1. Операторным методом найти решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = \cos t$, если $y(0) = y'(0) = 0$. (*Ответ*: $y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\sin t$.)

2. Операторным методом найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = e^{-t}$. (*Ответ*: $y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-t}$.)

3. Операторным методом найти решение системы уравнений $\begin{cases} x' = y - 4x, \\ y' = x + y, \end{cases}$ удовлетворяющее условиям $x(0) = 2$, $y(0) = 3$. (*Ответ*: $x = e^{-2t} + e^{-3t}$, $y = 2e^{-2t} + e^{-3t}$.)

16.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ.16

ИДЗ-16.1

1. По заданному оригиналу найти изображение по Лапласу.

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ M_0 + M_1t + M_2t^2 + M_3t^3 + \\ + e^{\alpha t}((At + B)\sin\omega t + (Ct + D)\cos\omega t) + \\ + Ee^{\alpha t}\sigma_0(t) + F\delta(t) + G\delta_1(t) \text{ при } t \geq 0. \end{cases}$$

Значения параметров α, ω, M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, A, B, C, D, E, F, G приведены в табл. 16.1.

Таблица 16.1

Номер варианта	α	ω	M_0	M_1	M_2	M_3	A	B	C	D	E	F	G
1.1	0	1	0	2	0	0	2	1	0	0	3	0	0
1.2	0	1	1	0	0	0	0	1	2	0	0	4	0
1.3	0	0	1	0	2	1	0	0	1	0	0	0	5
1.4	1	2	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1.5	−2	1	2	1	0	1	0	2	0	1	0	2	0
1.6	0	2	0	0	−1	2	0	−1	1	0	0	0	3
1.7	1	1	2	1	−1	1	0	1	0	0	0	0	0
1.8	−1	0	3	−1	2	0	0	0	−1	0	0	−2	0
1.9	0	1	2	0	−1	0	1	2	0	1	0	0	0
1.10	1	2	0	0	2	0	1	−1	0	0	0	0	0
1.11	0	1	2	−1	1	2	0	1	0	2	0	0	0
1.12	2	0	1	0	0	1	0	0	2	1	0	3	0
1.13	−3	1	2	1	−1	1	0	2	0	0	0	0	0
1.14	0	2	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	5
1.15	1	3	0	0	2	0	−1	0	1	0	0	1	0
1.16	3	1	2	3	−1	1	0	2	0	−1	0	0	0
1.17	0	2	0	0	2	2	1	−2	0	1	0	0	0
1.18	1	0	3	1	1	1	1	0	2	0	0	0	0
1.19	−1	2	0	2	−1	1	2	0	0	1	0	0	0
1.20	2	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0
1.21	0	3	0	0	2	0	1	−2	0	1	0	-1	2
1.22	0	1	1	0	0	−1	0	1	1	0	0	3	0
1.23	−2	0	2	0	1	0	0	0	1	2	4	0	0
1.24	1	2	2	1	−1	0	1	0	0	−1	2	0	1
1.25	0	0	0	2	0	−1	0	0	2	−1	0	1	0
1.26	−1	4	5	−3	0	0	0	1	0	0	2	2	0
1.27	1	0	3	0	0	5	2	0	0	0	0	0	4
1.28	2	0	0	0	3	0	0	0	2	−1	0	3	0
1.29	−5	3	1	0	0	2	0	−3	0	0	2	0	−1
1.30	2	0	0	2	0	−1	0	0	2	−1	0	1	0

2. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) \text{ при } 0 \le t < t_1, \\ f_2(t) \text{ при } t_1 \le t < t_2, \\ 0 \quad \text{ при } t < 0 \text{ и } t \ge t_2. \end{cases}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и числовые значения параметров t_1, t_2 приведены в табл. 16.2.

