В предлагаемом пособии содержится два типовых расчета:
1) типовой расчет по теории вероятностей,
2) типовой расчет по математической статистике.

Типовой расчет по теории вероятностей.

В данном типовом расчете предлагается 30 задач по каждой из 6 тем, перечисленных ниже. Перед задачами даны методические указания и там, где необходимо – примеры. Темы заданий

1. Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
2. Формула полной вероятности и формула Байеса.
3. Повторение опытов (схема Бернулли).
4. Дискретные случайные величины.
5. Непрерывные случайные величины.
6. Функции случайных величин.

Встречающиеся ниже ссылки даны на страницы учебного пособия “Элементы теории вероятностей и математической статистики”, СПбГИТМО, 2001 год, авторы – Н.А. Бодрова, Т.В. Родина, И.А. Суслина, под редакцией В.П. Смирнова.

Тема 1

Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Если результаты эксперимента можно представить в виде полной группы исходов, которые попарно несовместны и равновозможны, то вероятность события А равна отношению числа m *благоприятствующих этому событию исходов эксперимента к общему числу* n *всех возможных исходов, т.е.*

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

При решении задач иногда удобно найти вероятность противоположного события $\overline{A}$*, а затем найти вероятность события А по формуле* $P(A)=1-P(\overline{A})$*. Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

События А и В называются независимыми, если $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$*. Для независимых событий появление одного не меняет вероятности появления другого:* $P(A/B)=P(A)$ *и* $P(B/A)=P(B)$ (*см. с. 10-17 учебного пособия*).

Задача 1. В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали.

Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей окажет-ся стандартной.

Задача 2. Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0,9, для второго – 0,95, для третьего – 0,85.

Найти вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.

Задача 3. На складе имеются 8 изделий, 3 из них изготовлены заводом N.

Найти вероятность того, что среди 4 наудачу взятых изделий окажется не более половины, изготовленных заводом N.

Задача 4. У распространителя имеется 20 билетов книжной лотереи, среди которых 7 выигрышных. Куплено 3 билета.

Найти вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный.

Задача 5. Устройство секретного замка включает в себя 4 ячейки. В первой ячейке осуществляется набор одной из четырех букв ***A, B, C, D,*** в трех остальных – одной из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться). *Чему* равна вероятность того, что замок будет открыт с первой попытки?

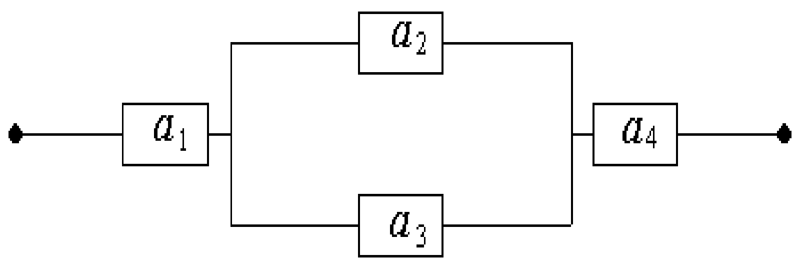
Задача 6. Имеются две урны. В первой находятся: один белый шар, 3 черных и 4 красных; во второй – 3 белых, 2 черных и 3 красных. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару, после чего сравнивают их цвета.

Найти вероятность того, что цвета извлеченных шаров совпадают.

Задача 7. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных.

Найти вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задача 8. Электросхема, состоящая из 4 элементов имеет вид



Выход из строя элементов – события независимые в совокупности.

Какова вероятность того, что схема обесточится, если вероятность выхода из строя элементов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ соответственно 0,1; 0,2; 0,3; 0,4.

Задача 9. Два охотника по одному разу стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в волка 0,7, для второго – 0,8.

Определить вероятность того, что в волка попадет хотя бы один охотник.

Задача 10. Ведется стрельба по самолету, уязвимым агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того чтобы вывести из строя самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При данных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна P_1, второго двигателя - P_2, кабины пилота - P_3. Агрегаты самолета поражаются независимо друг от друга.

Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

Задача 11. По мишени производятся три выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно $P_1 = 0,4$; $P_2 = 0,5$; $P_3 = 0,7$.

Какова вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени окажется точно одна пробоина.

Задача 12. Студент знает 20 из 25 вопросов программы.

Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

Задача 13. Определить вероятность того, что партия из ста изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приема допускается наличие бракованных изделий не более одного из пятидесяти.

Задача 14. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены его внимания потребует первый станок, равна 0,7, второй – 0,75, третий – 0,8.

Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют не менее двух станков.

Задача 15. В связке имеются пять различных ключей, из которых только одним можно отпереть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется.

Найти вероятность того, что для отпирания двери будет использовано не более двух ключей.

Задача 16. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4.

Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

Задача 17. Студенты выполняют экзаменационную работу в классе контролирующих машин. Работа состоит из трех задач. Для получения положительной оценки достаточно решить две. Для каждой задачи зашифровано пять ответов, из которых только один правильный. Студент N плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу.

Какова вероятность того, что он получит положительную оценку?

Задача 18. В электрическую цепь включены параллельно два прибора. Вероятность отказа первого прибора равна 0,1, второго 0,2.

Найти вероятность того, что откажет хотя бы один прибор этой цепи.

Задача 19. Предприятием послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй – 0,95, на третьей – 0,8, на четвертой – 0,6.

Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

Задача 20. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы одинакова, и равна 0,9, на третий – 0,8.

Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить, по крайней мере, на два вопроса билета.

Задача 21. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для каждой игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей, мячи бывшие в употреблении, от ни разу не использованных не отличаются.

Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется мячей, не побывавших в игре?

Задача 22. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что каждое из них имеет вероятность отказа за некоторое время, равную 0,2.

Требуется определить вероятность:

а) того, что откажет только одно устройство;

б) не откажет ни одно из устройств.

Задача 23. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наудачу.

Определить вероятность того, что ему придется звонить не более чем в четыре места.

Задача 24. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу 4 карты.

Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Задача 25. Вероятность поражения стрелком мишени при каждом выстреле равна 0,9.

Найти вероятность того, что в серии из четырех выстрелов будет меньше четырех промахов.

Задача 26. Двое играют в шахматы. Игра проводится до выигрыша одним из игроков двух партий подряд. Вероятность выигрыша партии каждым игроком равна 0,5 и не зависит от исхода предыдущих партий.

Найти вероятность того, что игра окончится до четвертой партии.

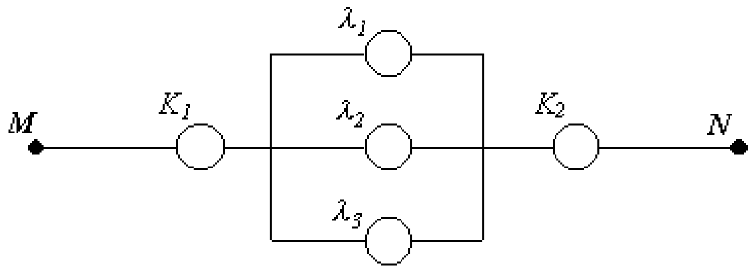
Задача 27. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью 0,95.

Найти вероятность того, что для ввода двигателя в работу придется включать зажигание не более трех раз.

Задача 28. Электрическая цепь между точками *M* и *N* составлена по схеме, приведенной на рисунке. Выход из строя за время *T* различных элементов цепи – независимые события, имеющие следующие вероятности:

элемент	K_1	K_2	λ_1	λ_2	λ_3
вероятность	0,6	0,5	0,4	0,7	0,9

Определить вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени.



Задача 29. Продукция может быть получена из доброкачественных деталей, изготовленных из заготовок с применением двух технологий; в первом случае заготовка проходит три технологические операции, вероятности получения брака при каждой из которых равны соответственно 0,1, 0,2, 0,3. Во втором случае имеются две операции, вероятности получения брака при ко-торых одинаковы и равны 0,3.

Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции из заготовки, если в первом случае для доброкачественной детали вероятность получения из нее первосортной продукции равна 0,9, а во втором 0,8.

Задача 30. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы за время ***T*** первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7 и 0,8.

Найти вероятности того, что в промежутке времени ***T*** будут безотказно работать:

а) только один элемент;

б) ровно два элемента.

Тема 2

Формула полной вероятности и формула Байеса

Будем говорить, что события H_1, H_2, ... H_n образуют <u>*полную группу*</u>*, если в результате эксперимента:*

-происходит одно из событий H_i, $i=1,\ldots, n$.

-события H_1, H_2, ... H_n попарно несовместны.

В этом случае имеем: $P(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1$, *и* <u>*вероятность произвольного события A*</u>*, произошедшего в условиях данного эксперимента может быть вычислена по формуле полной вероятности:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

События $H_1,\ldots,H_n$ часто называют <u>*гипотезами*</u> (*см. с. 21-23 учебного пособия*).

Пример 1: *В коробке находится 4 новых и 3 старых теннисных мяча. Для первой игры берут случайным образом 2 мяча, после игры кладут их обратно.*

Какова вероятность того, что 2 мяча, взятые для 2-ой игры будут новые?

Решение: *Рассмотрим следующие гипотезы:*

H_1 - для первой игры взяты 2 новых мяча;

H_2 - для первой игры взяты 1 новый и 1 старый мячи;

H_3 - для первой игры взяты 2 старых мяча.

Событие A заключается в том, что для второй игры взяли 2 новых мяча.

Используя классическое определение вероятности (слова – "случайным образом" позволяют считать, что исходы равновозможны) имеем:

$$P(H_1) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{4!\cdot 2!\cdot 5!}{2!\cdot 2!\cdot 7!} = \frac{2}{7};\quad P(H_2) = \frac{C_4^1\, C_3^1}{C_7^2} = \frac{4\cdot 3\cdot 2!\cdot 5!}{7!} = \frac{4}{7};$$

$$P(H_3) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3!\cdot 2!\cdot 5!}{2!\cdot 1!\cdot 7!} = \frac{1}{7};$$

$$P(A/H_1) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21};\quad P(A/H_2) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7};\qquad P(A/H_3) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}.$$

Отсюда: $$P(A) = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{21} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{7} = \frac{20}{147}.$$

Пусть $H_1, H_2, \ldots H_n$ - полная группа событий и известно, что в результате эксперимента произошло событие A, тогда условная вероятность того, что произошло событие H_i - одно из событий полной группы, вычисляется по формуле Байеса:
$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пример 2: *Два стрелка по одному разу стреляли по мишени. Известно, что один попадает с вероятностью 0,8; второй - с вероятностью 0,6. После стрельбы в мишени оказалась одна пробоина.*

Какова вероятность того, что попал второй стрелок?

Решение: *Выберем гипотезы следующим образом:*

H_1 - не попал ни первый стрелок, ни второй $\Rightarrow P(H_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$;

H_2 - попал первый стрелок и не попал второй $\Rightarrow P(H_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32$;

H_3 - не попал первый стрелок и попал второй $\Rightarrow P(H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$;

H_4 - попали оба стрелка $\Rightarrow P(H_4) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$.

Тогда, если A - событие, состоящее в том, что один стрелок попал, то:

$P(A/H_1) = 0$, $P(A/H_2) = 1$, $P(A/H_3) = 1$, $P(A/H_4) = 0$.

Очевидно, что нам надо вычислить вероятность события H_3 при условии, что произошло событие A:
$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) + P(H_4) \cdot P(A/H_4)} =$$
$$= \frac{0.12}{0.12 \cdot 0 + 0.32 \cdot 1 + 0.12 \cdot 1 + 0.48 \cdot 0} = \frac{0.12}{0.44} = \frac{3}{11}.$$

Замечание. *В рассмотренном примере мы воспользовались независимостью экспериментов: Ω_1 − стреляет первый стрелок и Ω_2 − стреляет второй стрелок, которая следует из того, что вероятности попаданий фиксированы.*

Задача 1. Два стрелка Иванов и Петров, имеющие по два заряда, поочерёдно стреляют в мишень. Вероятность попадания при одном выстреле равна 2/3 для первого стрелка и 5/6 для второго. Первый стрелок определяется по жребию. Для этого кидается монета и, если выпадает герб, то начинает Иванов, а, если цифра, то первым стреляет Петров. Выигрывает стрелок, попавший первым.

Какова вероятность выигрыша для Петрова?

Задача 2. Два стрелка ***A*** и ***B*** поочерёдно стреляют в мишень до первого попадания, но не более двух раз каждый. Вероятность попадания при одном выстреле для ***A*** равна 0,8, для ***B*** – 0,6. Первый стрелок определяется жребием: кидается монета и, если выпадает герб, то первым стреляет ***A***, если цифра, то ***B***. В результате стрельбы выиграл стрелок ***B***.

Какова вероятность, что он стрелял первым?

Задача 3. Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга, выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора 1-ой мишени для них 0,5 и 2/3 соответственно, а вероятность попадания в выбранную мишень 0,8 и 0,9.

Какова вероятность ровно одного попадания во вторую мишень?

Задача 4. Два игрока ***A*** и ***B*** один раз бросают кость и затем два раза монету. Если на кости выпадает 1 или 2, то выигрывает игрок ***A***, если при подбрасываниях монеты появится хотя бы один герб, и игрок ***B***, если гербов не появится. Если же на кости выпадает число, большее двух, то игрок ***A*** выигрывает, если появятся два герба, и игрок ***B*** в остальных случаях.

Справедлива ли игра?

Задача 5. В двух пакетах находятся конфеты. В первом пакете 16 штук сорта «Белочка» и 8 штук сорта «Жар-птица», во втором 15 сорта «Белочка» и 5 сорта «Жар-птица». Из первого пакета во второй переложили две конфеты, взятые случайным образом, содержимое второго пакета перемешали и вытащили оттуда одну конфету, которая оказалась «Жар-птицей».

Какова вероятность, что из первого пакета во второй переложили одну «Белочку» и одну «Жар-птицу»?

Задача 6. Берут две колоды карт по 52 карты и из первой во вторую перекладывают случайным образом 2 карты. Затем из второй колоды берётся одна карта.

Какова вероятность, что она окажется дамой?

Задача 7. Среди трёх игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестёрка появляется с вероятностью 1/3. Бросили две кости и выпали две шестерки.

Какова вероятность, что среди брошенных костей была фальшивая?

Задача 8. Ракета накрывает цель с вероятностью 2/3. По цели выпущено две ракеты. Известно, что при одном попадании цель поражается с вероятностью 1/2, а при двух с вероятностью $5/6$. Цель поражена.

Какова вероятность, что в неё попала ровно одна ракета?

Задача 9. Кость ***A*** имеет две белые и четыре красные грани, кость ***B*** две красные и четыре белые. Сначала бросается монета. Если выпадает герб, то бросают кость ***A***, если цифра, то кость ***B***.

Какова вероятность того, что выпадет красная грань?

Задача 10. 30% телевизоров поступает в магазин с первой фабрики, 20% со второй и остальные с третьей. Брак на этих фабриках составляет 5%, 3% и 4% соответственно. Купленный телевизор оказался бракованным.

Какова вероятность того, что он поступил с третьей фабрики?

Задача 11. Взяли две колоды по 52 карты и случайным образом переложили две карты из первой колоды во вторую. Затем из второй колоды вытащили одну карту, которая оказалась картой пиковой масти.

Какова вероятность того, что среди переложенных карт не было карт пиковой масти?

Задача 12. Готовясь к экзамену, студент должен был подготовить ответы на две серии вопросов, каждая из которых содержала по 10 вопросов. Он выучил 9 вопросов первой серии и 8 второй. Экзаменатор случайно выбирает серию вопросов и два вопроса из нее, на оба из которых студент должен ответить.

Каковы шансы, что студент сдаст экзамен?

Задача 13. В трёх одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 1 до 9 , во второй от 10 до 20 и в третьей от 21 до 30 включительно. Из случайно взятой урны берётся шар и оказывается, что его номер делится на 5.

Какова вероятность, что этот шар взят из первой урны?

