

3. КОМПЛЕКСНАЯ ЗАДАЧА ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

З а д а н и е. Движение точки задано координатным способом на плоскости Oxy . Следует найти траекторию точки и построить ее на рисунке. Скорость, полное ускорение и касательное ускорение найти как функции времени. Скорость, ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определить в момент времени t_1 . Векторы $\vec{v}_1, \vec{w}_1, \vec{w}_{1\tau}, \vec{w}_{1n}$ показать на рисунке.

П р и м е р. Движение точки задано уравнениями $x = 6 \sin t, y = 4 \cos 2t; t_1 = 5\pi/4$ с.

Р е ш е н и е.

А. Определение траектории точки. Здесь следует исключить время из уравнений движения. В данном примере имеем:

$$\sin t = \frac{x}{6}, \quad \cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t.$$

Отсюда получаем уравнение траектории

$$y = 4 - \frac{2}{9} x^2.$$

Это парабола, симметричная относительно оси ординат. Из условий $-1 \leq \sin t \leq 1, -1 \leq \cos 2t \leq 1$ следует, что $-6 \leq x \leq 6, -4 \leq y \leq 4$. Это означает, что траекторией будет не вся парабола, а лишь ее часть, заключенная в названных интервалах. Она изображена на рис. 3.1.

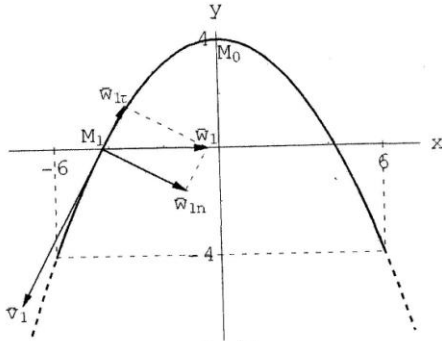


Рис. 3.1

Вершина параболы на рисунке соответствует начальной точке траектории M_0 с координатами (при $t_0 = 0$) $x_0 = 0, y_0 = 4$.

Б. Определение скорости и ускорения точки в зависимости от времени. Вычисляем проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси:

$$v_x = \dot{x} = 6 \cos t, \quad v_y = \dot{y} = -8 \sin t,$$

$$w_x = \ddot{x} = -6 \sin t, \quad w_y = -16 \cos 2t.$$

Величины скорости и ускорения равны

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{36 \cos^2 t + 64 \sin^2 2t},$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{36 \sin^2 t + 256 \cos^2 2t}.$$

Касательное ускорение будет

З а д а н и я 1а – 30а. Уравнения движения и момент времени t_1 указаны в таблице 3.1,а.

З а д а н и я 1б – 30б. Уравнения движения и момент времени t_1 даны в таблице 3.1,б.

Таблица 3.1, а

№ задания	№ задания			№ задания			
	x, м	y, м	t, с	x, м	y, м	t, с	
1а	4 cos t	sin t	3π/4	16а	8√2 cos t	12√2 sin t	3π/4
2а	4 e ^t	3 e ^t	0	17а	4 e ^t	8 e ^t	0
3а	4√2 sin t	3 cos 2t	3π/4	18а	3√2 cos t	12 cos 2t	π/4
4а	2 sin t	8 cos t	3π/4	19а	4√2 sin t	3√2 cos t	5π/4
5а	8 t	12 e ^t	0	20а	2 t	3 e ^t	1
6а	2 t	4 sin t	π/6	21а	4√2 cos t	3 cos ² t	3π/4
7а	2 cos ² t	7 sin 2t	π/8	22а	5√2 cos t	12√2 sin t	5π/4
8а	5 e ^t	4 e ^t	0	23а	4√2 cos t	3 cos ² t	3π/4
9а	t	2 sin t	5π/6	24а	8√2 sin t	6 cos ² t	5π/4
10а	3√2 cos t	5√2 sin t	5π/4	25а	30√2 sin t	16√2 cos t	3π/4
11а	2 t	4 e ^t	0	26а	2 t	4 cos t	2π/3
12а	√2 sin t	2 cos 2t	5π/4	27а	2√2 cos t	2 cos 2t	7π/4
13а	10√2 sin t	5√2 cos t	7π/4	28а	2 cos t	t	π/3
14а	3 e ^t	4 e ^t	0	29а	3√2 cos t	4 cos ² t	π/4
15а	8√2 sin t	5 cos ² t	π/4	30а	10√2 sin t	4 cos 2t	3π/4