Таблица 16.2

Номер варианта	$f_1(t)$	$f_2(t)$	t_1	t_2
2.1	t	$2-t$	1	2
2.2	0	$\cos t$	$\pi/2$	2
2.3	t/π	$-t/\pi$	π	π
2.4	$2t$	$-2(t-4)$	2	2π
2.5	t	$\sin t$	$\pi/2$	4
2.6	3	-3	1	π
2.7	$2t$	-2π	1/2	2
2.8	$2t/\pi$	$2(\pi-t)/\pi$	$\pi/2$	1
2.9	$\cos t$	-1	π	π
2.10	π	$-\pi$	π	2π
2.11	$2t$	$2(2-t)$	1	2
2.12	$\sin t$	$\cos t$	$\pi/2$	π
2.13	t	$-t$	1	2
2.14	0	$-\sin t$	$\pi/2$	π
2.15	t	$2\pi-t$	π	2π
2.16	$(1/\pi)t$	1	π	2π
2.17	$\sin t$	$-\cos t$	$\pi/2$	π
2.18	t	$4-t$	2	4
2.19	1	$\sin t$	$\pi/2$	π
2.20	t	$t-2$	1	2
2.21	$\cos t$	$\sin t$	$\pi/2$	π
2.22	t	$\pi-t$	$\pi/2$	π
2.23	$t/2$	$-t/2$	2	4
2.24	$-\sin t$	-1	$\pi/2$	π
2.25	$2t$	$2(2\pi-t)$	π	2π
2.26	$1-2t/\pi$	$-3+2t/\pi$	π	2π
2.27	1	$t/2$	2	3
2.28	$t-2$	3	5	6
2.29	$\exp(-2(t-1))$	1	1	2
2.30	$\exp t$	-1	1	2

3. По заданному изображению

$$\frac{Ap^2 + Bp + C}{(p+a)(p^2 + bp + c)}$$

найти оригинал. Значения коэффициентов A, B, C, a, b, c приведены в табл. 16.3.

Таблица 16.3

Номер варианта	A	B	C	a	b	c
3.1	3	−9	16	−2	−6	13
3.2	2	16	9	−1	4	4
3.3	1	15	20	−2	2	10
3.4	9	−21	−6	1	−5	6
3.5	0	−6	12	1	−4	13
3.6	−4	−3	−3	0	2	1
3.7	0	3	13	−1	2	5
3.8	2	−10	24	−2	−2	−3
3.9	1	3	−6	1	6	13
3.10	0	−4	1	0	−2	1
3.11	1	13	3	−3	2	2
3.12	2	5	5	2	2	−3
3.13	0	0	13	2	−2	10
3.14	2	−13	39	1	−4	4
3.15	1	−6	8	2	−2	4
3.16	4	0	1	1	1	0
3.17	1	9	44	−1	4	13
3.18	0	−4	5	−1	0	−1
3.19	1	−3	12	1	−2	5
3.20	7	12	−7	3	1	−2
3.21	2	−7	11	1	−2	2
3.22	3	2	11	3	−2	1
3.23	1	3	2	−1	1	1
3.24	3	8	17	−2	2	1
3.25	5	5	−58	−4	2	−3
3.26	1	5	9	10	4	20
3.27	2	4	8	8	−4	5
3.28	3	3	7	6	4	−5
3.29	4	2	6	4	6	−7
3.30	5	1	5	2	−8	25

Решение типового варианта

1. По заданному оригиналу $f(t)$ найти изображение по Лапласу $F(p)$. Общий вид функции $f(t)$ взять из табл. 16.1, вариант 1.30.

▸ Коэффициенты $\alpha = 2$, $\omega = 0$, $M_0 = 0$, $M_1 = 2$, $M_2 = 0$, $M_3 = -1$, $E = G = 0$, $F = 1$, $A = B = 0$, $C = 2$, $D = -1$ берем из последней строки табл. 16.1. Подставляя их в выражение для функции $f(t)$, получаем

$$f(t) = 2t - t^3 + e^{2t}(2t - 1) + \Delta(t).$$

Для отыскания изображения $F(p)$ находим оригиналы всех функций-слагаемых, используя прил. 2:

$$t \doteqdot \frac{1}{p^2},\ t^3 \doteqdot \frac{3!}{p^4},\ te^{2t} \doteqdot \frac{1}{(p-2)^2},\ e^{2t} \doteqdot \frac{1}{p-2},\ \delta(t) \doteqdot 1.$$

На основании свойства линейности получаем

$$F(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{6}{p^4} + \frac{2}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} + 1\,.$$ ◂

2. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{при } 0 \le t < \pi, \\ 2(2\pi - t) & \text{при } \pi \le t < 2\pi, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