Задача 14. В трёх одинаковых урнах находятся шары: в первой с номерами от 10 до 25 , во второй от 26 до 32 и в третьей от 33 до 45 включительно. Из случайно взятой урны берётся шар.

Какова вероятность, что его номер будет простым числом?

Задача 15. Игроки могут с равной вероятностью играть в одну из двух игр. В одной игре используется одна игральная кость, а в другой – две. Счёт в игре в первом случае равен количеству очков, выпавших на кости, а во втором – сумме очков, выпавших на обеих костях. Вы слышите, что выпало два очка.

Какова вероятность, что играют в игру с одной костью?

Задача 16. На трёх дочерей Аню, Катю и Анфису в семье возложена обязанность по мытью тарелок. Аня, как старшая, выполняет 40% всей работы, остальную работу Катя и Анфиса делят пополам. Вероятность того, что Аня разобьёт хотя бы одну тарелку равна 0,02, для Кати и Анфисы эта вероятность равна 0,03 и 0,02 соответственно. Родители слышали звон разбитой посуды.

Какова вероятность, что тарелки мыла Аня?

Задача 17. Первая урна содержит 3 красных, 2 белых и 1 синий шар. Вторая урна содержит 4 белых и 2 синих шара. Бросается игральная кость. Если на ней выпало 1 или 6 очков, вынимается шар из первой урны, в противном случае – из второй. Вытащен синий шар.

Какова вероятность, что он взят из второй урны?

Задача 18. Если при бросании кости выпадает больше 2-х очков, то вынимают 2 шара из первой урны, содержащей 1 красный и 4 чёрных шара. Иначе два шара берутся из второй урны, содержащей 3 красных и 2 чёрных шара. Вытащили 1 красный и 1 чёрный шар.

Какова вероятность, что они взяты из первой урны?

Задача 19. Имеются три одинаковых ящика. В первом ящике лежат 2 белых и 2 чёрных шара; во втором ящике - 3 чёрных; в третьем - 1 чёрный и 5 белых. Некто, случайным образом выбирая ящик, наугад вынимает из него шар.

Какова вероятность, что шар будет белый?

Задача 20. На шахматную доску 4×4 ставят два коня.

Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Задача 21. На шахматную доску 4×4 ставят два ферзя.

Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

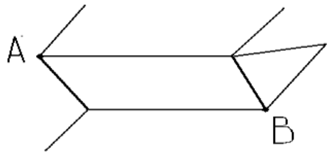
Задача 22. На шахматную доску 4×4 ставят два слона.

Какова вероятность того, что они не бьют друг друга?

Задача 23. На шахматную доску 4×4 ставят две ладьи.

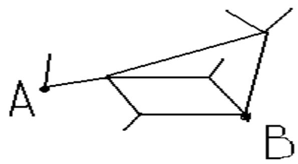
Какова вероятность того, что они бьют друг друга?

Задача 24. Некто, выходя из точки ***A,*** на перекрёстках равновероятно выбирает любую дорогу кроме той, по которой пришёл.



Какова для него вероятность попасть в точку ***B***?

Задача 25. Некто, выходя из точки ***A,*** на перекрёстках равновероятно выбирает любую дорогу кроме той, по которой пришёл.



Какова вероятность того, что он попадёт в точку ***B***?

Задача 26. На "жульнической" кости 5 и 6 очков выпадают с вероятностью $p(5) = p(6) = 1/3$. Остальные грани выпадают с равными вероятностями.

Какова вероятность выиграть этой костью против "честной" кости, если каждый игрок бросает свою кость один раз?

Задача 27. Половина всех арбузов поступает в магазин с 1 базы, 1/3 - со 2 базы, остальные - с 3 базы. Арбузы с повышенным содержанием нитратов составляют на 1 базе 15%, на 2 базе - 10%, на 3 - 20%.

Какова вероятность купить недоброкачественный арбуз?

Задача 28. В одном ящике было 3 чёрных и 2 белых шара, в другом - 1 черный и 4 белых. Некто унёс один шар, взяв его наугад из случайно выбранного ящика.

Какова теперь вероятность вынуть наугад чёрный шар?

Задача 29. Три стрелка случайным образом распределяют между собой 3 заряда, один из которых холостой. Стрелки попадают в мишень с вероятностями 1/2, 3/4 и 7/8 соответственно.

Какова вероятность хотя бы одного попадания в мишень?

Задача 30. Из 4-х игральных костей одна фальшивая. На ней 6 очков выпадает с вероятностью 1/3. При бросании случайно выбранной кости выпала шестёрка.

Какова вероятность того, что была выбрана фальшивая кость?

Тема 3

Повторение опытов (схема Бернулли).

Пусть проводятся n *независимых опытов (экспериментов), в каждом из которых событие* **A** *может наступить с вероятностью* p. *Обычно появление* **A** *называют успехом.*

Обозначим через $q = 1 - p$ *– вероятность того, что событие* **A** *не наступает (неудача), и через* $B_n(m)$ *– событие, заключающееся в том, что в серии из* n *опытов ровно* m *опытов закончатся успешно (ровно* m *раз произойдет событие* **A**).

Тогда для любого $m = 0, 1, \dots, n$ *справедлива формула Бернулли* (*см. с. 23 учебного пособия*). $P(B_n(m)) =$

$$C_n^m p^m q^{n-m}, \quad где \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример. *Пусть правильная монета подбрасывается 5 раз.*

Какова вероятность, что появилось больше гербов, чем цифр?

Решение. *Здесь событие A – появление герба при одном подбрасывании монеты.* $P(A)=1/2$ *в любом из 5 опытов (подбрасываний),* $n=5$, m *– количество появившихся гербов. Пусть B – событие, состоящее в том, что гербов появилось больше, чем цифр. Событию B соответствуют значения* m *: 3, 4 и 5, откуда по формуле Бернулли будем иметь*

$$P(B)= C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^1+C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^0=\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}.$$

Задача 1. Производиться испытание пяти приборов, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0,1.

Найти вероятность того, что хотя бы два прибора выйдут из строя при испытании.

Задача 2. Производиться 4 выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле 2/3.

Найти вероятность того, что в мишень попадут не менее 2 раз.

Задача 3. Прибор содержит шесть однотипных микросхем, вероятность выхода из строя каждой в течение одного месяца 0,2.

*Найти в*ероятность того, что в течение этого срока из строя выйдет не более половины микросхем.

Задача 4. Накопитель снабжает деталями 8 станков с ЧПУ. В течение 20 минут от каждого станка может поступить заявка на деталь с вероятностью 1/5.

Найти вероятность того, что за 20 минут на накопитель поступит не более трех заявок.

Задача 5. В ралли участвует 10 однотипных машин. Вероятность выхода из строя за период соревнований каждой из них 1/20.

Найти вероятность того, что к финишу придут не менее 8 машин.

Задача 6. Имеется 7 партий деталей, каждая из которых содержит 10% бракованных. Из каждой партии извлекают по 1 детали.

Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей не менее двух бракованных.

Задача *7*. Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объектами в течение некоторого времени. Контакт с каждым из них может быть потерян с вероятностью 0,2.

Найти вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет поддерживаться в течение всего времени.

Задача 8. Прибор состоит из шести однотипных блоков, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее трех из них. За год работы каждый из блоков выходит из строя с вероятностью 0,3.

Найти вероятность того, что за год работы прибор не выйдет из строя.

Задача 9. В семье пять детей. Пусть вероятности появления на свет девочки и мальчика полагаются равными.

Найти вероятность того, что в семье не более двух девочек.

Задача 10. Обрабатывающий центр снабжается заготовками от 10 однотипных накопителей, выдающих при поступлении запроса по одной детали. Вероятность того, что на момент запроса в накопителе имеется заготовка, равна 0,9. Экономически достаточная загрузка центра обеспечивается одновременным поступлением по запросам не менее трех деталей.

Найти вероятность того, что при очередном запросе будет обеспечена достаточная загрузка.

Задача 11. Вероятность поражения самолета средствами ПВО объекта 0,6

Найти вероятность того, что из 8 атакующих объект самолетов к нему прорвется не более шести.

Задача 12. Транспортные средства оптовой базы обеспечивают за день выполнение не более трех заявок. База обслуживает 7 магазинов. Вероятность заявки от каждого из них в течение дня равна 0,3.

Найти вероятность того, что все поступившие на базу в течение дня заявки будут выполнены.

Задача 13. Производиться испытание на " самовозгорание " пяти телевизоров. Прогонка продолжается двое суток. За указанное время каждый из телевизоров перегревается и "самовозгорается" с вероятностью 0,1.

Найти вероятность того, что на момент окончания испытаний сгорит не более двух телевизоров.

Задача 14. Из урны, содержащей 20% белых и 80% черных шаров, наудачу с последующим возвращением извлекают по одному шару.

Найти вероятность того, что среди извлеченных шаров будет не менее четырех белых, если процедуру повторяют пять раз.

Задача 15. На участке пять одинаковых станков. Вероятность того, что в произвольный момент каждый из них свободен и готов к обработке поступившей детали равна 1/5. На участок для обработки поступают две детали.

Найти вероятность того, что хотя бы одна из них будет сразу же принята к обработке.

Задача 16. Известно, что при прохождении некоторого пролива при плохих метеоусловиях терпит аварию каждое двадцатое судно.

Найти вероятность того, что из восьми вошедших в шторм в этот пролив судов хотя бы три выйдут их него неповрежденными.

Задача 17. Караван из 4 судов пересекает минное поле, вероятность подрыва для каждого из судов считается равной 0,1.

Найти вероятность того, что не менее половины судов уцелеет.

Задача 18. Центр наблюдения поддерживает связь с шестью самолетами, выполняющими учебное задание при условии создания противником активных помех. Связь после ее нарушения не восстанавливается. Вероятность потери связи за период выполнения задания 0,2.

Найти вероятность того, что в момент окончания задания центр потеряет связь не более чем с третью самолетов.

Задача 19. Обрабатывающий участок состоит из пяти однотипных станков. Вероятность того, что станок исправен 0,8. Плановое задание может быть выполнено, если исправно не менее трех станков.

Найти вероятность того, что плановое задание не будет выполнено.

Задача 20. Предварительный анализ показал, что для поражения военного объекта противника необходим прорыв к нему 4 бомбардировщиков. Самолет поражается ПВО объекта с вероятностью 0,8. Атаку ведут 8 самолетов.

Найти вероятность того, что объект будет поражен.

Задача 21. Для разорения страховой фирмы необходимо, чтобы в течение года из 10 застрахованных судов хотя бы 5 затонули. Вероятность потерпеть аварию для каждого из судов 1/20.

Найти вероятность того, что страховая фирма в течение года не разориться.

Задача 22. Страховая фирма застраховала 5 однотипных самолетов, каждый на 1 млн. денежных единиц, страховой взнос за каждый самолет фирма получила в размере 500 000 денежных единиц. Вероятность аварии самолета 0,01.

Найти вероятность того, что в течение страхового срока фирма будет иметь доход от этой операции.

Задача 23. Данные о состоянии погоды в некотором регионе сообщают 7 автоматических метеостанций. Для получения уверенной информации для прогноза необходима исправная работа, по крайней мере, пяти из них. В течение года каждая из станций выходит из строя с вероятностью 0,1.

Найти вероятность того, что в течение года центр обработки наблюдений будет получать достаточную для уверенного прогноза информацию.

Задача 24. На ВЦ от каждого из 10 отделов предприятия в течение рабочего дня с вероятностью 0,2 может поступить заявка на выполнение однотипных расчетов. Расчеты ведутся в ночное время, причем до начала рабочего дня может быть выполнено не более 5 заказов.

Найти вероятность того, что не все поступившие на ВЦ заказы будут выполнены.

Задача 25. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле 0,6. Для получения зачета достаточно, по крайней мере, трех попаданий.

Найти вероятность получить зачет по стрельбе, если делается 5 выстрелов.

Задача 26. Контроллер ОТК проверяет 4 изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8 для каждого изделия.

Найти вероятность того, что более половины проверенных изделий стандартно.

Задача 27. Девочка, имеющая 6 колец, бросает их на колышек по одному. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,3.

Найти вероятность того, что не менее 4 колец попадут на колышек.

Задача 28. Производиться испытание 4 изделий на надежность. Вероятность выдержать испытание для каждого изделия 0,7.

Найти вероятность того, что испытание выдержат хотя бы два изделия.

Задача 29. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Производиться 7 независимых выстрелов. Для разрушения цели необходимо, по крайней мере, четыре попадания.

Найти вероятность разрушения цели.

Задача 30. Устройство состоит из 5 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за год работы равна 0,15.

Найти вероятность того, что за год работы откажут менее трех элементов.

Тема 4

Дискретные случайные величины

Дискретной называют случайную величину X, принимающую конечное или счетное (можно перенумеровать) число значений: $x_1, x_2, \ldots$. *Значение* x_k *принимается с некоторой вероятностью* $p_k = P(X = x_k) > 0$. *При этом* $\sum_k p_k = 1$.

Соответствие, которое каждому значению x_k *дискретной случайной величины X сопоставляет его вероятность* p_k, *называется законом распределения случайной величины X.*

Закон распределения обычно задается в виде таблицы, которая называется рядом распределения:

X	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

Функция распределения случайной величины $F(x) = P(X < x)$ *в дискретном случае является кусочно-постоянной и может быть найдена по формуле*

$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называется число: $E(X) = \sum_k x_k p_k$.

Если случайная величина принимает счетное число значений, то говорят что математическое ожидание существует, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ *сходится, при расходимости ряда говорят, что математического ожидания не существует.*

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Среднее квадратичное отклонение является одной из характеристик рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания (*см. с. 27-30, 32-36 учебного пособия*).

В задачах часто используется биномиальное распределение, то есть распределение случайной величины X – числа наступления события A в n независимых опытах, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вертятностью p. Случайная величина X принимает целочисленные значения $m = 0, 1, \ldots, n$ *с вероятностями* $P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находятся по формулам $E(X)=np$, $D(X)=npq$, $\sigma(X)=\sqrt{npq}$, *где* $q=1-p$.

Для всех вариантов расшифровка задания: " Построить ... отклонение... " читается так: " Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение...".*

Задача 1. Спортсмен должен последовательно преодолеть 4 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью $p = 0{,}9$. Если спортсмен не преодолевает какое-либо препятствие, он выбывает из соревнований.

Построить...*отклонение числа препятствий, преодолённых спортсменом.

Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет:

а) не более двух препятствий;

б) более трёх препятствий.

Задача 2. Из коробки, в которой находятся 2 зелёных, 2 чёрных и 6 красных стержней для шариковой руки, случайным образом извлекаются 4 стержня.

Построить...* отклонение числа извлечённых стержней красного цвета.

Найти вероятность того, что при этом красных стержней будет:

а) не менее трёх;

б) хотя бы один.

Задача 3. База снабжает 6 магазинов. От каждого из них может поступить заявка на данный день с вероятностью 1/3.

Построить...* отклонение числа заявок на базу на данный день.

Найти вероятность того, что их будет более пяти.

Задача 4. Наблюдение за районом осуществляется тремя радиолокационными станциями. В район наблюдений попал объект, который обнаруживается любой радиолокационной станцией с вероятностью 0,2.

Построить...* отклонение числа радиостанций, обнаруживших объект.

Найти вероятность того, что их будет не менее двух.

Задача 5. Опыт состоит из четырёх независимых подбрасываний двух правильных монет, т.е. выпадение герба и цифры равновозможные события.

Построить...* отклонение числа одновременного выпадения двух цифр.

Найти вероятность того, что это событие произойдёт не менее трёх раз.

Задача 6. Автоматизированную линию обслуживают 5 манипуляторов. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемого манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останавливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0,3.

Построить...* отклонение числа манипуляторов, проверенных до остановки линии.

Найти вероятность того, что до остановки линии будет проверено:

а) не более двух манипуляторов;

б) более трёх манипуляторов.

