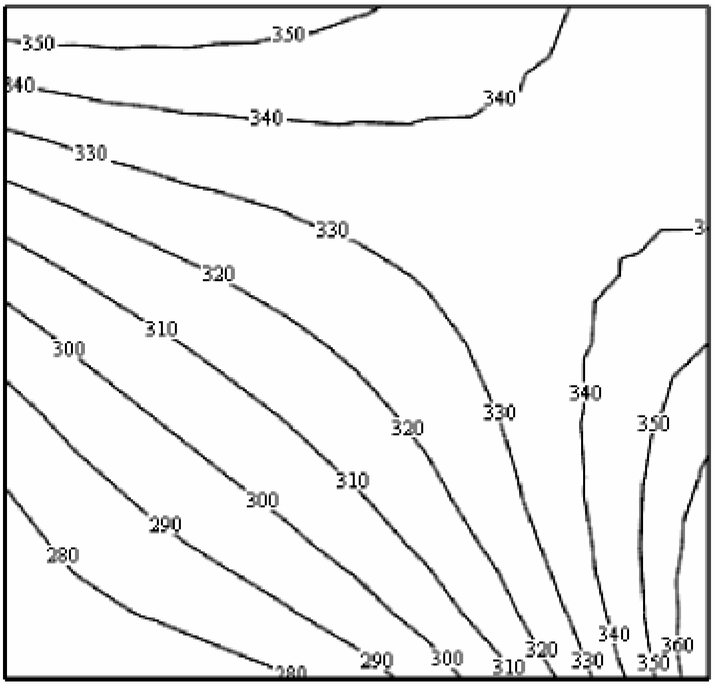
$R := 0.5 \qquad T := \mathrm{relax}(a,b,c,d,e,f,T,R)$

Результат – матрица значений температуры в узлах сетки

$$T = \begin{pmatrix} 273 & 273.9 & 276.4 & 280.6 & 286.6 & 294.3 & 303.6 & 314.6 & 327.4 & 341.9 & 358 \\ 273.1 & 277.4 & 282.1 & 287.5 & 293.9 & 301.4 & 310.2 & 320.2 & 331.5 & 344.1 & 357.7 \\ 273.8 & 280.6 & 287 & 293.4 & 300.1 & 307.4 & 315.5 & 324.5 & 334.4 & 345.2 & 356.9 \\ 275.6 & 284.4 & 292 & 298.9 & 305.7 & 312.6 & 319.9 & 327.8 & 336.3 & 345.6 & 355.5 \\ 279.2 & 289.2 & 297.5 & 304.7 & 311.2 & 317.5 & 323.8 & 330.5 & 337.6 & 345.3 & 353.5 \\ 285.1 & 295.8 & 304.2 & 311.1 & 316.9 & 322.2 & 327.4 & 332.7 & 338.3 & 344.4 & 351 \\ 294 & 304.5 & 312.5 & 318.5 & 323.2 & 327.2 & 330.8 & 334.5 & 338.5 & 343 & 347.9 \\ 306.3 & 316 & 322.6 & 327.1 & 330.2 & 332.4 & 334.2 & 336.1 & 338.3 & 341 & 344.3 \\ 322.7 & 330.4 & 335 & 337.2 & 338 & 338 & 337.6 & 337.4 & 337.6 & 338.5 & 340.1 \\ 343.7 & 348.2 & 349.5 & 348.8 & 346.7 & 343.9 & 340.9 & 338.2 & 336.2 & 335.2 & 335.3 \\ 370 & 369 & 366.2 & 361.8 & 356.2 & 350 & 343.8 & 338.2 & 333.8 & 331 & 330 \end{pmatrix}$$

Распределение температуры по пластине представлено на рис. 11.

\



T

Рис. 11. Распределение температуры по пластине

В приведенном примере отсчет узлов сетки начинается с индексов $i = 0$, $j = 0$, так как в MathCAD по умолчанию нумерация элементов массивов начинается с нуля. При необходимости можно ввести нумерацию начиная с единицы, задав соответствующий параметр ORIGIN = 1.

В следующем примере рассмотрим расчет колебаний $u(x,t)$ тонкого однородного по длине стержня методом конечных разностей (см. п. 1.2.3). Закрепление концов стержня будем полагать жестким, что соответствует нулевому сдвигу на концах стержня: $u(x=0,t) = 0$ и $u(x=L,t) = 0$, где $x = 0$ и $x = L$ – координаты концов стержня.

Предположим, что деформация стержня и начальная скорость его движения $v(x)$ в момент времени $t = 0$ соответственно равны

$$u(x, t=0) = f_д(x) = A\sin\left(\pi\frac{x}{L}\right), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v(x)\big|_{t=0} = 0,$$

где $A = 0{,}002$ м. Аналогично тому, как это было сделано в п. 1.2.3, определим деформацию стержня $u_{i,2}$ в момент времени $t = \Delta t$ (см. (15)):

$$\text{так как } \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{i,2} - u_{i,1}}{\Delta t} = v_{i,1}, \quad \text{то} \quad u_{i,2} = u_{i,1} + v_{i,1}\Delta t = u_{i,1},$$

где $v_{i,1} = v(x) = 0$ при $t = 0$.