▸ С помощью единичной функции Хевисайда представим функцию $f(t)$ в следующем виде:

$$f(t) = (\sigma_0(t) - \sigma_0(t-\pi)) \cdot 2t + (\sigma_0(t-\pi) - \sigma_0(t-2\pi)) \times$$

$$\times 2(2\pi - t) = 2\sigma_0(t)t - 2\sigma_0(t-\pi)t + 2\sigma_0(t-\pi)(2\pi - t) -$$

$$-2\sigma_0(t-2\pi)(2\pi - t) = 2\sigma_0(t)t - 4\sigma_0(t-\pi)(t-\pi) +$$

$$+ 2\sigma_0(t-2\pi)(t-2\pi)\,.$$

Так как $\sigma_0(t) \doteqdot \dfrac{1}{p}$ и $\sigma_0(t)t \doteqdot \dfrac{1}{p^2}$, то на основании теоремы запаздывания имеем:

$$\sigma_0(t-\pi)(t-\pi) \doteqdot e^{-\pi p}\frac{1}{p^2},\ \sigma_0(t-2\pi)(t-2\pi) \doteqdot e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2}.$$

Следовательно,

$$f(t) \doteqdot 2\frac{1}{p^2} - 4e^{-\pi p}\frac{1}{p^2} + 2e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2}(1 - 2e^{-\pi p} + e^{-2\pi p}) =$$

$$= \frac{2}{p^2}(1 - e^{-\pi p})^2\,.$$ ◂

3. Найти оригинал функции $f(t)$ по заданному изображению

$$F(p) = \frac{5p^2+5p-58}{(p-4)(p^2+2p-3)}.$$

▸ Разложим знаменатель дроби на линейные множители и представим данную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{5p^2+5p-58}{(p-4)(p^2+2p-3)} = \frac{5p^2+5p-58}{(p-4)(p-1)(p+3)} =$$

$$= \frac{A}{p-4} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+3}.$$

Приведя сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю, приравняем числители дробей:

$$5p^2+5p-58 = A(p-1)(p+3) + B(p-4)(p+3) + C(p-4)(p-1).$$

Подставив в левую и правую части последнего соотношения корни знаменателя, получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B, C:

$$\begin{array}{r|l} p=4 & 42 = 21A, \quad A = 2, \\ p=1 & -48 = -12B, \quad B = 4, \\ p=-3 & -28 = -28C, \quad C = 1. \end{array}$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{2}{p-4} + \frac{4}{p-1} + \frac{1}{p+3}.$$

Воспользовавшись прил. 2, найдем оригинал:

$$f(t) = 2e^{4t} + 4e^{t} + e^{-3t}. ◂$$

ИДЗ-16.2

1. Решить операторным методом линейное дифференциальное уравнение

$$\alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = f(t),\ x(t_0) = A,\ \dot{x}(t_0) = B.$$

Функцию $f(t)$ и значения коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, t_0, x(t_0), \dot{x}(t_0)$ взять из табл. 16.4.

Таблица 16.4

Номер варианта	α	β	γ	$f(t)$	t_0	$x(t_0)$	$\dot{x}(t_0)$
1.1	0	1	1	$\cos t$	0	0,5	-1
1.2	0	1	2	$5\cos t$	0	2	-3
1.3	0	1	-2	$2e^{2t}$	0	1	-2
1.4	0	1	2	$\sin t$	0	0	-4
1.5	1	-2	2	1	0	0	0
1.6	1	-6	9	2	0	1	2
1.7	1	0	-9	$2-t$	0	0	1
1.8	1	0	1	0	π	1	0
1.9	1	1	0	$-2t$	2	2	-2
1.10	1	1	-6	6	0	-1	5
1.11	1	0	9	$18e^{3t}$	0	0	0
1.12	1	0	1	$-2\sin t$	$\pi/2$	0	1
1.13	1	0	-4	$4t$	0	1	0
1.14	1	6	5	$12e^{t}$	0	0	0
1.15	1	6	13	$4e^{-3t}$	0	0	0
1.16	1	0	1	$e^{-t}+2$	0	0	0
1.17	1	2	1	$2e^{1-t}$	1	1	-1
1.18	1	1	0	$2t$	1	1	-1
1.19	1	-1	0	$-2t$	2	8	6
1.20	1	-6	5	$3e^{2t}$	0	0	0
1.21	1	4	4	$9e^{t}$	0	0	0
1.22	1	2	1	$1+\cos 2t$	0	0	0
1.23	1	-2	1	$1-\sin t$	0	0	0
1.24	1	-1	0	te^{t}	0	0	-1
1.25	1	-1	0	t^2	0	0	-1
1.26	2	8	-10	t^2e^{t}	0	1	1
1.27	2	0	8	$2\cos^2 t$	0	-1	2
1.28	1	-2	1	$1-e^{t}$	0	1	2
1.29	3	6	-9	$2e^{t}-e^{-3t}$	0	3	-1
1.30	1	-4	5	$e^{2t}\cos t$	$\pi/2$	-1	1