Задача 7. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Две из карточек вынимаются наугад одновременно.

Построить...* отклонение суммы чисел, записанных на этих карточках.

Найти вероятность того, что эта сумма будет:

а) менее шести;

б) не менее пяти.

Задача 8. Производятся 4 независимых опыта, в каждом из которых с вероятностью 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 соответственно может появиться случайное событие A.

Построить...* отклонение числа появлений события A.

Найти вероятность того, что A произойдёт не менее чем в половине опытов.

Задача 9. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша.

Построить...* отклонение числа красных карандашей в выборке.

Найти вероятность того, что в выборке будет:

а) хотя бы один красный карандаш;

б) менее двух красных карандашей.

Задача 10. Стрелок, имеющий 4 патрона, стреляет последовательно по двум мишеням, до поражения обеих мишеней или пока не израсходует все 4 патрона. При попадании в первую мишень стрельба по ней прекращается, и стрелок начинает стрелять по второй мишени. Вероятность попадания при любом выстреле 0,8.

Построить...* отклонение числа поражённых мишеней.

Найти вероятность того, что будет поражена хотя бы одна мишень.

Задача 11. Из ящика, содержащего 4 годных и 3 бракованных детали, наугад извлекают 4 детали.

*Построить**… отклонение числа вынутых годных деталей.

Найти вероятность того, что годных деталей будет:

а) менее трех;

б) хотя бы одна.

Задача 12. Имеется набор из четырех карточек, на каждой из которых написана одна из цифр 1, 2, 3, 4. Из набора наугад извлекают карточку, затем ее возвращают обратно, после чего наудачу извлекают вторую карточку.

*Построить**… отклонение случайной величины, равной сумме чисел, написанных на вынутых карточках.

Найти вероятность того, что эта сумма:

а) не превзойдет числа 4;

б) будет не менее 6.

Задача 13. Три стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания каждым стрелком в цель равна 0.6.

*Построить**... отклонение числа попаданий, если каждый стрелок делает только один выстрел.

Найти вероятность того, что:

а) будет хотя бы одно попадание;

б) будет не более одного попадания.

Задача 14. Три стрелка независимо друг от друга стреляют каждый по своей мишени один раз. Вероятности попадания при одном выстреле у стрелков равны соответственно: $p_1 = 0,3;$ $p_2 = 0,6;$ $p_3 = 0,7.$

*Построить**... отклонение числа пораженных мишеней.

Найти вероятность того, что пораженных мишеней будет:

а) хотя бы одна;

б) менее двух.

Задача 15. Опыт состоит из трех независимых подбрасываний одновременно трех монет, каждая из которых с одинаковой вероятностью падает гербом или цифрой вверх.

*Построить**... отклонение числа одновременного выпадения двух гербов.

Найти вероятность того, что два герба одновременно выпадут хотя бы один раз.

Задача 16. На пути автомобиля 5 светофоров, каждый из них автомобиль проезжает с вероятностью 0,6.

*Построить**… отклонение числа светофоров, которые автомобиль проезжает до первой остановки.

Найти вероятность того, что до первой остановки автомобиль проедет:

а) хотя бы один светофор;

б) более трех светофоров.

Задача 17. Из урны, в которой было 4 белых и 2 черных шара, переложен один шар в другую урну, в которой находилось 3 черных шара и один белый. После перемешивания из последней урны вынимают 3 шара.

Построить…* отклонение числа черных шаров, вынутых из второй урны.

Найти вероятность того, что из нее будет извлечено:

а) по крайней мере, два шара;

б) не более двух шаров.

Задача 18. Стрелок стреляет по мишени до трех попаданий или до тех пор, пока не израсходует все патроны, после чего прекращает стрельбу. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6.

Построить…* отклонение числа выстрелов, произведенных стрелком, если у стрелка имеется 5 патронов.

Найти вероятность того, что стрелок произведет, по крайней мере, четыре выстрела.

Задача 19. Ракетная установка обстреливает две удаленные цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Цель при попадании в нее уничтожается. Запуск ракет прекращается после уничтожения обеих целей или после использования имеющихся пяти ракет.

Построить…* отклонение числа запущенных ракет.

Найти вероятность того, что при этом будет запущено:

а) не более трех ракет;

б) от двух до четырех ракет.

Задача 20. Три ракетные установки стреляют каждая по своей цели независимо друг от друга до первого попадания, затем прекращают стрельбу. Каждая ракетная установка имеет две ракеты. Вероятность попадания одной ракеты для первой установки – 0,4, для второй – 0,5, для третьей – 0,6.

Построить…* отклонение числа ракетных установок, у которых осталась неизрасходованная ракета.

Найти вероятность того, что будет хотя бы одна такая установка.

Задача 21. Батарея состоит из трех орудий. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9 для одного из орудий и 0,6 для каждого из двух других. Наугад выбирают два орудия, и каждое из них стреляет один раз.

Построить…* отклонение числа попаданий в мишень.

Найти вероятность:

а) хотя бы одного попадания в мишень;

б) хотя бы одного непопадания в мишень.

Задача 22. Группа состоит из пяти отличных, пяти хороших и десяти посредственных студентов. Вероятность правильного ответа на один вопрос экзаменационной программы равна 0,9 для отличного студента, 0,7 для хорошего студента и 0,6 для посредственного студента.

Построить...* отклонение числа правильных ответов на два вопроса наугад выбранного билета одним случайно выбранным студентом данной группы.

Найти вероятность того, что правильным будет ответ хотя бы на один вопрос.

Задача 23. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов.

Построить...* отклонение числа промахов.

Найти вероятность того, что промахов будет:

а) менее двух;

б) не менее трех.

Задача 24. Рабочий обслуживает 4 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,7, для второго – 0,75, для третьего – 0,8 для четвертого – 0,9.

Построить...* отклонение числа станков, которые потребуют внимания рабочего.

Найти вероятность того, что таких станков будет не более половины.

Задача 25. Монету подбрасывают 6 раз.

Построить...* отклонение разности числа появлений герба и числа появлений цифры.

Найти вероятность того, что эта разность будет менее двух.

Задача 26. В кошельке лежат 5 монет по 1 руб., две монеты по 2 руб. и три монеты по 5 руб.

Построить...* отклонение числа рублей, извлеченных из кошелька, если из него извлекают наугад две монеты.

Найти вероятность того, что извлеченных рублей будет:

а) не менее четырех;

б) более семи.

Задача 27. Производится по два последовательных выстрела по каждой из трех целей. Вероятность попадания при одном выстреле в любую цель равна 0,7. При попадании в цель стрельба по ней прекращается, неизрасходованный патрон при стрельбе по другим целям не используется.

Построить...* отклонение числа пораженных целей.

Найти вероятность того, что будет поражено хотя бы две цели.

Задача 28. Для контроля трех партий деталей выбирается случайным образом любая партия, и из нее берут наугад две детали.

*Построить**… отклонение числа бракованных деталей, среди этих двух, если в первой партии 2/3 недоброкачественных деталей, во второй 1/3 и в третьей бракованных деталей нет.

Найти вероятность того, что среди этих двух деталей будет хотя бы одна доброкачественная.

Задача 29. Имеются два одинаковых ящика с деталями. В первом ящике содержатся 8 деталей, из них 3 бракованных, во втором – 4 детали, из них – 2 бракованных. Из одного ящика вынимают 3 детали.

*Построить**… отклонение числа бракованных деталей среди трех вынутых, если выбор ящиков равновероятен.

Найти вероятность того, что будет вынуто не более двух бракованных деталей.

Задача 30. Два студента сдают экзамен, отвечая на два вопроса программы, независимо друг от друга. Вероятность правильного ответа на любой вопрос программы для первого студента – 0,6, для второго – 0,8. При неправильном ответе на вопрос экзамен прекращается.

*Построить**… отклонение числа студентов, пытавшихся ответить на оба вопроса.

Найти вероятность того, что будет хотя бы один такой студент.

Тема 5

Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется непрерывной случайной величиной, если существует неотрицательная функция $f(x)$ такая, что при любом x выполнено соотношение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad (1)$$

где, как и раньше, $F(x) = P(X < x)$ – функция распределения случайной величины X. Функция $f(x)$ называется плотностью распределения (или плотностью распределения вероятностей) случайной величины X (*см. с. 31-32, 34-41 учебного пособия*).

Из (1) *следует, что* $F(x)$ *является непрерывной функцией. Напомним, что, кроме того, функция распределения является неубывающей функцией и*

$0 \le F(x) \le 1$; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$; $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Плотность распределения обладает следующими свойствами

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $f(x) = F'(x)$, *если производная* $F'(x)$ *существует* *и вероятность попасть на промежуток можно найти, интегрируя плотность распределения* (*это свойство и свойство* (1) *эквивалентны*)

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Математическое ожидание (среднее) непрерывной случайной величины X определяется равенством $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$. *Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2,$$

среднее квадратичное отклонение X равенством $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Задача 1. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = a x^2 e^{-kx}, \qquad \text{где } k > 0,\ 0 \le x < \infty.$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал $(0;\ 1/k)$.

Задача 2. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{при } 0 \le x < 2; \\ x - 7/4, & \text{при } 2 \le x < 11/4; \\ 1, & \text{при } x \ge 11/4. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1;1.5].

Задача 3. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$F(x) = A + B \operatorname{arctg} x, \qquad (-\infty < x < +\infty).$

Найти: а) постоянные A, B;

б) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) выяснить существует ли $E(X)$?

Задача 4. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1; \\ \dfrac{A}{x^2}, & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;

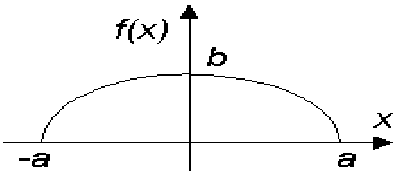
б) функцию распределения $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность попадания случайной величины X в интервал (2 ; 3);

д) вероятность того, что при 4 независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадает на отрезок [2; 3].

Задача 5. График плотности распределения случайной величины X представляет собой полуэллипс с большей полуосью "a" (a - известно).



Найти:

а) полуось b;

б) аналитическое задание $f(x)$;

в) моменты $E(X)$, $D(X)$;

г) вероятность $P(a/2 < X < 2a)$.

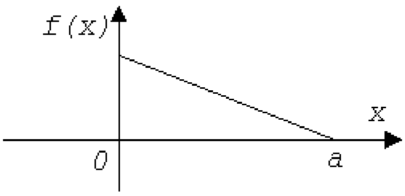
Задача 6. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < -1; \\ a + b\arcsin x, & \text{при} \quad -1 \le x < 1; \\ 1, & \text{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты a и b;

б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 7. Случайная величина X распределена по закону "прямоугольного треугольника" в интервале (0; a).



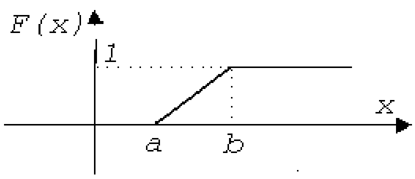
Найти: а) аналитическое задание $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность $P(a/2 < X < a)$;

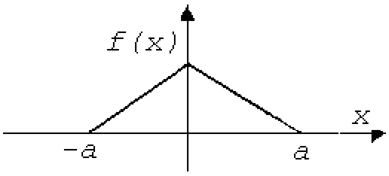
г) моменты $E(X)$, $D(X)$.

Задача 8. Функция распределения случайной величины X задана графиком



Найти математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 9. Случайная величина X подчинена "закону равнобедренного треугольника" на участке [- a; a].



Найти: а) аналитическое задание $f(x)$;

б) математическое ожидание $E(X)$, дисперсию $D(X)$.

Задача 10. Случайная величина распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \qquad \text{при} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок [-1;1].

г) выяснить существует ли $E(X)$?

Задача 11. Случайная величина X подчинена показательному закону распределения с параметром $\lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x \geq 0; \\ 0, & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

Задача 12. Случайная величина X подчинена закону Лапласа

$$f(x) = a e^{-|x|/u}, \quad \text{где} \quad u > 0.$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 13. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_0^3}{x^3}, & \text{при} \quad x \geq x_0 > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x < x_0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 14. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{при } x \in (-a,\ a); \\ 0, & \text{при } x \notin (-a,\ a). \end{cases}$$

Найти моменты $E(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ и вероятность $P(0 < X < 2a)$.

Задача 15. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, & \text{при} \quad x \in (-\pi/2,\ \pi/2); \\ 0, & \text{при} \quad x \notin (-\pi/2,\ \pi/2). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность $P\left(0 < X < \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Задача 16. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} A, & \text{при } x < 0; \\ Bx, & \text{при } 0 \le x \le 1; \\ C, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты A, B, C;
б) плотность распределения $f(x)$;
в) вероятность $P(0 < X < 1/2)$;
г) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

Задача 17. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{A}{\cos^2 x} & \text{при } 0 < x < \pi/4; \\ 0, & \text{при } x \ge \pi/4. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;
б) функцию распределения $F(x)$;
в) математическое ожидание $E(X)$;
г) вероятность $P(\pi/8 < X < \pi/4)$.

Задача 18. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \lambda(3x - x^2), & \text{при } 0 \le x \le 3; \\ 0, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) при каком λ функция $f(x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X;
б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 19. Дана плотность распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \alpha\left(x - \dfrac{x^2}{3}\right), & \text{при } 0 \le x \le 3; \\ 0, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент α;
б) функцию распределения $F(x)$;
в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 20. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1; \\ \dfrac{a}{x^3}, & \text{при } 1 \le x \le 4; \\ 0, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность $P(3 < X < 5)$.

Задача 21. Дана плотность распределения случайной величины X

$$f(x) = \frac{a}{e^{x} + e^{-x}}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность $P(0 < X < \infty)$.

Задача 22. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, & \text{при} \quad x \in [0,\ \pi]; \\ 0, & \text{при} \quad x \notin [0,\ \pi]. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность $P(\pi/2 < X < 3\pi/2)$.

Задача 23. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \ \ x < 3; \\ -\dfrac{3x^2}{4} + 6x - \dfrac{45}{4}, & \text{при} \ \ 3 \le x \le 5; \\ 0, & \text{при} \ \ x > 5. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$;

б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 24. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}, & \text{при} \quad x \in (-3, 3); \\ 0, & \text{при} \quad x \notin (-3, 3). \end{cases}$$

Найти: а) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

б) что вероятнее: в результате испытания окажется, что случайная величина $X < 1$ или что случайная величина $X > 1$?

Задача 25. Пусть задана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0; \\ ax^3, & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) плотность распределения случайной величины $f(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность $P(X \in (0{,}2;\ 0{,}8))$.

д) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 26. Дана плотность распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0; \\ A(4x - x^2), & \text{при} \quad 0 \le x \le 4; \\ 0, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти: коэффициент A, функцию распределения $F(x)$ и $P(-2 \le X \le 3)$.

Задача 27. Случайная величина R – расстояние от точки попадания до центра мишени, распределена по закону Рэлея

$$f(r) = \begin{cases} A\,r\,e^{-h^2 r^2}, & \text{при} \quad r \ge 0; \\ 0, & \text{при} \quad r < 0. \end{cases}$$

Найти: коэффициент A; моменты $E(R)$ и $D(R)$; моду R, то есть точку максимума плотности распределения случайной величины R.

Задача 28. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x}, & \text{при } x \in \left[\dfrac{1}{e},\ e\right]; \\ 0\,, & \text{при } x \notin \left[\dfrac{1}{e},\ e\right]. \end{cases} \qquad e = 2.71\ldots$$

Найти: а) коэффициент c;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность $P\left(\dfrac{e}{2} < X < \dfrac{3e}{2}\right)$

Задача 29. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} c \operatorname{arctg} x, & \text{при } x \in [0,1]; \\ 0, & \text{при } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент c;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$.