Зададим исходные данные к расчету: длина стержня $L = 0{,}05$ м; модуль упругости $E = 2\cdot10^{11}$ Н/м^2; плотность материала $\rho = 8\cdot10^3$ кг/м^3.

Взяв шаг сетки по координате x равным $\Delta x = L\ /\ N_i = L\ /\ 50 = 10^{-3}$ м (где N_i – количество шагов разбиения по x) и шаг по времени $\Delta t = \left(2L\sqrt{\rho/E}\right)\cdot 0{,}01 = 2\cdot10^{-7}$ с, найдем решение:

$$L := 0.05 \qquad E := 2\cdot10^{11} \qquad \rho := 8\cdot10^{3} \qquad A := 0.002$$

$$Ni := 50 \qquad Nj := 250 \qquad \Delta x := \frac{L}{Ni} \qquad \Delta t := \left(2\cdot L\cdot\sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)\cdot 0.01 \qquad \beta := \frac{\Delta t}{\Delta x}\cdot\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \beta = 1$$

$$
\mathrm{solve}(A, \beta, Ni, Nj) := \left|\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..Ni \\
\quad \left|\begin{array}{l} u_{i,0} \leftarrow A\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi}{Ni}\right) \\ u_{i,1} \leftarrow A\cdot\sin\left(\frac{i\cdot\pi}{Ni}\right) \end{array}\right. \\
\text{for } j \in 0..Nj \\
\quad \left|\begin{array}{l} u_{0,j} \leftarrow 0 \\ u_{Ni,j} \leftarrow 0 \end{array}\right. \\
\text{for } j \in 2..Nj \\
\quad \text{for } i \in 1..Ni-1 \\
\qquad u_{i,j} \leftarrow 2\cdot\left(1-\beta^2\right)\cdot u_{i,j-1} + \beta^2\cdot\left(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}\right) - u_{i,j-2} \\
u
\end{array}\right.
$$

$$S := \mathrm{solve}(A, \beta, Ni, Nj)$$

Форма рассчитанных колебаний стержня показана на рис. 12.

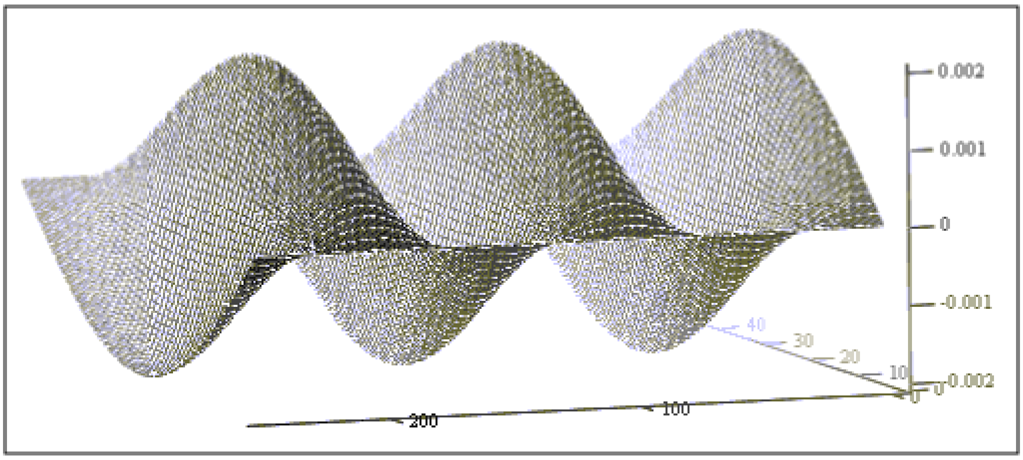


Рис. 12. Колебания тонкого стержня

Для решения уравнения параболического типа (см. п. 1.2.4) может быть использована аналогичная схема расчета.

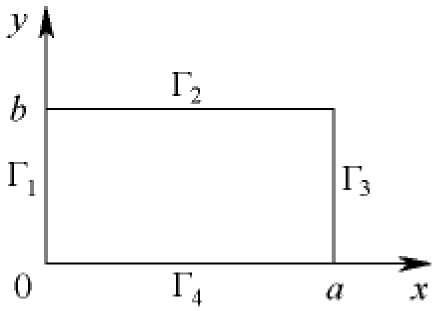
Указания к выполнению работы

1. Формализуйте задачу для решения в MathCad. При необходимости произведите нормировку дифференциального уравнения в частных производных и другие преобразования, облегчающие решение в MathCad.

2. Обратите особое внимание на выбор параметров сетки в методах конечных разностей и конечных элементов.