2. Решить операторным методом систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1\dot{x}+b_1\dot{y}+c_1x+d_1y &= f_1(t), \quad x(0)=A, \\ a_2\dot{x}+b_2\dot{y}+c_2x+d_2y &= f_2(t), \quad y(0)=B. \end{aligned}\right\}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и значения a_k, b_k, c_k, d_k, $(k=1,2)$, A, B, $x(0)$, $y(0)$ взять из табл. 16.5.

Таблица 16.5

Номер варианта	a_1	b_1	c_1	d_1	$f_1(t)$	a_2	b_2	c_2	d_2	$f_2(t)$	$x(0)$	$y(0)$
2.1	1	0	0	1	0	0	1	−2	−2	0	1	1
2.2	0	1	−1	−2	$\cos t$	1	0	2	1	$\sin t$	0	0
2.3	1	0	−2	−4	$\cos t$	0	1	1	2	$\sin t$	0	0
2.4	1	0	7	−1	0	0	1	2	5	0	1	1
2.5	1	1	0	−1	e^t	2	1	0	2	0	0	0
2.6	1	0	−1	1	$(3/2)t^2$	0	1	4	2	$4t+1$	0	0
2.7	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	−1
2.8	1	0	1	1	e^t	0	1	−1	1	e^t	1	1
2.9	1	2	2	0	$\cos t$	1	1	−1	0	0	0	0
2.10	1	1	0	−1	0	2	1	0	2	$\cos t$	0	0
2.11	3	·1	2	0	1	1	4	0	3	0	0	0
2.12	11	0	2	2	$10e^{2t}$	0	1	−2	1	$7e^{2t}$	1	3
2.13	1	0	1	−3	0	0	1	−1	−1	e^t	1	1
2.14	1	0	1	−3	0	0	1	−1	−1	e^t	0	0
2.15	1	0	−1	−1	e^t	0	1	−3	1	0	0	0
2.16	1	0	−1	−1	e^t	0	1	−3	1	0	1	1
2.17	1	0	5	2	0	0	1	−1	7	0	1	1
2.18	1 •	2	2	0	0	1	1	−1	0	e^t	0	0
2.19	1	0	1	−3	0	0	1	−1	−1	e^{-t}	1	1
2.20	1	0	−1	−2	t	0	1	−2	−1	t	4	2
2.21	1	0	2	4	$4t+1$	0	1	1	−1	$(3/2)t^2$	0	0
2.22	1	0	−1	−1	e^{-t}	0	1	1	−3	0	0	1
2.23	1	0	−2	−2	0	0	1	1	0	0	1	1
2.24	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	−1	1
2.25	4	1	3	0	0	1	3	0	2	1	0	0
2.26	1	5	−1	0	$\sin t$	2	1	−1	0	e^t	0	−1
2.27	2	4	−2	−1	e^t	0	−2	1	0	$\cos t$	1	0
2.28	3	3	−3	0	$2t^2$	3	0	2	1	$\sin t$	0	−2
2.29	4	2	−4	−2	$t-1$	0	−1	0	2	$1-t$	2	0
2.30	5	1	−5	3	$\cos 2t$	4	0	−2	0	e^{2t}	0	3

Решение типового варианта

1. Решить операторным методом дифференциальное уравнение $\ddot{x} - \dot{x} = t^2$ при заданных начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

▶ Из прил. 1, 2 находим изображения по Лапласу:

$\dot{x}(t) \doteqdot pX(p)$, $\ddot{x}(t) \doteqdot p^2X(p) - 1$, где $X(p) \doteqdot x(t)$; $t^2 \doteqdot 2/p^3$.

