4. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание. Груз массой m прикреплен к пружине жесткостью c (рис. 4.1) . Начальная деформация пружины λ_o, начальная скорость груза v_0. Найти уравнение движения груза; амплитуду, частоту и период колебаний; наибольшее значение модуля силы упругости. Массой пружины, а также сопротивлениями движению груза и пружины пренебречь. Начало координат взять в положении статического равновесия груза на пружине. Принять $g = 10$ м/с^2.

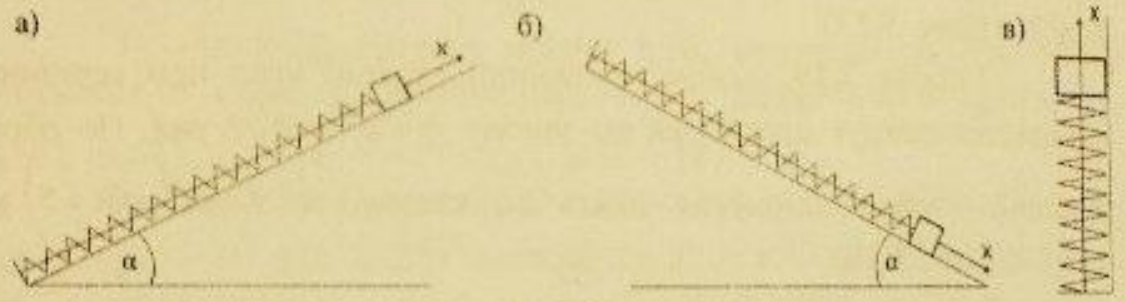

Рис. 4.1.

Пример: Пружина жесткостью 20 Н/см расположена вдоль плоскости, наклоненной к горизонту под углом 30°. В некоторый момент пружину сжимают на 0,5 см, прикрепляют груз массы 10 кг и сообщают ему скорость 56 см/с, направленную вверх параллельно наклонной плоскости.

Решение. Найдем сначала положение О статического равновесия груза (рис. 4.2, а). Пусть А – точка, соответствующая концу недеформированной пружины. Тогда АО = $\lambda_{ст}$ – статическая деформация, которой соответствует сила упругости $F_{ст} = c\,\lambda_{ст}$.

Рассмотрим равновесие груза. На него действуют три силы $\overline{P}$, $\overline{N}$ и $\overline{F}_{ст}$. Выберем ось x параллельно плоскости и напишем уравнение равновесия в проекциях на эту ось:

$$\sum X_i = P\sin 30^0 - F_{ст} = 0,$$

откуда $\lambda_{ст} = P\sin 30^0 / c = mg\sin 30^0 / c$.

деформация λ пружины определяется отрезком АМ = $x + \lambda_{ст}$. В то же время $c\lambda_{ст} = P\sin 30^0$, поэтому $F = cx + P\sin 30^0$.

Составляем дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = X.$$

Очевидно, что $X = P\sin 30^0 - F = P\sin 30^0 - cx - P\sin 30^0 = -cx$. Дифференциальное уравнение в таком случае примет вид:

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Обозначим $k^2 = c/m$, где k – собственная частота, $k = \sqrt{2000/10} \approx 14$ с$^{-1}$. Тогда можно написать:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Таким образом, мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$ имеет корни $r = \pm k_i$, которым соответствует общее решение следующего вида:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt, \qquad (4.1)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Найдем их. В начальный момент груз находился в положении M_0 (пружина предварительно была сжата на величину λ_0 = 0,5 см), значит $x_0 = -OM_0 = -\lambda_0 - \lambda_{ст} = -0{,}5 - 2{,}5 = -3$ см. Начальная скорость известна: $\dot{x}_0 = -56$ см/с.

Продифференцируем уравнение (4.1) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt, \qquad (4.2)$$

Подставив в уравнение (4.1) и (4.2) $t = 0$ и начальные данные, получим $x_0 = -C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$, $\dot{x}_0 = -C_1 k \cdot 0 + C_2 k \cdot 1$. Решение этой системы даёт: $C_1 = x_0 = -3$ см, $C_2 = \dot{x}_0 / k = -56/14 = -4$ см.

Уравнение движения груза можно записать так:

$$x = -(3\cos 14t + 4\sin 14t) \text{ см}.$$

Амплитуда колебаний:

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ см} = 0{,}05 \text{ м}.$$

Период колебаний: $\tau = 2\pi / k = 6{,}28/14 \approx 0{,}45$ с.