3. Решите задачу с помощью пакета MathCad.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ



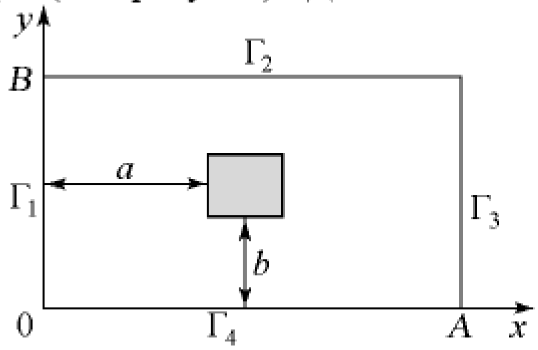
Задание 1. Распределение температуры $T(x,y)$ на тонкой пластине прямоугольной формы описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 .$$

Найдите распределение $T(x,y)$. Размеры a, b и граничные условия указаны в таблице.

Пара-метр	Вариант					
	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
a , мм	24	25	60	30	25	24
b , мм	10	15	48	20	15	10
$T(\Gamma_1)$, °C	20	$25+60\dfrac{y}{b}$	80	$15+80\dfrac{y}{b}$	$80-70\left(\dfrac{y}{b}\right)^2$	75
$T(\Gamma_2)$, °C	$20+80\dfrac{x}{a}$	85	$80-80\dfrac{x}{a}$	95	10	$75-75\dfrac{x}{a}$
$T(\Gamma_3)$, °C	100	$25+60\left(\dfrac{y}{b}\right)^2$	0	$15+80\left(\dfrac{y}{b}\right)^3$	$80-70\dfrac{y}{b}$	0
$T(\Gamma_4)$, °C	$20+80\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$	25	$80-80\left(\dfrac{x}{a}\right)^3$	15	80	$75-75\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$

Задание 2. На подложке интегральной микросхемы располагается кристалл планарного биполярного транзистора (см. рисунок). Для описания распределения температуры в структуре используется уравнение Лапласа:

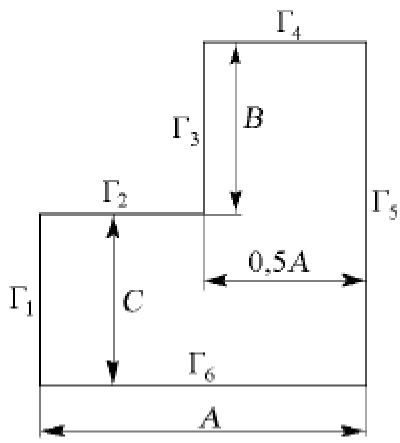


$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,.$$

Подложка прямоугольной формы имеет размеры $A \times B$. Предполагается, что транзистор в объеме и на своей геометрической границе имеет температуру $T_{\text{Т}}$. Требуется определить распределение температуры по всей подложке. Размеры транзистора – 0,6 × 0,6 мм. Граничные условия, а также размеры A и B, a и b указаны в таблице.

Параметр	Вариант					
	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
A, мм	8	6	24	12	7	4
B, мм	5	5	10	10	5	6
a, мм	2	3	7	4	2,5	1,5
b, мм	2	2	4	6	1,5	3
$T_{\text{Т}}$, °C	100	120	110	120	110	90
$T(\Gamma_1)$, °C	0	0	20	10	25	30
$T(\Gamma_2)$, °C	0	10	20	20	45	20
$T(\Gamma_3)$, °C	0	20	20	10	25	30
$T(\Gamma_4)$, °C	0	10	20	0	15	55

Задание 3. Прямоугольная металлическая пластина с вырезом (см. рисунок) используется как теплоотводящий элемент. В угловом вырезе пластины (границы Γ_2 и Γ_3) расположен источник тепла. Распределение температуры $T(x,y)$ по площади пластины описывается уравнением Лапласа:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,.$$

Найдите распределение $T(x,y)$. Размеры A, B, C и граничные условия даны в таблице.

Параметр	Вариант					
	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
A, мм	200	180	120	150	100	210
B, мм	45	55	55	75	85	110
C, мм	65	70	55	45	70	80
$T(\Gamma_1)$, °C	30	35	29	28	35	40
$T(\Gamma_2)$, °C	60	65	60	70	65	0,29
$T(\Gamma_3)$, °C	60	65	60	70	65	0,29
$T(\Gamma_4)$, °C	30	35	29	28	35	40
$T(\Gamma_5)$, °C	20	25	20	25	20	25
$T(\Gamma_6)$, °C	20	25	20	25	20	25

Задание 4. Процесс передачи тепла в твердом веществе описывается уравнением теплопроводности

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \mathrm{div}\left[k\,\mathrm{grad}(T)\right] = Q,$$

где ρ и C – плотность и теплоемкость вещества, T – температура, k – коэффициент теплопроводности, Q – плотность источников тепла.

Рассчитайте процесс изменения температурного распределения $T(x,t)$ в стержне, при указанных в таблице данных. Длина стержня L = 1м. Значения температуры на левом и правом концах стержня соответственно $T(x=0) = T_0$ и $T(x=L) = T_L$. Объемные источники тепла отсутствуют: $Q = 0$.