Получаем операторное уравнение $(p^2 - p)X(p) = 1 + 2/p^3$. Решаем его относительно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{p^3+2}{p^4(p-1)}.$$

Раскладываем полученную рациональную дробь в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{p^3+2}{p^4(p-1)} = \frac{A_1}{p^4} + \frac{A_2}{p^3} + \frac{A_3}{p^2} + \frac{A_4}{p} + \frac{B}{p-1}.$$

Приведем сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю, приравняем числители дробей:

$$p^3 + 2 = A_1(p-1) + A_2p(p-1) + A_3p^2(p-1) +$$

$$+ A_4p^3(p-1) + Bp^4.$$

Подставив в левую и правую части последнего соотношения корни знаменателя $p_1 = 0, p_2 = 1$ и приравняв в обеих частях коэффициенты при степенях p^4, p^3, p^2, получим систему линейных уравнений. Решив ее, найдем значения искомых коэффициентов:

$p = 0$	$2 = -A_1,$	$A_1 = -2,$
$p = 1$	$3 = B,$	$B = 3,$
p^4	$0 = A_4 + B,$	$A_4 = -3,$
p^3	$1 = A_3 - A_4,$	$A_3 = -2,$
p^2	$0 = A_2 - A_3,$	$A_2 = A_3 = -2.$

Подставив вычисленные коэффициенты в выражение для $X(p)$, получим

$$X(p) = -\frac{2}{p^4} - \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} + \frac{3}{p-1}.$$

Используя прил. 1 и 2, находим оригинал

$$x(t) = 3e^t - 3 - 2t - t^2 - t^3/3.$$

Это и есть искомое решение дифференциального уравнения. ◀

2. Решить операторным методом систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4\dot{x} + \dot{y} + 3x &= 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} + 2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

при заданных начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

▶ По прил. 1 находим изображения по Лапласу:

$$\dot{x}(t) \doteqdot pX(p)\,,\ \dot{y}(t) \doteqdot p\,Y(p)\,,$$

где $X(p) \doteqdot x(t)$; $Y(p) \doteqdot y(t)$; $1 \doteqdot 1/p$. Получаем систему операторных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (4p+3)X + p\,Y &= 0, \\ pX + (3p+2)\,Y &= 1/p. \end{aligned}\right\}$$

Решив ее относительно X и Y, имеем:

$$X(p) = \frac{-1}{11p^2 + 17p + 6}\,,\ Y(p) = \frac{4p+3}{p(11p^2 + 17p + 6)}\,.$$

Разложим знаменатели дробей на простые множители и представим рациональные дроби в выражениях для $X(p)$, $Y(p)$ в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$X(p) = \frac{1}{11(p + 6/11)(p+1)} = \frac{A_1}{p + 6/11} + \frac{B_1}{p+1}\,,$$

$$Y(p) = \frac{1}{11p(p + 6/11)(p+1)} = \frac{A_2}{p + 6/11} + \frac{B_2}{p+1} + \frac{C_2}{p}\,.$$

Вычислим неопределенные коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p + 6/11}\right), \\ Y(p) &= \frac{1}{6p} + \frac{1}{5(p+1)} - \frac{11}{6(p + 6/11)}. \end{aligned}\right\}$$

Использовав прил. 1 и 2, найдем оригиналы:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right), \\ y(t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{11}{6}e^{-\frac{6}{11}t}. \end{aligned}\right\}$$

Это и есть искомое решение системы. ◂

3. Найти общее решение уравнения

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12t^2 e^{3t} - e^{2t}.$$

▸ Перейдем к изображениям:

$$x' \doteqdot pX - x(0),\ x'' \doteqdot p^2 X - px(0) - x'(0),$$

$$x''' \doteqdot p^3 X - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0),$$

$$12t^2 e^{3t} - e^{2t} \doteqdot \frac{24}{(p-3)^3} - \frac{1}{p-2}.$$

Запишем операторное уравнение:

$$p^3 X - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) - 6p^2 X + 6px(0) + 6x'(0) +$$

$$+ 11pX - 11x(0) - 6X = \frac{24}{(p-3)^3} - \frac{1}{p-2}$$

или после простых преобразований

$$X(p^3 - 6p^2 + 11p - 6) = p^2 x(0) + px'(0) + x''(0) - 6px(0) -$$

$$- 6x'(0) + 11x(0) + \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^3(p-2)}.$$