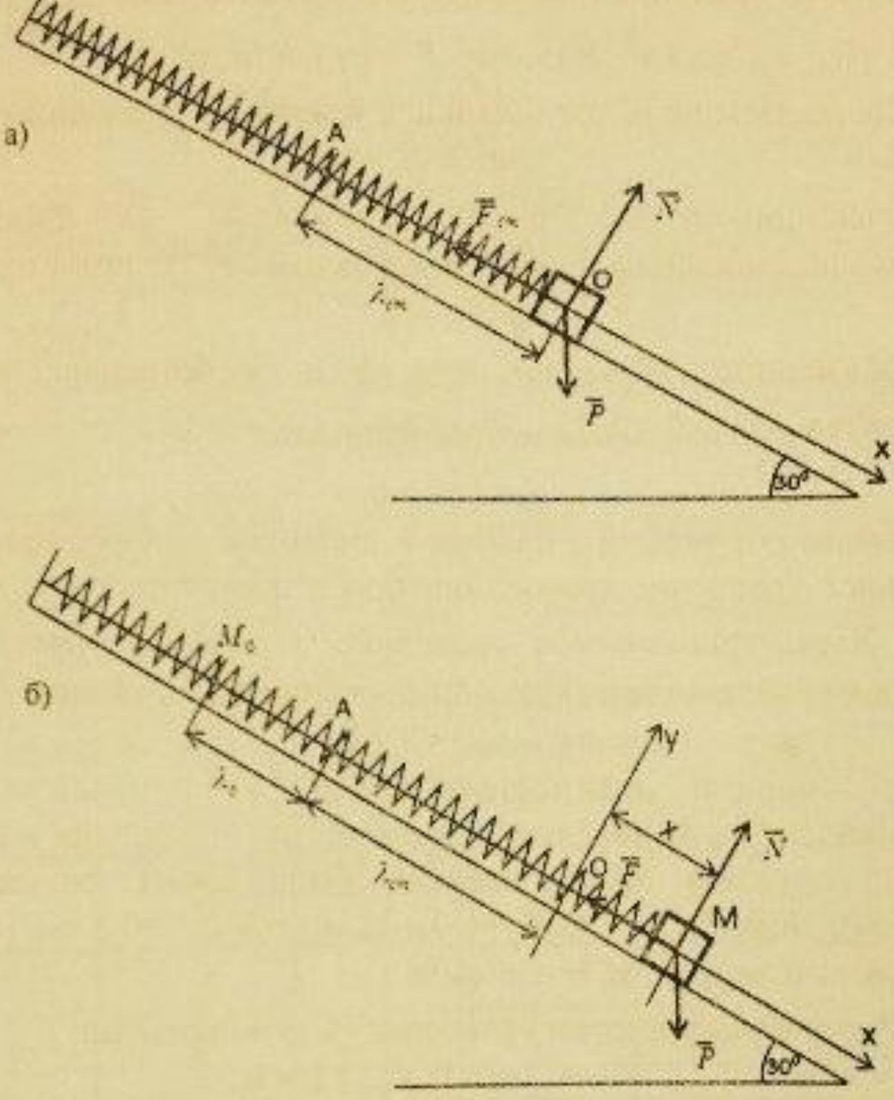

Рис. 4.2

Для вычислений в единицах СИ нужно коэффициент жесткости перевести в Ньютоны на метры. Тогда $c = 2000$ Н/м. Примем $g = 10$ м/с^2. Таким образом, $\lambda_{ст} = 10 \cdot 10 \cdot 0{,}5 / 2000 = 0{,}025$ м $= 2{,}5$ см.

Начало координат поместим в положении О статического равновесия груза (рис. 4.2, б). Груз изобразим в промежуточном положении М. На груз при его движении действуют силы $\overline{P}$, $\overline{N}$ и $\overline{F}$, причем на основании закона Гука $F = c\lambda = c(x + \lambda_{ст})$, так как полная

Значение силы упругости максимально при наибольшей деформации пружины: $\lambda_{max} = \lambda_{ст} + a$. Поэтому $F_{max} = c(\lambda_{ст} + a) = 2000 \cdot (0{,}025 + 0{,}05) = 150$ Н.

Задачи 4.1-4.5. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 4.6-4.10. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вверх.

Задачи 4.11-4.15. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

Задачи 4.16-4.20. К сжатой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 4.21-4.25. К растянутой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

Задачи 4.26-4.30. Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вниз.

Заданные значения величин приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

№ зад.	№ рис.	m, кг	c, Н/см	λ_0, см	ϑ_0, см/с	α	№ зад.	№ рис.	m, кг	c, Н/см	λ_0, см	ϑ_0, см/с	α
1	4.1,а	$7\sqrt{2}$	10	-	-	45°	16	4.1,а	$14\sqrt{2}$	20	5	-	45°
2	4.1,а	$16\sqrt{3}$	10	-	-	60°	17	4.1,а	$36\sqrt{3}$	10	48	-	60°
3	4.1,б	$28\sqrt{2}$	10	-	-	45°	18	4.1,б	$28\sqrt{2}$	40	3	-	45°
4	4.1,б	20	10	-	-	30°	19	4.1,б	10	20	3,5	-	30°
5	4.1,в	20	40	-	-	-	20	4.1,в	10	10	5	-	-
6	4.1,а	$14\sqrt{2}$	20	-	240	45°	21	4.1,а	$7\sqrt{2}$	10	3	-	45°
7	4.1,а	$16\sqrt{3}$	40	-	96	60°	22	4.1,а	$4\sqrt{3}$	10	4	-	60°
8	4.1,б	$7\sqrt{2}$	10	-	240	45°	23	4.1,б	$28\sqrt{2}$	10	18	-	45°
9	4.1,б	5	5	-	120	30°	24	4.1,б	10	20	7,5	-	30°
10	4.1,в	16	8	-	105	-	25	4.1,в	20	20	10	-	-
11	4.1,а	$7\sqrt{2}$	10	-	240	45°	26	4.1,б	20	10	$\lambda_{ст}$	42	30°
12	4.1,а	$36\sqrt{3}$	90	-	96	60°	27	4.1,в	20	20	$\lambda_{ст}$	40	-
13	4.1,б	$14\sqrt{2}$	20	-	240	45°	28	4.1,б	10	5	$\lambda_{ст}$	28	30°
14	4.1,б	10	10	-	120	30°	29	4.1,в	10	10	$\lambda_{ст}$	30	-
15	4.1,а	32	16	-	105	-	30	4.1,в	20	40	1	42	-