Параметр	Вариант					
	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
ρ, кГ/м^3	$2{,}8\cdot10^3$	$3{,}5\cdot10^3$	$3{,}5\cdot10^3$	$2{,}9\cdot10^3$	$3\cdot10^3$	$3{,}5\cdot10^3$
C, Дж/Кг·К	880	140	250	300	330	440
k, Вт/м·К	75	210	100	80	150	180
T_0, °C	0	150	20	210	35	140
T_L, °C	100	10	120	70	65	5

Задание 5. Пространственное распределение концентрации некоторого вещества-примеси в неподвижной среде–"растворителе" описывается уравнением диффузии:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \mathrm{div}\left[D\,\mathrm{grad}(N)\right] = Q\,,$$

где N – объёмная концентрация, D – коэффициент диффузии, $D\ \mathrm{grad}(C)$ – плотность потока переноса примеси в процессе диффузии, Q – объёмная плотность источника примеси.

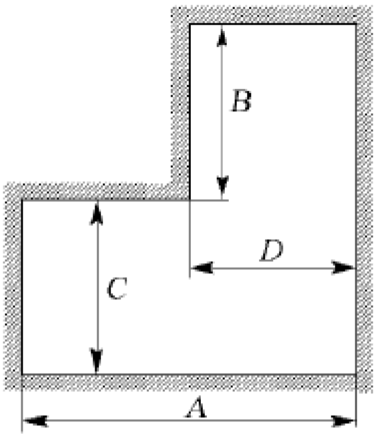
Проводится диффузионная обработка участка кремния, на котором предполагается разместить интегральную схему. Для этого на поверхность эпитаксиального слоя n-типа наносится акцепторная примесь, вследствие чего в приповерхностном слое объемная концентрация равна N_0. После этого для диффузионной обработки образец помещают в печь на 1час.

Рассчитайте процесс диффузии в образце $N(x,t)$ при указанных в таблице данных. Объемные источники диффузии отсутствуют: $Q = 0$.

Параметр	Вариант					
	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
D, м^2/с	$2{,}8\cdot10^{-6}$	$1{,}5\cdot10^{-5}$	$5{,}2\cdot10^{-6}$	$0{,}8\cdot10^{-5}$	$2{,}5\cdot10^{-6}$	$1{,}2\cdot10^{-6}$
N_0, м$^{-3}$	$1{,}9\cdot10^{25}$	$2{,}5\cdot10^{26}$	$3{,}3\cdot10^{25}$	$2{,}2\cdot10^{24}$	$4{,}5\cdot10^{25}$	$6{,}4\cdot10^{21}$

Задание 6. Металлическая пластина, жестко закрепленная по краям, как показано на рисунке, равномерно нагружена по площади (нагрузка – P). Прогиб пластины W описывается уравнением Пуассона:

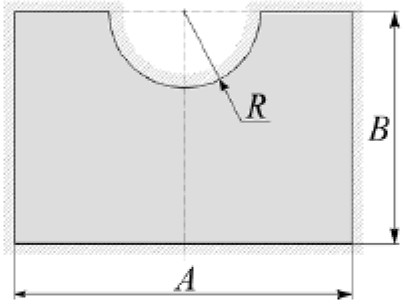
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{P}{D} ,$$



где $D = Eh^3 / \left[12\left(1-\nu^2\right)\right]$ – изгибная жесткость, E – модуль упругости, h – толщина пластины, ν – коэффициент Пуассона.

Рассчитайте прогиб пластины при исходных данных, приведенных в таблице. На краях пластины используйте граничное условие $W = 0$.

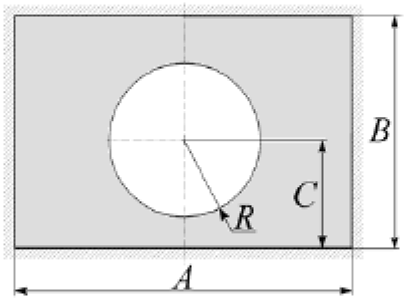
Параметр	Вариант					
	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6
A, мм	180	150	200	120	180	180
B, мм	65	75	125	55	55	100
C, мм	100	65	70	65	70	70
D, мм	50	60	80	60	90	80
P, Н	50	80	90	50	70	40
h, мм	5	4,5	5,5	7,5	6	1
E, Н/м^2	$70\cdot10^9$	$120\cdot10^9$	$40\cdot10^9$	$150\cdot10^9$	$200\cdot10^9$	$40\cdot10^9$
ν	0,28	0,35	0,29	0,28	0,35	0,29



Задание 7. Пластина прямоугольной формы с вырезом на одной из сторон жестко закреплена по краям и равномерно нагружена по площади. Прогиб пластины определяется из уравнения Пуассона (см. задание 6).

Рассчитайте прогиб $W(x,y)$ по данным, приведенным в таблице: A, B – размеры пластины; h – ее толщина; R – радиус выреза; P – нагрузка; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона. Граничное условие $W = 0$.

Параметр	Вариант					
	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6
A, мм	180	150	200	120	180	180
B, мм	65	75	140	100	90	100
R, мм	25	15	40	45	35	30
h, мм	2	5	4	6	5	2
P, Н	$70\cdot10^9$	$55\cdot10^9$	$65\cdot10^9$	$80\cdot10^9$	$110\cdot10^9$	$70\cdot10^9$
E, Н/м^2	40	70	140	50	120	60
ν	0,3	0,3	0,28	0,33	0,3	0,28



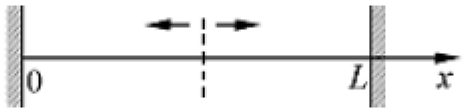
Задание 8. Пластина прямоугольной формы с отверстием в середине жестко закреплена по краям и равномерно нагружена по площади (нагрузка – P). Прогиб пластины $W(x,y)$ описывается уравнением Пуассона (см. задание 6).