Задача 30. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x, & \text{при } |x| \le \pi/2; \\ 0, & \text{при } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина X примет значения больше чем $\pi/4$.

Тема 6

Функции случайных величин

Пусть X– случайная величина, а g=g(t)–измеримая (например, непрерывная) функция, определенная при любом значении x случайной величины X. Обозначим через Y=g(X) функцию от случайной величины X. Нас будет интересовать закон распределения случайной величины Y, при условии, что закон распределения X и функция g=g(t) известны. В разделе 6 (см. с. 51-53) учебного пособия рассмотрены - случай дискретной случайной величины X и случай монотонной функции g = g(t) и непрерывной случайной величины X. Мы приведем некоторые общие сведения и рассмотрим пример нахождения закона распределения $Y = g(X)$ *при условии, что X– непрерывная случайная величина, а g=g(t) произвольная измеримая функция. Пусть* $F_X(u)$ *и* $f_X(u)$ *– функция распределения и плотность распределения случайной величины* X*, а* $F_Y(v)$ *и* $f_Y(v)$ *– функция распределения и плотность распределения случайной величины* Y*. По определению* $F_Y(v) = P(Y < v)$*. Обозначим через* D_v *множество значений "* x *" случайной величины* X *, для которых* $y = g(x) < v$*:* $D_v = \{x : y = g(x) < v\}$*. Тогда*

$$F_Y(v) = P(Y < v) = P_X(D_v) = P(X \in D_v) = \int_{D_v} f_X(t)dt.$$

Часто удобнее указать множество D_v *непосредственно и вычислить* $P_X(D_v)$.

Пример 1.

Пусть X – непрерывная случайная величина, а g(t)=t^2*. Найдем* $F_Y(v)$ *и* $f_Y(v)$*, где* $Y = X^2$*. Если* $v \le 0$*, то множество* D_v *пусто:* $D_v = \{x:\ Y(x) = x^2 < v\} = \varnothing$*. Следовательно,* $f_Y(v) = F'_Y(v) = 0$ *при* $v \le 0$*. При v > 0 множество* D_v *имеет вид* $D_v = \{x:\ Y(x) = x^2 < v\} = \{-\sqrt{v} < x < \sqrt{v}\}$*. Отсюда при v > 0 получаем, что* $F_Y(v) = P(X^2 < v) = P_X(D_v) = P(-\sqrt{v} < X < \sqrt{v}) = F_X(\sqrt{v}) - F_X(-\sqrt{v})$ *и, дифференцируя по v, получим выражение для плотности распределения случайной величины Y через плотность случайной величины X:*

$$f_Y(v) = F'_X(\sqrt{v}) - F'_X(-\sqrt{v}) = f_X(\sqrt{v})\frac{1}{2\sqrt{v}} + f_X(-\sqrt{v})\frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{v}}\ f_X(\sqrt{v}) + f_X(-\sqrt{v})\ .$$

Пример 2. *Пусть случайная величина X равномерно распределена на промежутке* $[2, 6]$*, а* $g(t) = |3 - t|$*. Найдем* $F_Y(v)$ *и* $f_Y(v)$*, где* $Y = |3 - X|$*. При* $v \le 0$ *множество* D_v *пусто:* $D_v = \{x : Y(x) = |3 - x| < v\} = \varnothing$*. Следовательно, при* $v \le 0$ *плотность распределения* $f_Y(v) = F'_Y(v) = 0$*. При v > 0 множество* D_v *имеет вид* $D_v = \{x : Y(x) = |3 - x| < v\} = \{-v < x - 3 < v\} = \{3 - v < x < 3 + v\}$*. Отсюда при v > 0* $F_Y(v) = P(3 - X < v) = P_X(D_v) = P(3 - v < X < 3 + v) = F_X(3 + v) - F_X(3 - v)$*. Укажем функцию распределения* $F_X(u)$ *равномерного на* $[2,6]$ *распределения:*

$$F_X(u)=\begin{cases} 0, & при\ \ u\le 2;\\ \dfrac{u-2}{4}, & при\ \ 2<u\le 6;\\ 1, & при\ \ u>6.\end{cases}$$

При v > 0 выражение 3 – v всегда меньше трех, а при $v\ge 1$ *имеем*: $3-v\le 2.$

Следовательно, $$F_X(3-v)=\begin{cases} 0, & при\ \ v\ge 1;\\ \dfrac{1-v}{4}, & при\ \ 0<v\le 1.\end{cases}$$

Для того чтобы получить это выражение мы рассмотрели в качестве аргумента "u" функции $F_X(u)$ *величину u = 3 – v. Аналогично,*

$$F_X(3+v)=\begin{cases} \dfrac{1+v}{4}, & при\ 0<v\le 3,\\ 1, & при\ v>3.\end{cases}$$ *Следовательно,*

$$F_Y(v)=\begin{cases} 0, & при\ \ v\le 0;\\ \dfrac{v}{2}, & при\ 0<v\le 1;\\ \dfrac{1+v}{4}, & при\ 1<v\le 3;\\ 1, & при\ \ v>3.\end{cases} \qquad f_Y(v)=\begin{cases} 0, & при\ v<0\ \ или\ v>3;\\ \dfrac{1}{2}, & при\ \ \ 0<v<1;\\ \dfrac{1}{4}, & при\ \ \ 1<v<3.\end{cases}$$

Для нахождения моментов $Y=g(X)$ *–- функции от непрерывной случайной величины X можно пользоваться следующими формулами для нахождения математического ожидания* $E(Y)$*:*

$$E(Y)=E(g(X))=\int_R g(u)\,f_X(u)\,du=\int_R v\,f_Y(v)\,dv, \qquad (2)$$

а также определением и свойствами моментов (например, D(X)=E(X-E(X))^2*).*

Пример 3.

Пусть X $\sim N(a,\sigma^2)$, *то есть случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a и* σ^2. *Напомним, что* $E(X)=a,\ D(X)=\sigma^2$, *а плотность распределения имеет вид* $f_X(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-(t-a)^2/2\sigma^2)$. *Пусть* $g(t)=-3t^2$ *и Y = g(X), Z = 3 X - 2Y + 5, T=2X+3. Найдем* $E(Z)$ *и ковариацию K(X,T). Используя свойства математического ожидания и выражение дисперсии через начальные моменты (см. с. 33, 35 учебного пособия), будем иметь*

$$E(Z)=E(3X-2Y+5)=3E(X)-2E(Y)+5=3a-2E(-3X^2)+5=3a+6E(X^2)+5=$$
$$=6a^2+3a+6\sigma^2+5.$$ *Например, при* $a=-1,\ \sigma^2=2$ *имеем* $E(Z)=20.$

Коэффициент корреляции $r(X,T)=1$ *(см. с. 49), откуда* $K(X,T)=\sigma(X)\sigma(T)=2\sigma^2$ *(мы воспользовались тем, что* $D(aX+b)=a^2D(X)$ *для любых постоянных a и b).*

Пример 4.

В условиях предыдущего примера при $a=-1,\quad \sigma^2=2$ *найти* $E(|X+1|)$.

Для нахождения математического ожидания воспользуемся первой частью формулы (2) и приведенным выше выражением для плотности $X \sim N(a,\sigma^2)$.

$$E(|X+1|) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_R |t+1|\exp(-(t+1)^2/4)\,dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(-\int_{-\infty}^{-1}(t+1)\exp(-(t+1)^2/4)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{\infty}(t+1)\exp(-(t+1)^2/4)\,dt\right).$$ *Сделаем замену переменных* $-(t+1)/\sqrt{2} = y$ *и* $(t+1)/\sqrt{2} = y$ *в первом и втором интегралах соответственно, тогда имеем*

$$E(|X+1|) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\int_{\infty}^{0} y\exp(-y^2/2)dy + \int_{0}^{\infty} y\exp(-y^2/2)dy\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{\infty} y\exp(-y^2/2)\,dy\right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp(-y^2/2)\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Задача 1. Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид

$$F_X(t) = \begin{cases} 1-\exp(-2t), & \textit{если} \quad t \ge 0, \\ 0, & \textit{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = 2/X$ и $Z = 2X + 5$ являются функциями от случайной величины *X*.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины *Y;*

б) моменты $E(Z), D(Z), K(X,Z)$.

Задача 2. Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид

$$F_X(t) = \begin{cases} 1-\exp(-t), & \textit{если} \quad t \ge 0, \\ 0, & \textit{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = -3X + 2$ являются функциями от случайной величины *X*.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины *Y*;

б) моменты $E(Z)$, $D(Z)$, $K(X, Z)$.

Задача 3. Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид:

$$F_X(t) = \begin{cases} 1-\exp(-3t), & \textit{если} \quad t \ge 0, \\ 0, & \textit{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Случайные величины $Y = 2X + 1$ и $Z = -2X^2 - Y^2 - 9XY + 2X - 1$ являются функциями случайной величины *X*.

Найти: а) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины *Y;*

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 4. Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид:

$$F_X(t)=\begin{cases}1-\exp(-2t), & если \quad t\ge 0,\\ 0, & если \quad t<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Y=1-\exp(-2X)$ и $Z=X^2+2Y^2-2XY+3Y-1$ являются функциями случайной величины X.

Найти: а) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 5. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Случайные величины $Y = -X + 2$ и $Z=X^2+2Y^2+2XY-3Y-1$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 6. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a=1$, $\sigma=2$. Случайные величины $Y=(X-1)/2$ и $Z=2X^2-Y^2+2XY-2X+2$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 7. Случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = 3X^2 + Y^2 - 2X + Y + 1$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 8. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a=-1$, $\sigma=3$. Случайные величины $Y=|X+1|$ и $Z = 2X^2 - Y^2/3 - X + 2Y + 1$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 9. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет вид:

$$f_X(t)=\begin{cases}1/3, & если \quad t\in[1,4],\\ 0, & если \quad t\notin[1,4].\end{cases}$$

Случайные величины $Y = F_X(X)$, где $F_X(t)$ - функция распределения случайной величины X, и $Z = 3X^2 - 2Y^2 + XY + Y - 1$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины Y;

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 10. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет

вид: $$f_X(t)=\begin{cases}1/2, & если \quad t\in[2,4],\\ 0, & если \quad t\notin[2,4].\end{cases}.$$

Случайные величины $Y=X^2$ и $Z = 3X - 1$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины Y;

б) моменты $E(Z)$, $D(Z)$, $K(X,Z)$.

Задача 11. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет

вид: $$f_X(t)=\begin{cases}1/2, & если \quad t\in[-1,\,1],\\ 0, & если \quad t\notin[-1,\,1].\end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z= -2X + 3$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины Y;

б) моменты $E(Z)$, $D(Z)$, $K(X,Z)$.

Задача 12. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет

вид: $$f_X(t)=\begin{cases}1/4, & если \quad t\in[-1,\,3],\\ 0, & если \quad t\notin[-1,\,3].\end{cases}$$

Случайные величины $Y = X^2$ и $Z = 2X - 2$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины Y;

б) моменты $E(Z)$, $D(Z)$, $K(X, Z)$.

Задача 13. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет

вид: $$f_X(t)=\begin{cases}A, & если \quad t\in[2,\,5],\\ 0, & если \quad t\notin[2,\,5].\end{cases}$$

Случайные величины $Y= 3X - 2$ и $Z = -X - 3$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) постоянную A;

б) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины Y;

в) моменты $E(Z)$, $D(Z)$, $K(X, Z)$.

Задача 14. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет

вид: $$f_X(t)=\begin{cases}\dfrac{c}{t^4}, & если \quad t\ge 1,\\ 0, & если \quad t<1.\end{cases}$$

Случайные величины $Y = \ln X$ и $Z = 2X + 3$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) постоянную c;

б) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины Y;

в) моменты $E(Z)$, $D(Z)$, $K(X, Z)$.

Задача 15. Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид:
$$F_X(t)=\begin{cases}1-\exp(-2t), & \text{если} \quad t\ge 0,\\ 0, & \text{если} \quad t<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Y=\sqrt{X}$ и $Z=-2X+5$ являются функциями от случайной величины *X*.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины *Y*;
б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*).

Задача 16. Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид:
$$F_X(t)=\begin{cases}1-\exp(-2t), & \text{если} \quad t\ge 0,\\ 0, & \text{если} \quad t<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Y=\ln X/2$ и $Z=-4X-5$ являются функциями от случайной величины *X*.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины *Y*;
б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*).

Задача 17. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид:
$$f_X(t)=\begin{cases}2\exp(-2t), & \text{если} \quad t\ge 0,\\ 0, & \text{если} \quad t<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Y=\exp(-2X)$ и $Z=-4X-3$ являются функциями от случайной величины *X*.

Найти: а) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины *Y*;
б) моменты *E*(*Z*), *D*(*Z*), *K*(*X*, *Z*).

Задача 18. Функция распределения $F_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид:
$$F_X(t)=\begin{cases}1-\exp(-3t), & \text{если} \quad t\ge 0,\\ 0, & \text{если} \quad t<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Y=\exp(-X)$ и $Z=3X^2+2Y-X+1$ являются функциями от случайной величины *X*.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины *Y*;
б) математическое ожидание *E*(*Z*).

Задача 19. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины *X* имеет вид:
$$f_X(t)=\frac{c}{1+t^2}.$$

Случайная величина *Y* = 1/*X* является функцией от случайной величины *X*.

Найти: а) постоянную c;
б) плотность распределения $f_Y(t)$ случайной величины *Y*.

Задача 20. Плотность распределения $f_X(t)$ случайной величины X имеет вид:
$$f_X(t)=\begin{cases} a\,t^2, & если \quad t\in[1,2],\\ 0, & если \quad t\notin[1,2].\end{cases}$$

Случайные величины $Y=\sqrt{X}$ и $Z = 2X - 3Y^2 + 4$ являются функциями от случайной величины X.

Найти: а) постоянную a;

б) функцию распределения $F_Y(t)$ случайной величины Y;

в) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 21. Плотность распределения $f_{X,Y}(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) имеет вид:
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \exp(-3x), & если \quad x\ge 0 \;\; и \;\; y\in[1,\ 4],\\ 0, & если \;\; x<0 \;\; или \;\; y\notin[1,\ 4].\end{cases}$$

Случайные величины $Z = 2Y + 1$ и $T = 2X - Y/3 + 2$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) плотность распределения $f_Z(t)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $D(T)$.

Задача 22. Плотность распределения $f_{X,Y}(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) имеет вид:
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 6\exp(-2x-3y), & если \quad x\ge 0 \quad и \quad y\ge 0,\\ 0, & если \quad x<0 \quad или \quad y<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Z = 3Y - 1$ и $T = -3X + 2Y - 1$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) плотность распределения $f_Z(t)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $D(T)$.

Задача 23. Плотность распределения $f_{X,Y}(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) имеет вид:
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\dfrac{-(x-1)^2}{2}-2y\right), & если \quad y\ge 0,\\ 0, & если \quad y<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Z=-2X+1$ и $T=X/2-4Y+2$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) плотность распределения $f_Z(t)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $D(T)$.

Задача 24. Плотность распределения $f_{X,Y}(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) имеет вид:
$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{3\pi}}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{3}-3y\right), & \text{если } y\ge 0,\\ 0, & \text{если } y<0.\end{cases}$$

Случайные величины $Z = Y - 2$ и $T = 2X + Y - 5$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) функцию распределения $F_Z(t)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $D(T)$.

Задача 25. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределение Бернулли, задаваемые рядами распределения:

X_1	0	1
P	1/2	1/2

X_2	0	1
P	2/3	1/3

Найти: а) закон распределения случайной величины $Y = X_1 + X_2$;

б) математическое ожидание $E(2X_1^2 + 3X_2^2 - X_1X_2 + 2X_2 - 4)$.