$$w_r = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v} = \frac{-36 \sin t \cos t + 128 \sin 2t \cos 2t}{\sqrt{36 \cos^2 t + 64 \sin^2 2t}}.$$

В. Определение положения точки и ее кинематических характеристик в заданный момент времени. При $t = t_1 = 5\pi/4$ с имеем координаты точки M_1

$$x_1 = 6 \sin \frac{5\pi}{4} = -3\sqrt{2} = -4,24 \text{ м}, \quad y_1 = 4 \cos \frac{5\pi}{4} = 0.$$

Следовательно, точка M_1 находится на оси абсцисс (рис.3.1). По формулам предыдущего пункта находим

$$v_1 = \sqrt{36 \cdot 0,5 + 64} = \sqrt{82} = 9,06 \text{ м/с}, \quad v_x = 6 \cos \frac{5\pi}{4} < 0.$$

Последнее означает, что вектор скорости \vec{v}_1 направлен по касательной к траектории вниз. Вектор полного ускорения точки строим по его проекциям:

$$w_x = -6 \sin \frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ м/с}^2, \quad w_y = -16 \cos \frac{5\pi}{2} = 0, \quad w_1 = 4,24 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \vec{w}_1 направлен вдоль оси Ox вправо. Далее:

$$w_{1r} = \frac{-36 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 0}{9,06} = -1,99 \text{ м/с}^2,$$

$$w_{1n} = \sqrt{w_1^2 - w_{1r}^2} = \sqrt{(4,24)^2 - (1,99)^2} = 3,75 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории будет

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{w_{1n}} = \frac{82}{3,75} = 21,9 \text{ м}.$$

Таблица 3.1, б

№ задания	№ задания			№ задания			
	x, м	y, м	t, с	x, м	y, м	t, с	
1б	3 sin t	2 cos 2t	3π/4	16б	8√2 cos t	15√2 sin t	7π/4
2б	6 e ^t	3 e ^t	0	17б	6 e ^t	8 e ^t	0
3б	2√2 sin t	3 cos 2t	3π/4	18б	5√2 cos t	12 cos 2t	3π/4
4б	2 sin t	6 cos t	5π/4	19б	6√2 sin t	3√2 cos t	3π/4
5б	2 t	3 e ^t	0	20б	3 t	4 e ^t	1
6б	2 t	6 sin t	π/6	21б	8√2 cos t	6 cos ² t	π/4
7б	6 cos ² t	21 sin 2t	π/4	22б	10√2 cos t	24√2 sin t	3π/4
8б	5 e ^t	12 e ^t	1	23б	8√2 cos t	6 cos ² t	5π/4
9б	t	4 sin t	5π/6	24б	4√2 sin t	3 cos ² t	3π/4
10б	3√2 cos t	4√2 sin t	7π/4	25б	15√2 sin t	8√2 cos t	5π/4
11б	2 t	4 e ^t	1	26б	2 t	6 cos t	2π/3
12б	√2 sin t	2 cos 2t	5π/4	27б	2√2 cos t	2 cos 2t	7π/4
13б	10√2 sin t	5√2 cos t	7π/4	28б	2 cos t	t	π/3
14б	3 e ^t	4 e ^t	0	29б	3√2 cos t	4 cos ² t	π/4
15б	8√2 sin t	5 cos ² t	π/4	30б	10√2 sin t	4 cos 2t	3π/4