Рассчитайте $W(x,y)$ по данным, приведенным в таблице: A и B – размеры пластины; C – расстояние от края пластины до центра отверстия; R – радиус отверстия; h – толщина пластины; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона. На краях пластины граничное условие $W = 0$, по краю отверстия – $\partial W / \partial n = 0$, где n – нормаль к краю отверстия.

Параметр	Вариант					
	8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6
A, мм	150	90	120	200	100	120
B, мм	115	75	100	130	90	100
C, мм	55	35	60	80	35	50
R, мм	25	15	30	25	30	30
h, мм	1	2	1	2	3	2
P, Н	50	40	55	65	10	25
E, Н/м^2	$30\cdot10^9$	$40\cdot10^9$	$70\cdot10^9$	$40\cdot10^9$	$90\cdot10^9$	$50\cdot10^9$
ν	0,3	0,33	0,3	0,3	0,32	0,27

Задание 9. Продольные колебания $u(x,t)$ тяги описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$



где E – модуль упругости, ρ – плотность материала стержня. Тяга имеет длину L и закреплена на концах. Захватив тягу в центре (см. рисунок), ее деформируют так, что продольное перемещение становится равным Δu:

$$u(x,t=0) = \begin{cases} 2\Delta u\, x/L & \text{при} \quad 0 \le x \le L/2, \\ 2\Delta u(1 - x/L) & \text{при} \quad L/2 \le x \le L. \end{cases}$$

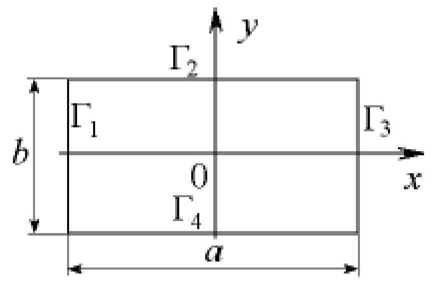
Затем тяга освобождается.

Рассчитайте колебания $u(x,t)$ при заданных в таблице параметрах.

Параметр	Вариант					
	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6
L, см	10	18	32	15	25	6
Δu, см	0,1	0,2	0,15	0,1	0,2	0,15
E, Н/м^2	$110\cdot10^9$	$120\cdot10^9$	$97\cdot10^9$	$86\cdot10^9$	$120\cdot10^9$	$82\cdot10^9$
ρ, кг/м^3	$4{,}3\cdot10^3$	$5{,}9\cdot10^3$	$6{,}7\cdot10^3$	$8{,}5\cdot10^3$	$7{,}4\cdot10^3$	$9{,}7\cdot10^3$

Задание 10. Колебания тонкой пластины (см. рисунок) без учета потерь на трение описываются нормированным волновым уравнением вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

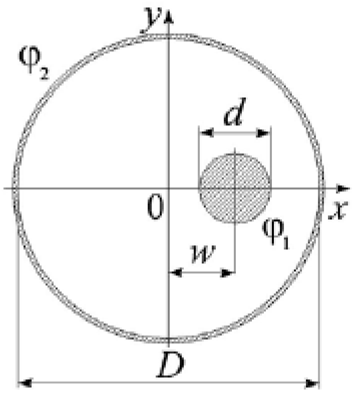


где $u(x,y,t)$ – деформация пластины, x, y – координаты, t – время.

Рассчитайте колебания при заданных в таблице размерах a и b, граничных Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 и начальных $u(t{=}0)$ и $\partial u/\partial t\,|_{t=0}$ условиях.

Параметр		Вариант					
		10-1	10-2	10-3	10-4	10-5	10-6
a, см		1	2	3	2	3	2
b, см		2	1	2	3	1	2
Граничные условия	Γ_1	$u = 0$		$\partial u/\partial n = 0$		$u = 0$	
	Γ_2	$\partial u/\partial n = 0$		$u = 0$		$\partial u/\partial n = 0$	
	Γ_3	$u = 0$		$\partial u/\partial n = 0$		$u = 0$	
	Γ_4	$\partial u/\partial n = 0$		$u = 0$		$\partial u/\partial n = 0$	
$u(t{=}0)$		$\operatorname{arctg}\left[\cos(\pi x/a)\right]$		$\operatorname{tg}\left[\cos(\pi y/b)\right]$		$2\cos(\pi x/a)$	
$\partial u/\partial t\,\vert_{t=0}$		$\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$		$\exp\left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$		$\operatorname{tg}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$	

Задание 11. Коаксиальный кабель со смещенной центральной жилой,



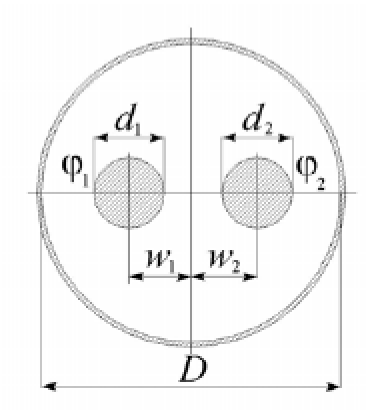
поперечное сечение которого показано на рисунке, имеет следующие размеры: d – диаметр центрального проводника; w – его смещение относительно оси экрана; D – диаметр экрана. Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ между проводником и экраном описывается уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 ,$$

где x и y – координаты.

Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ в сечении кабеля при указанных в таблице размерах d, w, D и потенциале центрального проводника φ_1. Потенциал экрана φ_2 примите равным нулю.

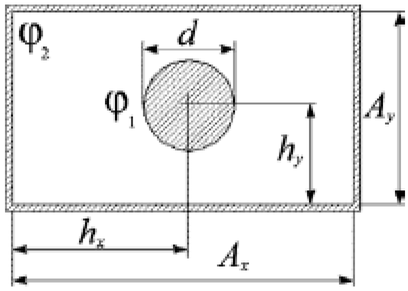
Параметр	Вариант					
	11-1	11-2	11-3	11-4	11-5	11-6
d, мм	7	4	3	2	2	3
w, мм	8	5	2	5	3	6
D, мм	30	20	10	15	12	25
φ_1, В	22	25	13	9	15	10



Задание 12. Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в поперечном сечении экранированной двухпроводной линии описывается уравнением Лапласа (см. предыдущее задание). Линия имеет следующие размеры (см. рисунок): d_1 и d_2 – диаметры проводников; w_1 и w_2 – их смещение относительно оси экрана; D – диаметр экрана.

Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ при указанных в таблице размерах и потенциалах проводников φ_1 и φ_2 относительно заземленного экрана.

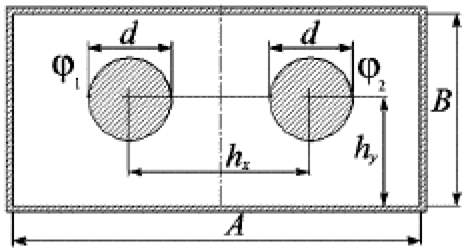
Параметр	Вариант					
	12-1	12-2	12-3	12-4	12-5	12-6
d_1, мм	3	4	3	2	2	3
d_2, мм	3	4	3	2	2	3
w_1, мм	5	4	3	4	3	6
w_2, мм	5	4	2	5	3	6
D, мм	30	20	15	20	12	25
φ_1, В	15	-10	13	-25	-15	4
φ_2 В	-15	9	-13	20	15	-9



Задание 13. Проводник круглого сечения расположен в прямоугольном металлическом экране (см. рисунок): A_x, A_y – ширина и высота экрана; d – диаметр проводника. Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ между проводником и экраном описывается уравнением Лапласа (см. задание 11).

Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ при указанных в таблице данных, где φ_1 и φ_2 – потенциалы проводника и экрана.

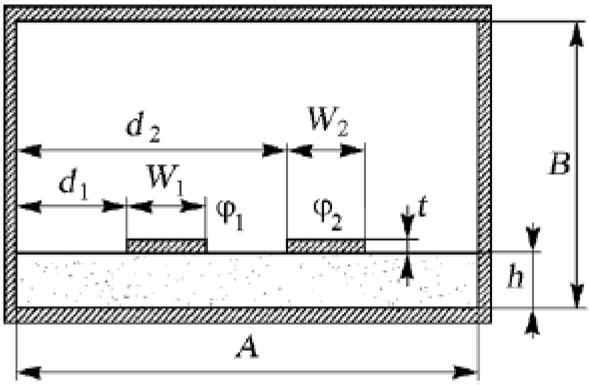
Параметр	Вариант					
	13-1	13-2	13-3	13-4	13-5	13-6
A_x, мм	22	9	9	10	8	12
A_y, мм	10	8	7	6	6	5
d, мм	3	2	1	2	1	0,5
h_x , мм	11	5	3	4	3	3
h_y , мм	5	4	3	3	5	2
φ_1, В	27	15	23	10	22	30
φ_2, В	5	0	0	5	1	5



Задание 14. Двухпроводная линия, размещенная в прямоугольном экране, имеет следующие размеры (см. рисунок): A и B – ширина и высота экрана; d – диаметр проводников; h_x – расстояние между проводниками; h_y – высота проводников относительно нижней стенки экрана. Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в поперечном сечении структуры описывается уравнением Лапласа (см. задание 11).

Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ при указанных в таблице исходных данных, где φ_1 и φ_2 – потенциалы первого и второго проводников. Электрический потенциал экрана примите равным нулю.