Задача 26. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют экспоненциальное распределение, задаваемое плотностью распределения:

$$f_{X_k}(t) = \begin{cases} 3\exp(-3t), & \text{если} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{если} \quad t < 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2.$$

Рассмотрим случайные величины $Y=X_1 + X_2$ и $Z = -2X_1^2 + 3X_1X_2 + 3X_1 - 2$.

Найти: а) плотность распределения $f_Y(t)$;

б) математическое ожидание $E(Z)$.

Задача 27. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$.

Найти: а) закон распределения случайной величины $Y=X_1 + X_2$,

б) математическое ожидание случайной величины

$Z = X_1^2 - 2X_1X_2 + X_1 - 3.$

Напомним, что распределение Пуассона имеет дискретная случайная величина X, принимающая целочисленные значения m= 0, 1, 2, … с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \quad m = 0,1,2,...; \quad \lambda > 0.$$

Задача 28. Случайные величины X_1 и X_2 независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Найти: а) закон распределения случайной величины $Y=X_1 + X_2$;

б) математическое ожидание случайной величины

$Z = 2X_1^2 - 5X_1X_2 + X_2 + 2.$

Задача 29. ***Определить*** функции распределения случайных величин $Z_1 = \max(X,Y)$ и $Z_2 = \min(X,Y)$, где X и Y независимые случайные величины, имеющие функции распределения $F_X(t)$ и $F_Y(t)$ соответственно.

Задача 30. Плотность распределения $f_{X,Y}(x,y)$ системы случайных величин (X,Y) имеет вид: $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\exp\left(\dfrac{-x^2 - y^2}{2}\right)$

Найти: а) закон распределения полярных координат точки (X,Y)*;*

б) дисперсию $D(-X + 2Y)$.

Типовой расчёт по математической статистике

Тема 1

Оценивание, проверка статистических гипотез. Методические указания.

I. Из генеральной совокупности X сделана выборка объема $n = 200$. Требуется на основании этой выборки сделать аргументированное заключение о законе распределения генеральной совокупности и её основных числовых характеристиках. Для этого необходимо:
а) найти статистический ряд с числом интервалов, равным, например, 12;
б) построить гистограмму;
в) найти статистическую функцию распределения и построить ее график;
г) найти точечные оценки математического ожидания и дисперсии;
д) найти доверительный интервал для математического ожидания с заданной надёжностью (доверительной вероятностью);
е) на основании критерия согласия χ^2 (Пирсона) проверить гипотезу о нормальном законе распределения генеральной совокупности.

II. По данным таблицы - группированной выборки двумерного вектора (X,Y), требуется найти выборочное уравнение прямой – линии линейной регрессии Y на X.

Каждому студенту преподаватель выдает для обработки выборку объема $n = 200$ из таблицы нормально распределенных случайных чисел и группированную выборку двумерного вектора в виде таблицы.

Рассмотрим каждый этап выполнения работы.

1. **Составление статистического ряда, гистограммы и нахождение точечных оценок математического ожидания и дисперсии.**

В заданной выборке находим наименьший a и наибольший b элементы. Частное $\frac{b-a}{12}$ округляем до десятых, и полученное число берем в качестве шага разбиения h. Вводим отрезок $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, длина которого 12 h , причем числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ подобраны так, чтобы $\tilde{a} \approx a$; $\tilde{b} \approx b$ и, кроме того, чтобы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ имели не более двух знаков после запятой для простоты дальнейших вычислений.

Отрезок $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ разбиваем точкам $x_0 = \tilde{a}$, x_1, $x_2, \ldots, x_{12} = \tilde{b}$, на 12 равных частичных интервалов $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, 11$; $\Delta_{12} = [x_{11}, x_{12}]$, затем определяем частоты n_i, то есть число элементов выборки, попавших в каждый из частичных интервалов Δ_i и относительные частоты $p_i^* = \frac{n_i}{n}$, $i = 1, \ldots, 12$.

Примечание. Если некоторые элементы выборки не попали на отрезок $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ *, то их условимся относить к ближайшему крайнему интервалу. Числа, совпадающие с границами частичных интервалов, условимся относить к левому ин-*

тервалу. В качестве членов статистического ряда x_i^*, $i = 1, 2, ..., 12$ *берем числа, являющиеся серединами частичных интервалов:* $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$

Результаты оформляются в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1

Номера интервалов (x_{i-1}, x_i)	1	2	3	…	12	*Примечания*
Границы Интервалов	(x_0, x_1)	(x_1, x_2)	(x_2, x_3)	…	(x_{11}, x_{12})	
x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	…	x_{12}^*	
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_{12}	$\sum_{i=1}^{12} n_i = 200$
p_i^*	p_1^*	p_2^*	p_3^*	…	p_{12}^*	$\sum_{i=1}^{12} p_i^* = 1$

Пример. Пусть нам дана следующая выборка

-0,669	0,035	-2,077	1,077	0,525	-0,154	-0,537	-1,036	0,882	-0,402
0,392	0,106	1,430	-0,204	-0,326	0,825	1,214	0,091	-0,032	-1,264
-0,337	0,199	-0,160	0,625	-0,891	-1,464	1,353	0,466	1,000	1,511
0,369	-1,990	-1,190	0,666	-1,614	0,082	-0,184	-1,324	0,741	-0,264
-1.694	0,710	-0,655	-0,546	1,654	0,134	-0,529	-0,915	-0,898	0,799
0,985	0,340	0,276	0,911	-0,170	-0 ,551	-0,036	0,679	-0,432	0,678
-1,063	-0,594	-1,526	-0,787	0,873	-0,405	1,469	-0,318	0,922	0,522
0,033	-1,527	1,422	0,308	0,845	-0,151	1,642	0,033	-0,838	-0,872
0,597	0,362	-3,760	1,159	0,874	-0,794	-0,358	0,162	0,064	1,594
-1.601	-0,570	0,133	-0,660	1,485	0, 682	0,104	1,215	0,686	0,676
-0266	-1,309	0,597	0,989	0,934	1,079	-0,999	0,015	-0,094	-1,920
0,901	1,531	-0,889	-1,019	0,084	1,531	0,638	1,297	-0,139	-0,157
-1,433	-1,008	-0,990	0,090	0,940	0,207	-2,243	-0,039	0,276	-0,551
1,327	0,703	-1,724	-0,709	-1,100	-1,346	0,183	-0,163	1,212	-0,452
-0,248	0,788	0,577	0,122	-0,536	0,293	-0,126	1,627	0,658	1,348
-0,401	-0,679	0,921	0,476	1,121	-0,864	-0,656	-0,220	-1,566	-0,144
0,344	0,324	0,686	-1,487	-0,136	0,803	-0,745	0,932	-0,833	-0,946
0,441	-0,372	-1,336	0,062	1,506	-0,315	1,207	0,838	-0,304	0,128
0,824	0,040	-1,734	0,261	0,054	-0,379	-0,961	-2,716	0,823	-0,112
1,385	1,320	-0,509	-0,381	-1,671	-0,524	1,298	-1,248	0,346	-0,805

Таблица 2

Номер интер-вала (x_{i-1}, x_i)	1 (x_0, x_1)	2 (x_1, x_2)	3 (x_2, x_3)	4 (x_3, x_4)	5 (x_4, x_5)	6 (x_5, x_6)	7 (x_6, x_7)	8 (x_7, x_8)	9 (x_8, x_9)	10 (x_9, x_{10})	11 (x_{10}, x_{11})	12 (x_{11}, x_{12})
Границы интер-валов	(-4;-3,5)	(-3,5;-3)	(-3,-2,5)	(-2,5;-2)	(-2; -1,5)	(-1,5; -1)	(-1; -0,5)	(-0,5; 0)	(0; 0,5)	(0,5; 1)	(1; 1,5)	(1,5; 2)
x_i^*	-3,75	-3,25	-2,75	-2,25	-1,75	-1,25	-0,75	-0,25	0,25	0,75	1,25	1,75
n_i	1	0	1	2	11	16	34	34	37	38	18	8
p_i^*	0,005	0	0,005	0,010	0,055	0,080	0,170	0,170	0,185	0,190	0,090	0,040

Составляем статистический ряд с 12 интервалами. Наименьший элемент выборки a = -3,760, наибольший b = 1,654. Частное $\frac{b-a}{12}=\frac{1{,}654+3{,}760}{12}$ = 0,451.

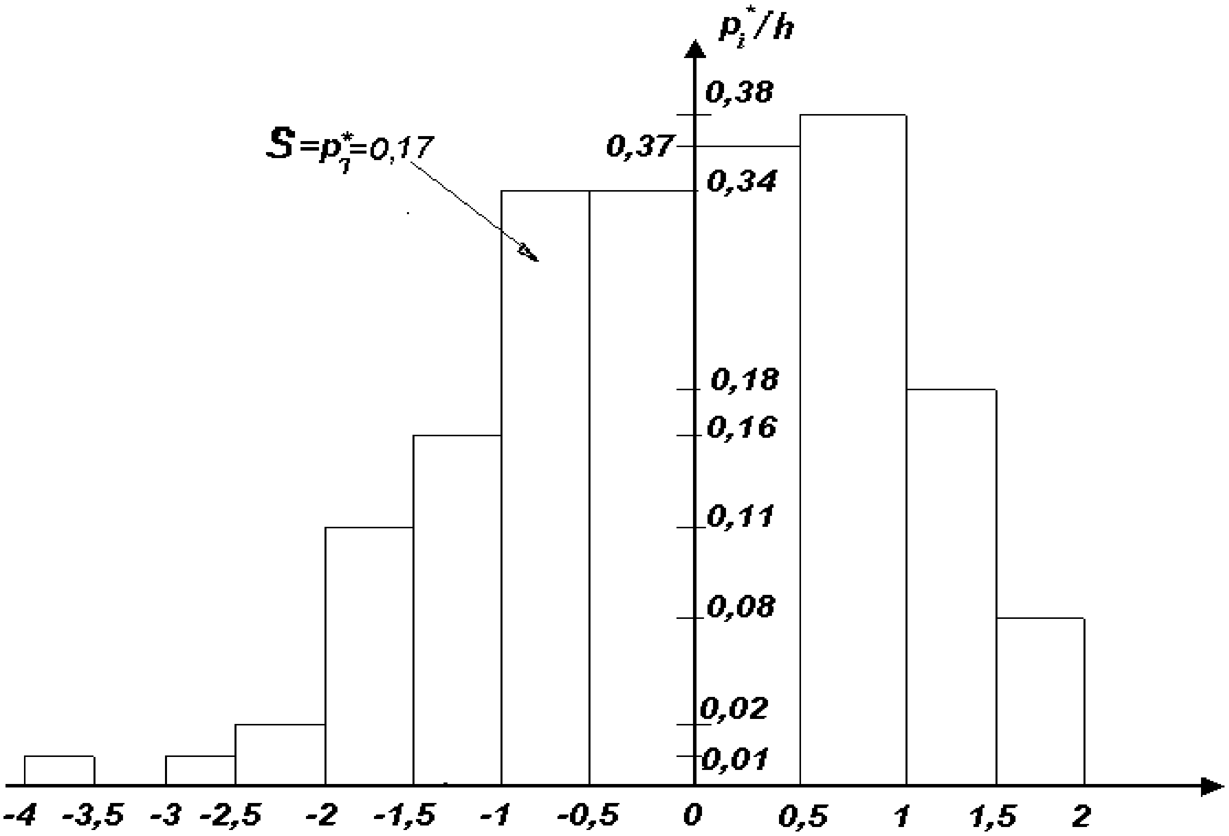
Округляя, получаем h=0,5.

12 h = 12 · 0,5 = 6. Поэтому удобно взять $\tilde{a}=-4$ и $\tilde{b}=2$.

Составляем табл.2.

Построим гистограмму (рис. 1). ***Гистограмма*** представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников, основания которых - частичные интервалы $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i),\ i=1,2,...,12$; расположенные на оси абсцисс, высоты пропорциональны, а площади равны соответствующим частотам (см. пособие с. 122-126). В нашем примере все эти данные берем из таблицы 2 .

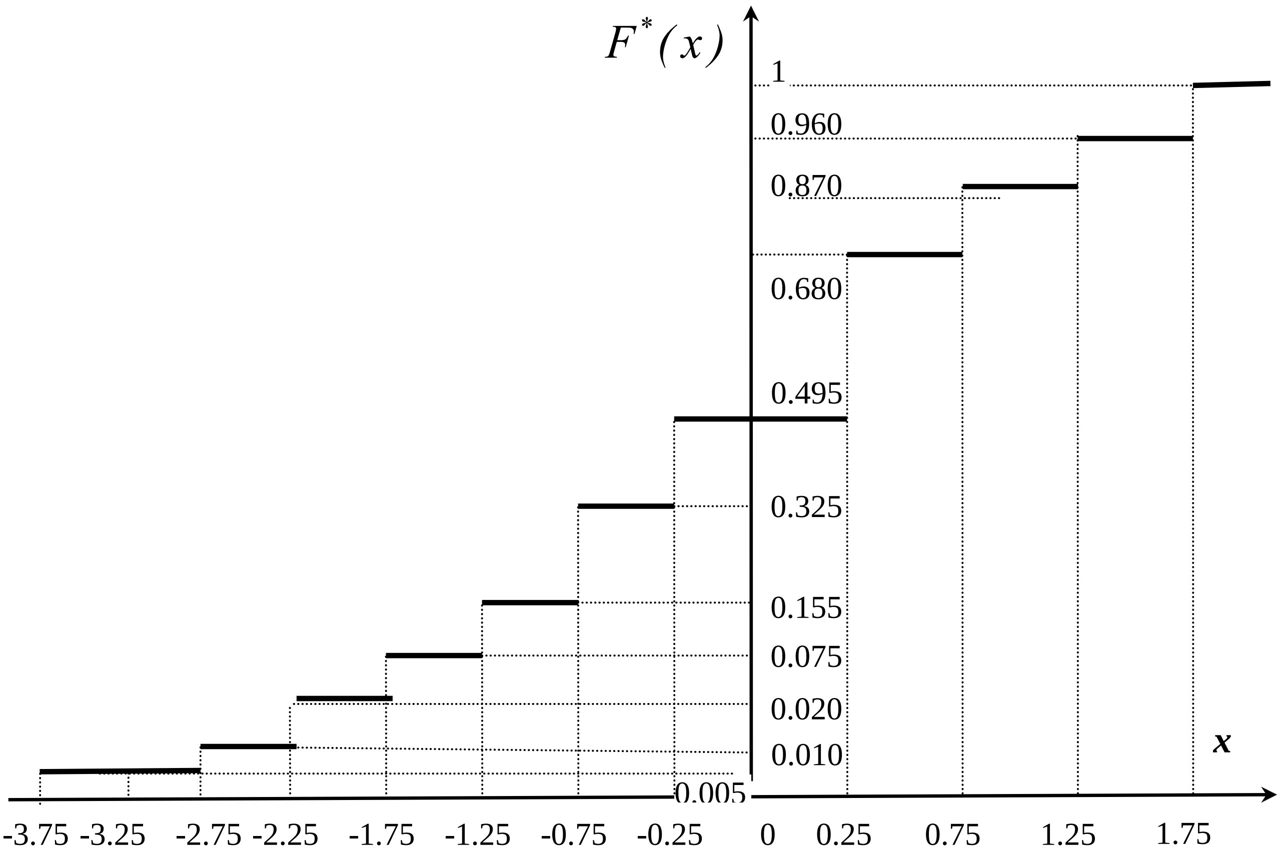
***Гистограмма Рис.* 1**



Далее строим эмпирическую функцию распределения (см. пособие с. 86-89). Она имеет вид $F^*(x)=\frac{n_x}{n}$; где n_x - число элементов выборки, меньших x; здесь x - любое вещественное число. График эмпирической функции распределения представляет собой ступенчатую линию, определенную на всей числовой оси (рис.2). Значения этой функции заключены в промежутке [0,1]. Из таблицы 2 находим

$$F^*(x) = \begin{cases} 0.000 & x \le -3.75 \\ 0.005 & -3.75 < x \le -2.75 \\ 0.010 & -2.75 < x \le -2.25 \\ 0.020 & -2.25 < x \le -1.75 \\ 0.075 & -1.75 < x \le -1.25 \\ 0.155 & -1.25 < x \le -0.75 \\ 0.325 & -0.75 < x \le -0.25 \\ 0.495 & -0.25 < x \le 0.25 \\ 0.680 & 0.25 < x \le 0.75 \\ 0.870 & 0.75 < x \le 1.25 \\ 0.960 & 1.25 < x \le 1.75 \\ 1.000 & x > 1.75 \end{cases}$$

Отсюда график эмпирической функции распределения имеет вид



<u>График эмпирической функции распределения рис.2</u>

Замечание. *Для наглядности, при построении гистограммы и эмпирической функции распределения масштаб по оси абсцисс и оси ординат может быть выбран различным.*

Найдем точечные оценки математического ожидания и дисперсии. В качестве таких оценок выбирают среднее выборочное значение $\bar{X} = \sum_{i=1}^{12} x_i^* p_i^*$ и выборочную дисперсию $S^2 = \sum_{i=1}^{12} (x_i^* - \bar{X})^2 p_i^* = \sum_{i=1}^{12} x_i^{*2} p_i^* - \bar{X}^2 = m_2 - \bar{X}^2$, где $m_2 = \sum_{i=1}^{12} x_i^{*2} p_i^*$ (см. пособие с.96-99).

Результаты заносим в таблицу вида 3.

Таблица 3

Номер интервала (x_{i-1}, x_i)	1	2	3	. . .	12	Некоторые результаты
x_i^*	x_1^*	x_2^*	x_3^*	. . .	x_{12}^*	
P_i^*	P_1^*	P_2^*	P_3^*	. . .	P_{12}^*	
$x_i^* p_i^*$	$x_1^* p_1^*$	$x_2^* p_2^*$	$x_3^* p_3^*$	. . .	$x_{12}^* p_{12}^*$	$\bar{X} = \sum_{i=1}^{12} x_i^* p_i^*$
$x_i^{*2} p_i^*$	$x_1^{*2} p_1^*$	$x_2^{*2} p_2^*$	$x_3^{*2} p_3^*$	. . .	$x_{12}^{*\,2} p_{12}^*$	$m_2 = \sum_{i=1}^{12} x_i^{*2} p_i^*$

Таблица 3 строится по данным табл.2, затем вычисляются $\bar{X}$ и S^2. В нашем примере результаты приведены в табл.4, после ее создания найдены $\bar{X}$ и S^2.

2. Построение доверительного интервала.

Интервал θ_1, θ_2 называется ***доверительным интервалом*** для неизвестного параметра θ, если, с заданной доверительной вероятностью γ (надежностью) можно утверждать, что неизвестный параметр находится внутри этого интервала (накрывается интервалом). В данной работе будем искать доверительный интервал для математического ожидания m с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ (см. пособие с. 108-109).

Ввиду большого объема выборки доверительный интервал имеет вид $\left(\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$. Параметр t определяется из равенства

$$\gamma = P(\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1,$$

где $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$, $\quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Замечание. *Для определения t при использовании функции Лапласа* $\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-x^2/2} dx$ *будем иметь следующее уравнение* $\gamma = 2\Phi^*(t)$.

Таблица 4

Номер интер-вала	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Неко-торые резуль-таты
x_i^*	-3,75	-3,25	-2,75	-2,25	-1,75	-1,25	-0,75	-0,25	0,25	0,75	1,25	1,75	
p_i^*	0,005	0	0,005	0,01	0,055	0,08	0,17	0,17	0,185	0,19	0,09	0,040	
$x_i^* p_i^*$	-0,019	0	-0,014	-0,023	-0,096	-0,1	-0,128	-0,043	0,046	0,143	0,113	0,07	$\bar{X}$ = - 0,052
$x_i^{*2} p_i^*$	0,070	0	0,038	0,051	0,168	1/8	0,096	0,011	0,012	0,107	0,141	0,123	m_2 = 0,942

$\bar{X} = 0{,}052; \quad S^2 = m_2 - \bar{X}^2 = 0{,}942 - 0{,}003 = 0{,}939$

Округляя полученные результаты, принимаем $\bar{X} = 0{,}05$; $S^2 = 0{,}94$.

Для рассматриваемого примера будем иметь при $\gamma = 0{,}95$, $\Phi(t) = 0{,}975$, откуда $t = 1{,}95$, поэтому в нашем примере имеем

$$\bar{X} - t\frac{S}{\sqrt{n}} = -0{,}05 - 1{,}95\frac{0{,}97}{1{,}41 \cdot 10} = -0{,}05 - 0{,}13 = -0{,}18, \quad \bar{X} + t\frac{S}{\sqrt{n}} = -0{,}05 + 0{,}13 = 0{,}08.$$

Таким образом, доверительный интервал для математического ожидания имеет вид $-0{,}18;\ 0{,}08$, то есть $-0{,}18 < m < 0{,}08$.

3. Проверка статистических гипотез.

Проверим гипотезу о том, что генеральная совокупность, из которой произведена выборка, имеет нормальный закон распределения (такое предположение может быть сделано по виду гистограммы). Применим критерий согласия χ^2 (Пирсона). Так как математическое ожидание m и дисперсия σ^2 генеральной совокупности нам неизвестны, то вместо них возьмем их выборочные характеристики: выборочное среднее $\bar{X}$ и выборочную дисперсию S^2.

Проверка гипотезы сводится к следующему алгоритму.

Объединим в один интервал интервалы с малыми частотами так, чтобы в каждом из интервалов было не менее 6-8 элементов выборки. Обозначим полученное число интервалов буквой k ($k \le n$). Вычислим статистику

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{n_i^2}{np_i} - n,$$

где n_i - число элементов выборки в каждом из k интервалов; p_i – теоретическая вероятность попадания случайной величины в i -й интервал, которая определяется по формуле

$$p_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx = \Phi\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - m}{\sigma}\right) = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})$$

где вместо m берем $\bar{X}$, а вместо $\sigma^2 = S^2$, т. е. $z_i = (x_i - \bar{X})/S$.

Устанавливаем число степеней свободы r, которое для нормального закона вычисляем по формуле $r = k - 3$. Назначаем уровень значимости $p = 0{,}05$.

Для заданного уровня значимости p и найденного числа степеней свободы r по таблицам ***χ^2-распределения Пирсона*** находим значение $\chi^2_{r,p}$ и сравниваем между собой это значение и вычисленное значение статистики χ^2. Если окажется, что $\chi^2 < \chi^2_{r,p}$, то гипотеза о нормальном распределении не отвергается, то есть экспериментальные данные не противоречат гипотезе о нормальном распределении генеральной совокупности (см. пособие с. 126-129).

Замечание. *При вычислении теоретических вероятностей p_i крайние интервалы (x_0, x_1) и $(x_{\kappa-1}, x_\kappa)$ заменяются интервалами $(-\infty, x_1)$ и $(x_{\kappa-1}, +\infty)$.*

Применим критерий χ^2 к рассматриваемому примеру при уровне значимости $p = 0{,}05$. Результаты вычислений помещены в таблице 5. Из этой таблицы имеем $\sum_{i=1}^{8} \frac{n_i^2}{np_i} = 209{,}16$; $\chi^2 = 209{,}16 - 200 = 9{,}16$. По таблице χ^2-распределения находим: $\chi^2_p = 11{,}07$. Так как полученное нами значение $\chi^2 = 9{,}16 < 11{,}07$, то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности не отвергается.

Тема 2

Ковариация и регрессия. Построение выборочного уравнения линии регрессии. Методические указания.

В приложениях часто требуется оценить характер зависимости между наблюдёнными переменными. Основная задача при этом состоит в выравнивании (сглаживании) экспериментальных данных с помощью специально подобранных кривых, называемых линиями или поверхностями регрессии, которые с большей или меньшей надёжностью характеризуют корреляционную зависимость между наблюдаемыми переменными.

Пусть (X,Y) – двумерный случайный вектор, где случайные величины X и Y являются зависимыми. Зависимость $y(x)$ математического ожидания Y от значения x случайной величины X есть функция регрессии Y на X: $E(Y/X=x)=y(x)$. Можно показать, что случайная величина $y(X)$, где $y(x)$ - функция регрессии Y на X, является наилучшим в среднеквадратичном приближением случайной величины Y функциями от случайной величины X, т.е. математическое ожидание $E(Y - f(X))^2$ минимально при $f(x)=y(x)$.

Таблица 5. $\overline{X} = -0.05$; $S^2 = 0,97$

Интер-валы	(-∞; -3,5)	(-3,5; -3)	(-3; -2,5)	(-2,5; -2)	(-2; -1,5)	(-1,5-1)	(-1; -0,5)	(-0,5;0)	(0;0,5)	(0,5;1)	(1;1,5)	(1,5; +∞)	Приме-чания
Z_i	-3,56	-3,04	-2,53	-2,01	-1,49	-0,98	-0,46	0,05	0,57	1,08	1,60	+∞	
$\Phi(Z_i)$	0,0002	0,0014	0,0062	0,0228	0,0668	0,1587	0,3085	0,5398	0,7257	0,8643	0,9452	1,0000	
p_i	0,0002	0,0012	0,0048	0,0166	0,0440	0,0919	0,1498	0,2313	0,1859	0,1386	0,0809	0,0548	∑= 1
	Σ= 0,0666												
n_i	1	0	1	2	11	16	34	34	37	38	18	8	∑= 200
	Σ= 15												
n_i^2	Σ= 225					256	1156	1156	1369	1444	324	64	
np_i	13,32					18,38	29,96	46,26	37,18	27,72	16,18	10,96	∑= 200
n_i^2/np_i	16,89					13,93	38,58	24,99	36,82	52,09	20,02	5,84	∑= 209.16

В качестве оценки функции $y(x)$ выбирают, как правило, функции, линейно зависящие от неизвестных параметров, т.е. функцию регрессии ищут в виде:

$$y(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+...+a_m\varphi_m(x),$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x),..., \varphi_m(x)$ - известные функции, $a_0, a_1,..., a_m$ - подлежащие оценке параметры. Для оценки параметров $a_0, a_1,..., a_m$ по выборке (x_i,y_i), i=1, 2, ..., n используют метод наименьших квадратов. При этом оценка $\vec{a}=(a_0, a_1,..., a_m)$ находится как вектор, минимизирующий сумму

$$S(\vec{a})=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\sum_{j=0}^{m}a_j\,\varphi_j(x_i))^2 .$$

Необходимым (а в данном случае и достаточным) условием минимума функции S является выполнение равенств

$$\frac{\partial S}{\partial a_j}=0, \quad j=1, 2, ... , n,$$

которые приводят к системе уравнений, линейных относительно $a_0, a_1,..., a_m$.

Простейшей функцией регрессии является линейная функция $y(x)=a_0+a_1x$. В этом случае решение задачи $\min E(Y-a_0-a_1x)^2$ имеет вид

$$a_1=r(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}, \quad a_0=E(Y)-a_1E(X),$$

где $r(X,Y)$ – коэффициент корреляции X и Y, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ - среднеквадратичные отклонения X и Y. Функция регрессии при этом задается формулой

$$y(x)=E(Y)+r(X,Y)\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}(x-E(X)). \qquad (3)$$

В свою очередь метод наименьших квадратов приводит к следующему выражению для выборочной функции регрессии

$$y(x)=\overline{Y}_n+r_n(X,Y)\frac{\sigma_n(Y)}{\sigma_n(X)}(x-\overline{X}_n). \qquad (4)$$

Здесь $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ и $\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$ - оценки математических ожиданий $E(X)$ и $E(Y)$, $\sigma_n(X)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}_n^2}$, $\sigma_n(Y)=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\overline{Y}_n^2}$ - оценки среднеквадратичных отклонений $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$, $r_n(X,Y)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\cdot\overline{X}_n\cdot\overline{Y}_n}{n\cdot\sigma_n(X)\cdot\sigma_n(Y)}$ - оценка коэффициента корреляции $r(X,Y)$; т.е. при построении выборочной регрессии при помощи метода наименьших квадратов все моменты в (3) заменяются своими выборочными оценками (см. пособие с. 96-102).

При обработке выборок большого объёма часто предварительно проводят группировку значений X и Y подобно тому, как это было описано в первой части типового расчёта. При этом для частичных интервалов $\Delta x_i=\left[x_{i-1},x_i\right.$, i=1, ...,

k и $\Delta y_j = [y_{j-1}, y_j$, $j = 1, \ldots, m$ определяют число элементов выборки n_{ij}, попавших в прямоугольник $\Delta x_i \times \Delta y_j$, и вычисляют середины интервалов по формулам: $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $y_j^* = \dfrac{y_{j-1} + y_j}{2}$. Все элементы выборки, попавшие в прямоугольник $\Delta x_i \times \Delta y_j$, считают равными ($x_i^*$,$y_j^*$), причём количество значений x_i^* будет равно $n_i = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}$, а количество значений y_j^* будет равно $n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$.Объём выборки равен $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{j=1}^{m} n_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}$. Все эти данные заносят в таблицу 6.

***Таблица* 6**

y_j^* / x_i^*	y_1^*	Y_2^*	…	y_m^*	n_i
x_1^*	n_{11}	N_{12}	…	n_{1m}	n_1
x_2^*	n_{21}	N_{22}	…	n_{2m}	n_2
…	…	…	…	…	…
x_k^*	n_{k1}	N_{k2}	…	$n_{k\,m}$	n_k
N_j	n_1	N_2	…	n_m	n

Для расчёта коэффициентов в выборочном уравнении линии регрессии (4) используют формулы:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^*, \qquad \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j y_j^*, \qquad (5)$$

$$\sigma_n(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i^*)^2 - \overline{X}_n^2}, \qquad \sigma_n(Y) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} n_j (y_j^*)^2 - \overline{Y}_n^2}, \qquad (6)$$

$$r_n(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{ij} x_i^* y_j^* - n \cdot \overline{X}_n \cdot \overline{Y}_n}{n \cdot \sigma_n(X) \cdot \sigma_n(Y)}. \qquad (7)$$

В вариантах заданий предлагается таблица группированных данных, на основании которой необходимо найти величины

$$n_i, \quad i=1,\ldots,k; \qquad n_j, \quad j=1,\ldots,m; \quad n;$$

затем, используя формулы (5), (6), (7) определить точечные оценки математических ожиданий - $\overline{X}_n$ и $\overline{Y}_n$, средних квадратичных отклонений - $\sigma_n(X)$ и $\sigma_n(Y)$, коэффициента корреляции - $r_n(X,Y)$ и получить выборочное уравнение линии регрессии (4).

В качестве примера рассмотрим построение выборочного уравнения линии линейной регрессии по таблице группированных данных 7.

***Таблица* 7**

y_j^* / x_i^*	15	25	35	45	55	n_i
10	5	0	0	0	0	5
20	7	20	0	0	0	27
30	0	23	30	10	0	63
40	0	0	47	11	9	67
50	0	0	2	20	7	29
60	0	0	0	6	3	9
n_j	12	43	79	47	19	n=200

По формулам (5) находим

$$\overline{X}_{200}=35{,}75, \qquad \overline{Y}_{200}=35{,}9;$$

по формулам (6) находим

$$\sigma_{200}(X)=11{,}06, \qquad \sigma_{200}(Y)=12{,}09;$$

по формуле (7) находим

$$r_{200}(X,Y)=0{,}603.$$

Подставив найденные величины в формулу (4), получим искомое выборочное уравнение линейной регрессии Y на X.

$$y(x)=35{,}9+0{,}603\cdot\frac{12{,}09}{11{,}06}(x-35{,}75),$$

или, окончательно,

$$y(x)=0{,}659x+12{,}34. \qquad (8)$$

Сравним оценки условных математических ожиданий, вычисленные
а) на основе последнего уравнения,
б) по данным таблицы 7, полагая, как и ранее, $P(y_j^*)=p_j^*=n_{ij}/n_i$.
Например, при $x^*=30$ имеем:
а) $E(Y\,|\,X=30)=0{,}659\cdot 30+12{,}34=32{,}11$;
б) $E(Y\,|\,X=30)=(23\cdot 25+30\cdot 35+10\cdot 45)/63=32{,}94$.
Как видно, соответствие удовлетворительное.