Параметр	Вариант					
	14-1	14-2	14-3	14-4	14-5	14-6
A, мм	22	19	9	15	8	12
B, мм	10	8	7	6	6	5
d, мм	3	2	1	2	1	1
h_x , мм	8	5	3	4	3	4
h_y , мм	12	8	3	8	5	5
φ_1, В	27	15	-23	10	22	30
φ_2, В	5	-15	12	5	-10	5

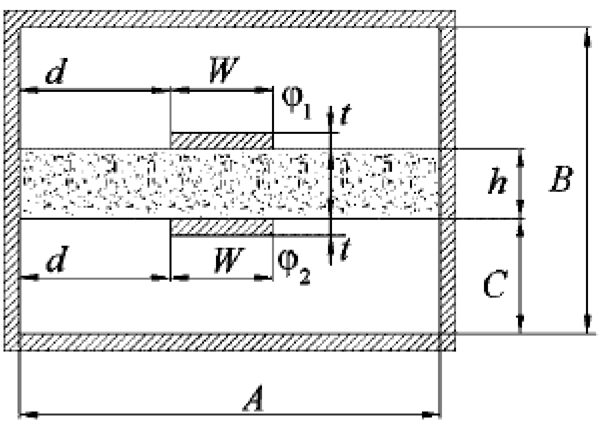


Задание 15. Два печатных проводника располагаются на диэлектрической плате, помещённой в металлический экран (см. рисунок): W_1 – ширина первого проводника; W_2 – ширина второго проводника; t – их толщина; d_1 и d_2 – расстояния от левой стенки экрана до проводников; h – толщина платы; A и B – ширина и высота экрана.

Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в структуре описывается уравнением Лапласа (см. задание 11).

Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ при указанных в таблице данных: φ_1 и φ_2 – потенциалы первого и второго печатных проводников; ε_1 – относительная диэлектрическая проницаемость материала платы. Толщина проводников $t = 0{,}1$ мм. Потенциал экрана примите равным нулю.

Параметр	Вариант					
	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	15-6
A, мм	40	45	25	35	25	30
B, мм	30	30	25	20	15	20
d_1, мм	11	12	6	10	9	8
W_1, мм	2	2	2	3	2	2
d_2, мм	17	22	12	18	16	16
W_2, мм	2	3	3	3	2	2
h, мм	2	1	2	2	1	1
φ_1, В	13	5	7	2	5	6
φ_2, В	21	2	3	8	7	2
ε_1	10	5	4	10	4	7



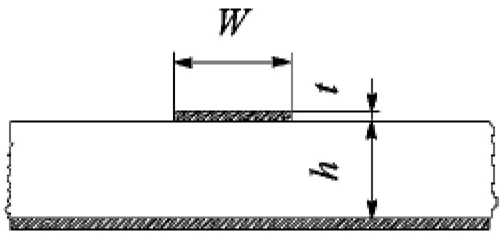
Задание 16. Два печатных проводника располагаются на диэлектрической плате, помещённой в металлический экран (см. рисунок): W – ширина проводников; t – их толщина; d – расстояние от левой стенки экрана до проводников; h – толщина платы; A и B – ширина и высота металлического экрана, C – расстояние от нижней стенки экрана до подложки.

Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в данной структуре описывается уравнением Лапласа (см. задание 11).

Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ при указанных в таблице исходных данных, где φ_1 и φ_2 – потенциалы верхнего и нижнего проводников; ε_1 – относительная диэлектрическая проницаемость материала платы. Толщина проводников $t = 0{,}1$ мм. Потенциал экрана примите равным нулю.

Параметр	Вариант					
	16-1	16-2	16-3	16-4	16-5	16-6
A, мм	40	30	25	30	44	35
B, мм	24	30	20	28	34	28
C, мм	15	12	10	10	20	12
h, мм	1	2	1	2	1	0,5
d, мм	16	15	10	12	26	15
W, мм	1	2	2	1	3	1
φ_1, В	3	8	2	9	2	7
φ_2, В	5	3	7	5	2	4
ε_1	4	5	5	4	4	7

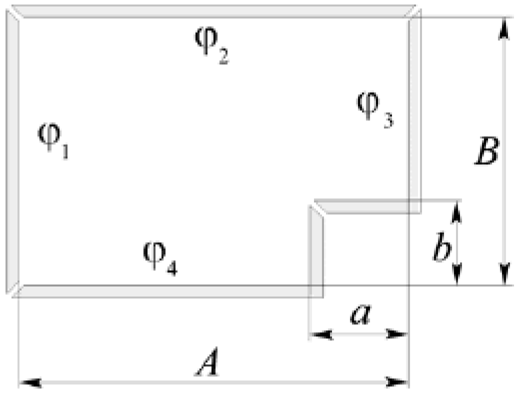
Задание 17. Металлическая микрополосковая линия располагается на диэлектрической подложке, нижняя сторона которой имеет металлизацию. Структура характеризуется следующими параметрами: W – ширина печатного проводника; t – толщина печатного проводника; h – толщина подложки, ε_1 – относительная диэлектрическая проницаемость материала подложки.



Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в поперечном сечении структуры описывается уравнением Лапласа (см. задание 11).

Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ при указанных в таблице размерах W, t, h и потенциале φ_1 верхнего электрода относительно нижней металлизации. При расчете полагайте, что микрополосковая линия располагается в заземленном экране (см. задание 16), расстояние до боковых и верхней стенок которого много больше поперечных размеров самой линии.