Заметим, что уравнения линейной регрессии (3) и выборочной линейной регрессии (4), (8) являются уравнениями, задающими прямую линию.

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

y_j^* / x_i^*	15	25	30	35
10	15	0	0	0
20	10	80	30	0
30	0	0	45	20

Вариант 2

y_j^* / x_i^*	17	27	32	37
12	30	80	0	0
22	0	45	20	0
32	0	0	10	15

Вариант 3

y_j^* / x_i^*	19	29	34	39
14	0	0	0	25
24	0	35	40	10
34	30	60	0	0

Вариант 4

y_j^* / x_i^*	21	31	36	41
16	0	0	30	80
26	0	55	20	0
36	15	0	0	0

Вариант 5

Y_j^* / x_i^*	23	33	38	43
18	20	15	0	0
28	0	45	80	30
38	0	0	0	10

Вариант 6

y_j^* / x_i^*	25	35	40	45
20	0	0	45	30
30	0	80	10	0
40	15	20	0	0

Вариант 7

y_j^* / x_i^*	27	37	42	47
22	20	10	0	0
32	0	80	45	0
42	0	0	15	30

Вариант 8

y_j^* / x_i^*	29	39	44	49
24	45	80	0	0
34	0	20	10	0
44	0	0	15	30

Вариант 9

Y_j^* / x_i^*	31	41	46	51
26	0	0	45	10
36	20	30	80	0
46	15	0	0	0

Вариант 10

y_j^* / x_i^*	33	43	48	53
28	15	80	0	0
38	0	20	45	10
48	0	0	0	30

Вариант 11

y_j* / x_i*	35	45	50	55
30	0	0	45	30
40	80	10	20	0
50	15	0	0	0

Вариант 12

Y_j* / x_{i}*	37	47	52	57
32	10	10	0	0
42	0	80	45	0
52	0	0	15	30

Вариант 13

y* / x_i*$_{\mathrm{j}}$	39	49	54	59
34	0	0	80	30
44	0	15	20	0
54	10	45	0	0

Вариант 14

y_j* / x_{i}*	41	51	56	61
36	45	0	0	0
46	20	10	80	30
56	0	0	10	15

Вариант 15

y_j* / x_{i}*	43	53	58	63
38	10	0	0	0
48	30	80	15	0
58	0	0	45	20

Вариант 16

y_j* / x_i*	45	55	60	65
40	0	0	15	10
50	0	30	20	0
60	45	80	0	0

Вариант 17

y_j* / x_{i}*	47	57	62	67
42	30	15	0	0
52	0	85	25	0
62	0	0	15	30

Вариант 18

y_j* / x_{i}*	49	59	64	69
44	80	35	0	0
54	0	25	45	0
64	0	0	0	15

Вариант 19

y_j* / x_i*	51	61	66	71
46	0	0	17	23
56	30	80	35	0
66	15	0	0	0

Вариант 20

y_j* / x_i*	53	63	68	73
48	0	0	45	32
58	0	80	10	0
68	5	28	0	0

Вариант 21

y_j* / x_i*	55	65	70	75
50	24	16	0	0
60	0	75	45	0
70	0	0	10	30

Вариант 22

y_j* / x_i*	57	67	72	77
52	41	80	0	0
62	0	20	19	0
72	0	0	15	25

Вариант 23

y_j* / x_i*	59	69	74	79
54	14	46	0	0
64	0	80	20	25
74	0	0	0	15

Вариант 24

y_j* / x_i*	61	71	76	81
56	0	0	82	18
66	0	45	25	0
76	30	0	0	0

Вариант 25

y_j* / x_i*	63	73	78	83
58	33	45	0	0
68	0	27	10	70
78	0	0	0	15

Вариант 26

y_j* / x_i*	65	75	80	85
60	0	0	16	10
70	0	45	80	0
80	24	25	0	0

Вариант 27

y_j* / x_i*	67	77	82	87
62	0	0	87	33
72	0	18	15	0
82	5	42	0	0

Вариант 28

y_j* / x_i*	69	79	84	89
64	43	0	0	0
74	10	15	80	30
84	0	0	5	17

Вариант 29

y_j* / x_i*	71	81	86	91
66	33	88	0	0
76	0	25	28	0
86	0	0	42	5

Вариант 30

y_j* / x_i*	73	83	88	93
68	0	0	0	42
78	30	80	14	10
88	18	6	0	0

Приложение 1

Приближённые значения функции стандартного нормального распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$***, умноженные на*** 10^5

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997

Приложение 2

Таблица χ^2 распределения

r \ P	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1	1,642	2,706	3,841	5,41	6,635	7,879	9,5	10,83
2	3,219	4,605	5,991	7,82	9,210	10,60	12,4	13,82
3	4,642	6,251	7,815	9,84	11,35	12,84	14,8	16,27
4	5,989	7,779	9,488	11,67	13,28	14,86	16,9	18,47
5	7,289	9,236	11,07	13,39	15,09	16,75	18,9	20,52
6	8,558	10,65	12,59	15,03	16,81	18,55	20,7	22,46
7	9,803	12,02	14,07	16,62	18,48	20,29	22,6	24,32
8	11,03	13,36	15,51	18,17	20,09	21,96	24,3	26,13
9	12,24	14,68	16,92	19,68	21,67	23,59	26,1	27,88
10	13,44	15,99	18,31	21,2	23,21	25,19	27,7	29,59
11	14,63	17,28	19,68	22,6	24,73	26,76	29,4	31,26
12	15,81	18,55	21,03	24,1	26,22	28,30	30,9	32,91
13	16,99	19,81	22,36	25,5	27,69	29,82	32,5	34,53
14	18,15	21,06	23,69	26,9	29,14	31,32	34,0	36,12
15	19,31	22,31	25,00	28,3	30,58	32,80	35,6	37,70
16	20,47	23,54	26,30	29,6	32,00	34,27	37,1	39,25
17	21,62	24,77	27,59	31,0	33,41	35,72	38,6	40,79
18	22,76	25,99	28,87	32,3	34,81	37,16	40,1	42,31
19	23,90	27,20	30,14	33,7	36,19	38,58	41,6	43,82
20	25,04	28,41	31,41	35,0	37,57	40,00	43,0	45,32
21	26,17	29,62	32,67	36,3	38,93	41,40	44,5	46,80
22	27,30	30,81	33,92	37,7	40,29	42,80	45,9	48,27
23	28,43	32,01	35,17	39,0	41,64	44,18	47,3	49,73
24	29,55	33,20	36,42	40,3	42,98	45,56	48,7	51,18
25	30,68	34,38	37,65	41,6	44,31	46,93	50,1	52,62
26	31,80	35,56	38,89	42,9	45,64	48,29	51,6	54,05
27	32,91	36,74	40,11	44,1	46,96	49,65	52,9	55,48
28	34,03	37,92	41,34	45,4	48,28	50,99	54,4	56,89

Варианты типовых расчетов для каждого студента представляют собой выборки из генеральной совокупности объема n =200. Эти выборки формируются на основании приложения 3.

Приложение 3

Данные для формирования индивидуальных заданий по теме “Оценивание, проверка статистических гипотез”

-1.006	0.386	-1.223	-0.591	-0.345	0.157	0.800	-0.155	-0.379	-1.023
1.306	-0.861	0.303	0.518	0.986	0.788	0.883	-0.098	-0.242	1.701
1.199	-1.230	-0.730	-1.492	0.643	-0.577	-0.224	0.997	-1.165	-0.494
-2.577	2.641	-1.143	-0.086	2.919	0.527	0.297	0.434	0.756	0.172
-2.086	-0.904	-1.413	-0.012	-1.248	1.671	-0.521	-0.025	1.164	0.354

0.866	-0.005	0.403	1.908	0.448	0.169	-0.731	-1.189	0.905	0.283
2.431	1.409	0.191	-0.165	0.889	0.804	-2.131	-0.754	1.458	1.650
0.026	0.885	0.011	-0.990	-0.104	0.174	-0.052	-0.182	1.813	0.346
0.110	1.757	-0.693	-0.732	1.073	-1.724	-1.810	0.947	-1.118	0.666
0.970	1.140	-1.105	0.894	1.547	-0.484	-0.086	-0.066	0.150	-0.264

0.866	-0.005	0.403	1.908	0.448	0.169	-0.731	-1.189	0.905	0.283
2.431	1.409	0.191	-0.165	0.889	0.804	-2.131	-0.754	1.458	1.650
0.110	1.757	-0.693	-0.732	1.073	-1.724	-1.810	0.947	-1.118	0.666
0.026	0.885	0.011	-0.990	-0.104	0.174	-0.052	-0.182	1.813	0.346
0.970	1.140	-1.105	0.894	1.547	-0.484	-0.086	-0.066	0.150	-0.264

-0.644	-0.149	0.365	1.601	1.307	0.041	-2.312	1.023	1.880	-1.422
-0.905	0.577	-0.548	0.732	-0.482	0.413	1.380	-0.489	-0.799	-0.755
-0.716	0.753	0.578	0.555	-1.752	0.597	1.390	-0.402	-0.560	0.157
0.007	-0.167	-1.955	-0.813	-0.926	1.924	-0.453	1.399	1.708	0.378
-2.814	-0.581	0.522	-0.539	0.922	0.714	-0.628	0.280	-0.644	0.178

-0.602	2.301	-0.432	0.273	-0.802	-0.322	0.459	-0.023	0.361	0.557
-0.993	-0.270	-0.194	2.646	-0.456	-0.703	0.660	0.134	-2.058	-0.180
1.188	0.502	0.985	-0.053	0.193	-0.744	1.124	2.408	-2.332	-0.035
2.388	-0.119	0.468	0.472	0.889	0.371	0.979	0.901	-0.370	1.934
2.265	-0.001	-1.364	-2.080	-1.591	1.437	-1.316	0.076	1.285	1.305

-0.355	-2.735	1.194	-1.038	0.586	-0.213	1.143	0.454	0.097	-0.016
-0.327	-0.535	0.743	0.628	1.525	0.492	0.979	-1.417	-0.226	0.449
0.083	2.209	-0.121	0.867	2.143	-0.323	0.492	-0.919	-0.317	-0.522
0.433	-0.605	-0.031	2.071	-0.746	0.822	1.257	-1.448	0.634	-1.055
-1.435	-1.003	-0.594	-1.531	-1.414	0.594	-1.481	0.039	-0.047	1.152

-0.499	1.683	2.247	1.444	-0.418	-2.977	-0.968	-0.308	-1.816	-0.446
1.627	1.555	0.310	-0.074	1.414	1.007	0.555	0.003	-2.789	0.005
-0.239	-1.050	1.991	-0.362	-0.847	0.884	0.759	-1.406	0.262	-0.206
-0.961	0.096	-0.119	-0.777	0.166	-0.405	-0.572	1.624	0.119	0.049
-0.152	0.251	-0.272	-0.250	-0.048	-2.619	1.158	0.139	0.332	0.926

0.350	0.033	0.478	0.637	-0.033	-0.319	0.570	-0.837	-0.413	-1.640
-0.795	-0.015	1.774	-1.568	0.302	-1.120	-0.917	-0.091	1.118	0.277
-0.622	-0.554	-0.470	0.700	-0.656	1.460	1.701	0.630	-0.700	-0.674
1.429	-1.163	-0.925	0.973	-0.052	0.409	-0.024	0.384	-0.350	0.203
-2.084	0.100	0.001	-0.070	0.773	1.132	-0.769	-0.609	1.816	1.307
0.462	-0.603	0.264	-0.373	2.173	-1.875	0.261	0.064	-0.814	-0.456
1.288	1.833	0.292	-0.294	0.572	0.917	0.743	-1.727	0.990	-1.903
-0.956	-0.965	0.781	-1.717	0.815	-0.546	-0.162	0.716	-1.781	-0.392
1.195	-0.397	0.404	-0.053	-1.078	-0.605	0.435	0.036	-0.044	-1.107
-0.405	0.089	-0.325	0.217	-0.579	0.025	0.861	-0.184	0.890	1.757
-0.719	1.202	-1.083	0.606	1.244	-1.547	-0.108	0.856	1.034	-0.127
-0.219	-0.112	0.157	0.074	0.029	-1.071	-0.300	3.343	-0.618	1.019
-0.030	0.673	-0.662	-0.685	-1.675	0.737	1.279	0.894	0.987	0.170
-0.495	-1.322	0.362	0.475	-0.043	-1.698	-0.404	-0.741	-0.237	-0,420
-0.333	-0.216	1.170	0.757	-0.691	-0.591	1.444	1.695	0.307	2.096
-0.857	1.419	-1.178	-0.848	-1.576	2.249	-1.159	-0.676	-0.486	0.388
-0.771	0.626	-0.567	1.859	-0.610	-0.016	0.686	3.412	-0.331	-0.652
1.464	2.221	1.177	-0.036	0.376	0.735	0.730	-0.394	0.776	-0.056
1.091	-1.292	0.225	2.591	1.272	-0.640	0.514	1.205	-0.332	0.422
-0.074	-0.030	1.592	-0.039	1.199	0.212	-2.032	0.180	-1.065	-0.053
0.786	0.316	-0.973	-2.121	-0.033	0.188	1.220	0.897	-2.009	-0.014
-0.137	1.984	-1.147	-1.836	-0.541	0.284	-0.364	-1.230	0.243	-0.516
0.636	-0.645	-1.484	-1.542	-0.067	-1.529	-0.632	0.125	0.149	1.207
1.578	0.313	-0.966	-0.235	2.256	-2.370	-0.222	0.807	2.607	0.110
0.236	-1.251	2.032	-0.211	1.123	-0.563	1.336	0.874	1.987	-1.258
1.693	-0.453	-0.362	0.971	0.539	0.238	-0.214	-1.162	-0.102	0.140
0.457	-0.620	-0.984	-1.143	-0.691	-1.203	1.082	-0.647	-0.667	1.581
1.067	-1.925	1.365	2.047	1.084	-0.308	-0.171	1.572	-0.705	-0.297
-0.127	-1.425	0.867	0.007	0.629	-1.537	-0.810	0.130	-0.220	-0.351
0.188	0.268	-0.428	0.746	-0.756	-0.620	-0.005	-0.804	-0.450	0.872
0.821	-0.271	-0.571	-1.022	0.559	-1.372	0.515	0.086	-0.332	0.327
0.597	0.164	-1.416	-0.112	-0.619	0.675	-0.652	2.545	1.844	-0.006
0.039	-0.473	-1.056	0.062	-1.246	0.056	0.014	-0.086	0.287	0.064
-1.126	0.452	1.767	-0.439	0.095	1.323	1.213	1.287	-0.269	-0.168
0.682	-0.271	2.108	1.835	0.066	-0.232	1.411	0.248	-0.182	-0.962

-0.028	0.919	0.915	0.069	-1.132	-0.923	-1.911	1.558	0.262	-0.957
-1.542	-1.171	-0.568	-0.122	-1.468	0.588	-0.994	-0.122	0.573	1.923
-0.158	-1.213	0.590	0.454	-0.792	-0.698	0.612	0.122	-0.207	1.016
0.091	2.016	0.193	0.092	-1.857	0.586	1.149	-0.291	-2.691	-2.676
0.337	2.704	-2.068	-3.503	-0.266	-1.389	-0.612	-0.556	2.156	-0.005
0.251	0.409	0.632	0.977	-1.004	0.928	-1.032	-1.060	1.297	1.204
0.792	1.675	-0.038	1.306	-0.125	-0.127	1.804	1.301	1.134	1.093
0.592	0.515	-0.793	0.901	-1.353	0.304	0.367	0.980	1.462	1.093
0.578	-0.177	-1.041	-0.731	1.331	-1.079	-0.319	0.453	-1.001	0.135
0.291	0.010	0.298	0.820	0.451	-1.305	-0.504	0.446	-0.638	0.256
-0.327	0.407	-0.026	0.019	0.717	0.486	0.924	0.528	-0.010	-0.693
-0.038	-1.662	0.640	0.566	0.293	1.168	1.235	-0.717	-0.100	0.026
1.374	2.043	-0.489	1.113	-1.747	0.938	0.592	0.295	1.119	0.208
0.308	-0.535	1.615	-1.028	0.958	-0.660	1.538	0.756	1.306	0.632
0.244	2.134	0.112	-1.352	-0.601	-0.035	0.933	1.057	0.058	-3.285
1.486	-1.330	-1.231	-0.388	-0.778	-2.394	-0.654	0.134	1.763	-1.052
-1.772	0.403	0.694	0.308	-0.761	-0.391	-0.803	-0.976	1.697	-0.646
-0.873	1.439	-1.192	0.681	0.564	0.440	1.328	0.533	-0.151	-2.209
-1.574	-0.892	-0.097	-1.347	-0.603	0.885	-2.623	-0.809	-0.872	0.409
-0.795	-0.679	-0.871	-1.085	-0.873	0.711	1.203	1.181	-0.861	0.598
-0.203	0.578	-1.211	-1.845	1.357	-0.404	1.266	0.462	-0.859	1.227
-0.852	0.615	-2.627	1.011	-0.504	-0.383	1.177	0.942	-2.268	0.069
0.022	-1.295	-1.375	1.630	-0.703	0.128	0.214	0.418	1.656	-1.571
-0.604	0.952	0.026	-0.161	0.621	1.093	-0.467	0.564	-0.994	-1.802
-0.318	-0.619	-0.708	0.368	-0.100	0.472	-0.699	-0.764	0.344	1.286
-0.941	0.512	-0.155	0.887	-1.350	-0.784	0.692	0.267	-1.310	0.563
0.292	0.051	-0.432	-0.253	-0.802	0.093	0.153	-1.221	0.234	0.480
0.934	0.169	0.096	1.269	-0.965	-0.048	0.636	-0.287	0.088	1.454
1.316	-0.445	0.559	-1.028	0.465	-0.394	1.334	0.105	0.908	-0.040
0.333	-0.532	0 020	0.117	-0.325	-1.218	-1.240	-1.401	-1.864	0.179
0.012	0.072	1.471	0.613	-2.320	-0.380	-0.330	0.369	0.605	-0.639
-0.932	0.630	-0.788	0.047	-1.830	-0.696	-1.109	-2.266	0.376	-0.970
0.464	0.710	1.339	0.438	-1.003	-1.649	0.136	0.651	0.578	-0.111
-1.474	0.213	0.549	2.095	-1.366	-0.364	-0.293	0.320	-1.387	0.671
-0.866	1.931	1.925	0.035	-0.758	0.846	0.166	-0.579	-0.631	1.161

0.873	0.029	0.743	1.279	0.764	2.131	-1.086	0.689	0.386	-1.496
0.078	0.093	0.012	-1.140	-0.749	-0.197	-1.901	-0.774	1.642	-0.026
-1.142	-0.848	0.505	-1.200	0.358	0.654	-0.379	0.214	-1.461	0.788
-0.204	-1.715	-0.059	-1.107	-1.298	0.365	-0.797	0.416	-0.614	2.202
0.396	-0.191	0.599	1.049	-0.158	-0.233	-1.190	-0.299	-0.541	1.387
1.140	0.706	-0.643	0.920	0.562	1.007	-0.038	-0.160	-0.687	0.323
-1.068	-1.533	-0.101	0.111	0.286	-0.082	1.903	2.815	-0.514	0.820
0.769	0.873	2.093	-0.620	0.508	0.371	0.877	-0.779	-1.002	-1.872
1.192	-1.799	0.830	-0.384	0.665	1.162	-0.455	1.664	0.359	-1.638
-0.168	-1.582	-0.153	-0.165	-2.129	0.515	0.470	-0.664	-0.432	1.294
-0.540	0.057	-0.711	-0.623	0.183	0.446	0.592	-0.982	0.184	1.586
-0.946	0.441	-1.151	-0.307	-0.970	-0.044	0.737	-0.738	0.139	1.660
-0.394	-0.030	0.106	-0.922	-1.315	2.134	0.043	0.042	-0.062	-0.850
0.170	-0.053	-0.330	-0.371	0.918	-2.029	-0.097	0.372	-0.176	0.381
-1.211	-1.455	-0.479	-1.465	-0.987	0.549	1.131	-1.853	-0.508	0.201
0.830	-0.213	1.958	0.966	0.627	-0.369	-0.086	-0.413	-0.271	1.482
-0.094	-1.821	-0.860	-1.903	-0.355	1.438	0.372	0.664	-0.583	-1.240
-0.459	1.468	-0.335	1.108	1.347	0.067	-0.154	-0.415	-1.412	-0.484
0.049	-0.464	-0.589	0.716	0.118	-0.228	0.515	-0.346	-1.066	0.785
-1.363	0.733	-0.312	0.186	-0.583	0.486	1.358	-0.061	0.555	-0.095
1.196	1.188	0.534	-0.651	-1.503	-1.026	0.397	-0.149	0.781	1.560
-0.754	0.302	-1.810	-1.246	1.184	0.109	0.493	1.144	-0.661	1.402
-0.410	-0.475	1.096	-1.281	-0.579	1.583	-0.430	0.941	0.418	-0.363
-1.771	0.306	0.136	-1.935	1.258	-0.396	0.603	1.488	0.582	-1.124
-1.007	-0.630	0.584	0.136	-0.055	-0.312	-0.716	0.620	-0.156	-1.570
0.140	0.326	0.709	-0.002	-1.623	1.359	0.406	-0.685	0.939	-0.326
-0.868	-0.618	0.171	-0.749	-0.512	-0.064	0.063	-1.108	-0.034	-1.010
-0.655	-1.232	-0.058	-0.799	-0.346	-0.247	-0.711	0.196	-0.757	0.813
1.195	1.145	0.011	1.465	0.532	0.485	-0.795	-1.602	-0.590	0.995
-0.896	0.867	0.790	0.115	1.496	0.686	-0.058	0.048	-0.036	-0.201
0.768	0.908	-0.538	0.469	0.819	0.303	0.552	-0.148	-0.168	0.730
-0.206	0.763	-0.852	-1.084	0.620	-1.496	-0.590	-2.620	-1.161	-2.161
1.501	0.080	2.316	-0.279	-0.568	0.580	-0.183	-2.552	-0.120	1.459
-1.039	0.836	-0.522	-0.744	-1.195	0.090	-1.614	0.733	-1.001	-0.158
-1.096	1.729	-2.352	-0.287	2.109	-0.250	0.137	-0.769	1.479	0.310

1.013	0.341	0.677	-0.452	-0.055	-0.235	-0.462	-1.100	-0.035	-0.350
0.407	0.050	0.256	-0.098	1.150	-0.401	0.766	1.122	-0.399	1.414
1.143	-0.951	0.664	0.686	-0.402	-2.309	-0.528	0.396	-0.609	0.322
-0.853	-0.067	1.175	1.065	1.428	-0.754	0.640	-1.014	0.509	1.020
-1.133	-1.685	-0.662	0.392	-1.182	-0.140	-0.417	0.259	1.024	-0.528
0.544	1.254	0.384	2.243	0.708	1.029	-2.864	-0.312	0.434	0.352
-1.805	0.774	0.155	1.138	-0.065	-0.118	1.066	-0.674	-0.149	0.486
2.195	-1.119	0.080	-0.889	-0.079	0.522	-3.046	0.603	0.992	-0.488
-0.208	-0.272	1.957	-1.749	-0.164	1.554	0.186	1.277	0.577	-0.061
0.715	-0.289	1.960	-0.761	1.272	-0.220	-0.083	0.559	-2.140	-0.666
-0.142	0.509	0.135	0.208	0.147	-1.993	0.651	1.220	-0.538	0.599
-0.151	-0.855	0.760	-0.679	-0.229	-2.238	1.483	-0.172	1.439	0.242
0.319	0.036	-1.478	0.636	1.679	-0.861	0.569	2.810	-0.690	1.198
-1.119	-0.356	0.220	-0.808	1.238	-2.127	-0.672	-0.065	0.319	0.911
0.483	0.849	-1.205	0.081	-0.663	-0.246	-1.377	-0.572	2.336	-0.164
0.445	-0.211	0.970	0.198	0.493	0.168	1.491	-0.997	-1.542	0.262
-0.226	0.809	-1.062	0.448	-0.040	1.542	-0.520	0.519	-0.424	-0.298
-0.079	-0.189	2.402	0.088	0.721	0.300	0.316	0.636	-0.996	0.643
-0.819	-0.046	1.647	0.399	0.949	0.151	1.286	0.102	-0.713	-1.727
-0.143	1.382	-1.039	-0.676	0.377	-0.084	-1.476	0.552	-1.675	-0.895
0.802	0.834	1.776	-0.758	2.634	1.146	0.655	0.492	-2.286	-0.431
0.438	0.857	0.357	0.052	1.248	-0.146	-2.766	2.056	0.307	0.758
-1.251	-0.275	1.089	-0.336	0.330	-0.148	-0.919	-1.530	1.557	2.032
0.750	1.982	-1.252	1.476	0.100	0.284	-0.400	0.396	-0.660	-1.504
2.625	-0.795	0.142	0.618	-2.100	0.010	1.239	-0.339	0.125	0.678
-0.653	-0.682	0.290	0.002	-0.703	1.264	0.446	-0.617	0.346	1.083
1.319	1.849	-1.051	-0.240	0.762	0.367	0.743	0.189	-0.633	0.879
2.026	-0.328	0.510	-0.592	-0.739	-0.225	1.264	-1.126	-0.472	0.322
-0.282	0.112	0.774	2.315	-1.084	-0.268	-2.129	-0.496	0.366	-0.933
-2.360	-0.210	-1.095	-0.225	0.966	-0.690	-2.045	0.826	2.481	-1.090
-1.552	-0.473	-0.135	-1.129	-0.394	-1.830	-1.174	-0.771	-0.654	0.764
-1.268	-0.879	-0.220	0.886	0.270	0.169	-1.246	2.233	-0.582	-1.093
0.967	-0.167	0.972	0.608	0.544	-0.636	0.632	-0.096	0.280	-0.211
-0.041	-0.285	0.075	-2.535	-0.777	1.179	-1.752	1.138	-1.945	-0.270
0.299	0.067	-0.531	0.060	-0.373	0.501	0.044	-0.648	-1.330	0.513

-1.042	-0.533	-0.230	1.292	-1.612	0.424	-1.668	-0.351	-0.748	1.473
0.691	-1.018	0.599	-1.179	-0.272	0.768	0.426	-0.050	1.182	2.237
-1.123	0.250	1.864	-0.069	-0.796	0.075	0.446	-0.810	-0.354	-0.259
-1.389	-0.533	-1.918	0.236	0.309	-0.789	0.398	0.075	-1.747	1.192
-0.084	1.016	-1.216	0.843	-0.156	1.157	0.004	0.838	-0.251	-0.878
0.059	0.839	-0.905	0.874	0.398	0.056	-0.205	-1.293	0.331	-1.315
-0.906	0.335	-1.021	0.046	2.298	0.059	-0.175	-0.131	0.080	0.323
0.882	-0.454	-0.436	0.808	0.721	0.341	-0.327	-0.792	-0.216	-0.790
0.519	-0.219	1.338	1.392	-0.828	-1.631	-0.271	0.751	0.641	-0.333
2.550	0.155	1.070	0.387	-0.068	0.554	0.208	-0.217	1.130	0.324
1.611	-0.330	0.354	0.658	-0.234	-1.576	-1.283	-0.684	-0.675	2.214
0.318	0.658	-1.038	-0.269	0.627	1.039	-0.381	0.065	-1.649	-0.153
-2.002	1.559	-0.341	0.080	1.192	0.216	0.533	-1.086	0.095	0.815
2.376	-0.031	-0.084	-0.053	-0.331	-0.918	0.003	-1.880	0.940	0.193
0.068	1.404	0.870	0.021	0.801	0.883	1.592	0.457	-0.464	1.789
-0.221	-0.938	-0.211	0.600	0.584	-1.086	-0.906	0.246	-0.438	0.167
0.168	0.596	1.186	0.780	-0.834	1.380	0.736	0.092	0.473	-0.020
0.808	0.153	0.195	-1.230	-0.546	-0.074	-0.651	1.898	-0.226	-1.009
1.397	-1.450	0.241	-0.733	-0.736	0.321	0.805	0.669	-2.284	-0.074
-0.670	-1.736	0.603	0.222	-1.225	0.310	0.595	0.325	-0.626	0.614
-1.887	0.708	1.335	-1.116	0.177	0.437	-0.933	-0.276	-0.074	0.180
0.793	-0.385	1.228	0.752	-0.029	-0.463	1.223	-1.897	0.776	-0.444
0.836	0.785	-0.359	2.134	-0.820	1.782	-0.562	-1.545	1.348	-0.169
0.060	0.728	-0.772	1.201	0.114	1.546	0.718	1.341	0.673	-0.181
1.557	-0.978	-0.389	0.990	0.627	0.527	0.071	-0.337	-1.683	-0.139
-0.468	0.401	-0.304	0.276	-0.450	-0.711	-0.182	1.683	-1.632	2.336
-0.145	1.097	1.152	-0.139	0.949	0.251	0.549	-1.319	-0.237	0.056
1.147	-0.685	-0.349	-1.428	-0.934	-0.864	0.234	0.829	1.731	-1.986
0.441	-0.086	1.428	0.130	1.155	2.460	-1.030	1.864	-0.723	-0.479
0.503	-1.133	0.685	0.452	-1.270	-1.454	-0.433	-0.443	-1.068	1.346
-1.725	1.345	2.339	-2.472	-0.402	-1.031	1.151	1.230	0.008	1.041
1.066	0.608	-0.753	1.051	-0.108	-0.293	0.494	0.384	-1.872	0.329
0.328	-0.114	0.566	-1.948	-0.589	1.154	0.663	0.142	1.821	-1.046
0.385	0.517	1.360	0.086	-0.428	0.173	-0.372	-0.271	-1.081	-2.004
-0.135	-1.803	-1.608	0.778	0.010	-0.215	-2.060	-0.461	-0.122	1.998

ОГЛАВЛЕНИЕ

Типовой расчет по теории вероятностей

Тема 1. Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей……………………………..3
Тема 2. Формула полной вероятности и формула Байеса ………………………..8
Тема 3. Повторение опытов (схема Бернулли) ……………………………………..13
Тема 4. Дискретные случайные величины ……………………………………………17
Тема 5. Непрерывные случайные величины ………………………………………..23
Тема 6. Функции случайных величин…………………………………………………30

Типовой расчет по математической статистике

Тема 1. Оценивание, проверка статистических гипотез. Методические указания ……………………………………………...……………………..38
Составление статистического ряда, гистограммы и нахождение точечных оценок математического ожидания и дисперсии ………………………………..38
Построение доверительного интервала ……………………………………………..43
Проверка статистических гипотез ……………………………………………………..44
Тема 2. Корреляция и регрессия. Построение выборочного уравнения линии линейной регрессии. Методические указания ………..………………………...45
Варианты индивидуальных заданий…………………………………….…………...50
Приложение 1. Стандартное нормальное распределение………………………53
Приложение 2. Распределение хи-квадрат ………………………………………….54
Приложение 3. Данные для формирования индивидуальных заданий по теме “Оценивание, проверка статистических гипотез”….………………..…………55