Параметр	Вариант					
	17-1	17-2	17-3	17-4	17-5	17-6
W, мм	1	1	1	1,2	0,5	2
t, мм	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2
h, мм	2	1	1	2	1	1
φ_1, В	13	5	7	2	5	6
ε_1	10	5	4	10	4	7

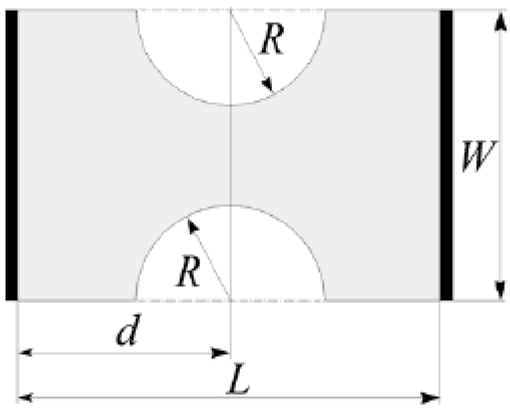


Задание 18. Четырехэлектродная структура, представленная на рисунке, окружает некоторую область, заполненную диэлектриком. Она характеризуется следующими основными параметрами: A и B – ширина и высота структуры; a – ширина уступа в правом нижнем углу; b – высота этого выступа; φ_1 – потенциал левого электрода; φ_2 – потенциал верхнего электрода; φ_3 – потенциал правого электрода; φ_4 – потенциал нижнего электрода.

Распределение электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в поперечном сечении структуры описывается уравнением Лапласа (см. задание 11). Рассчитайте распределение $\varphi(x,y)$ при указанных в таблице исходных данных. Размеры зазоров между электродами полагайте пренебрежимо малыми.

Параметр	Вариант					
	18-1	18-2	18-3	18-4	18-5	18-6
A, мм	10	40	20	20	15	15
B, мм	10	20	10	20	5	20
a, мм	5	5	2	3	2	5
b, мм	4	10	2	4	2	8
φ_1, В	9	9	2	11	7	9
φ_2, В	12	11	5	8	11	10
φ_3, В	15	15	7	9	15	15
φ_4, В	11	10	3	12	9	12

Задание 19. Проводящий слой планарного резистора (см. рисунок), имеет длину L и ширину W. На двух противоположных сторонах резистора располагаются металлические контакты. Они выделены на рисунке черным цветом. В средней части резистора на расстоянии d от левого контакта сделаны два круговых выреза радиусом R.



Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в резистивном слое описывается уравнением

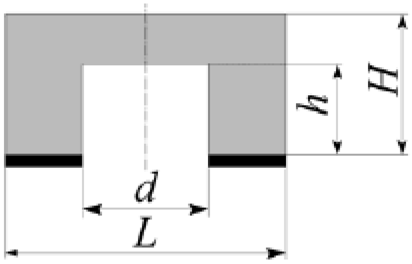
$$\sigma \operatorname{div}\left[\operatorname{grad}(\varphi)\right] = -j \ ,$$

где σ – удельная электрическая проводимость резистивного материала, φ – электрический потенциал, j – плотность тока.

Рассчитайте распределение в резистивном слое потенциала $\varphi(x,y)$, напряженности поля E = –grad (φ) и плотности тока j при указанных в таблице исходных данных, где U – приложенное к резистору напряжение. На свободных от контактов сторонах используйте условие Неймана $n \cdot \mathrm{grad}(\varphi)=0$.

Параметр	Вариант					
	19-1	19-2	19-3	19-4	19-5	19-6
L, мм	15	35	30	20	30	25
W, мм	15	30	20	20	18	20
D, мм	7	15	15	10	10	15
R, мм	3	5	5	4	2	6
σ, Ом·м	$2 \cdot 10^6$	10^6	10^6	$1{,}5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$1{,}8 \cdot 10^6$
U, В	4	5	4	2	3	5

Задание 20. Проводящий слой планарного резистора (см. рисунок), имеет П-образную форму. На двух противоположных сторонах резистора располагаются металлические контакты. Они выделены на рисунке черным цветом.



Распределение статического электрического потенциала $\varphi(x,y)$ в резистивном слое описывается уравнением

$$\sigma \,\mathrm{div}\left[\mathrm{grad}(\varphi)\right] = -j \;,$$

где σ – удельная электрическая проводимость резистивного материала, φ – электрический потенциал, j – плотность тока.

Рассчитайте распределение в резистивном слое потенциала $\varphi(x,y)$, напряженности поля E = –grad (φ) и плотности тока j при указанных в таблице исходных данных, где U – приложенное к резистору напряжение. На свободных от контактов сторонах используйте условие Неймана $n \cdot \mathrm{grad}(\varphi)=0$.

Параметр	Вариант					
	20-1	20-2	20-3	20-4	20-5	20-6
L, мм	15	20	25	30	20	35
d, мм	7	10	10	15	10	15
H, мм	7	15	15	10	20	30
h, мм	3	5	10	5	10	15
σ, Ом·м	$1{,}5 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	10^6	$1{,}2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$
U, В	5	4	3	5	4	2