Отсюда, воспользовавшись разложением $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = (p-1)(p-2)(p-3)$, получаем

$$X(p) = \frac{p^2 x(0) + px'(0) + x''(0) - 6px(0) - 6x'(0) + 11x(0)}{(p-1)(p-2)(p-3)} +$$

$$+ \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)}.$$

Полагаем $X(p) = X_1(p) + X_2(p)$, где

$$X_1(p) = \frac{p^2x(0) + px'(0) + x''(0) - 6px(0) - 6x'(0) + 11x(0)}{(p-1)(p-2)(p-3)},$$

$$X_2(p) = \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)}.$$

Разложим $X_1(p)$ и $X_2(p)$ на элементарные дроби. Имеем:

$$X_1(p) = \frac{M}{p-1} + \frac{N}{p-2} + \frac{K}{p-3},$$

$$X_2(p) = \frac{A}{(p-3)^4} + \frac{B}{(p-3)^3} + \frac{C}{(p-3)^2} + \frac{D}{p-3} + \frac{E}{(p-2)^2} + \frac{F}{p-2} + \frac{G}{p-1},$$

$$-p^3 + 9p^2 - 3p - 21 \equiv A(p-2)^2(p-1) + B(p-3)(p-2)^2(p-1) + C(p-3)^2(p-2)^2(p-1) + D(p-3)^3(p-2)^2(p-1) + E(p-3)^4(p-1) + F(p-3)^4(p-2)(p-1) + G(p-3)^4(p-2)^2.$$

Из этого тождества находим: $A = 12$, $B = -18$, $C = 21$, $D = -23$, $E = 1$, $F = 24$, $G = -1$. Тогда

$$\frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)} = \frac{12}{(p-3)^4} - \frac{18}{(p-3)^3} + \frac{21}{(p-3)^2} - \frac{23}{p-3} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{24}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно,

$$X(p) = \frac{M}{p-1} + \frac{N}{p-2} + \frac{K}{p-3} + \frac{12}{(p-3)^4} - \frac{18}{(p-3)^3} + \frac{21}{(p-3)^2} - \frac{23}{p-3} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{24}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

Введя обозначения $C_1 = M - 1$, $C_2 = N + 24$, $C_3 = K - 23$, получим

$$X(p) = \frac{C_1}{p-1} + \frac{C_2}{p-2} + \frac{C_3}{p-3} + \frac{12}{(p-3)^4} - \frac{18}{(p-3)^3} +$$

$$+ \frac{21}{(p-3)^2} + \frac{1}{(p-2)^2}.$$

Переходим от изображения $X(p)$ к оригиналу $x(t)$ по формулам:

$$\frac{1}{p-1} \doteqdot e^t,\ \frac{1}{p-2} \doteqdot e^{2t},\ \frac{1}{p-3} \doteqdot e^{3t},$$

$$\frac{1}{(p-2)^2} \doteqdot te^{2t},\ \frac{12}{(p-3)^4} \doteqdot \frac{12t^3}{3!}e^{3t} = 2t^3e^{3t},$$

$$\frac{-18}{(p-3)^3} \doteqdot -\frac{18t^2}{2!}e^{3t} = -9t^2e^{3t},\ \frac{21}{(p-3)^2} \doteqdot \frac{21t}{1!}e^{3t} = 21te^{3t}.$$

Общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} + te^{2t} + (2t^3 - 9t^2 + 21t)e^{3t}. ◀$$

4. Найти частное решение системы

$$\left.\begin{aligned} x'' + x' + y'' - y &= e^t, \\ x' + 2x - y' + y &= e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

▶ Переходим к изображениям:

$$x(t) \doteqdot X(p),\ x'(t) \doteqdot pX(p),\ x''(t) \doteqdot p^2X(p) - 1,\ e^t \doteqdot \frac{1}{p-1},$$

$$y(t) \doteqdot Y(p),\ y'(t) \doteqdot pY(p),\ y''(t) \doteqdot p^2Y(p),\ e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}.$$

Запишем систему операторных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y &= \frac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y &= \frac{1}{p+1} \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} p(p+1)X+(p^2-1)Y &= \frac{1}{p-1}, \\ (p+2)X-(p-1)Y &= \frac{1}{p+1}. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, получим:

$$X(p) = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2}, \quad Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Разложим на простейшие дроби выражение для $X(p)$:

$$\frac{2p-1}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{p+1},$$

$$2p-1 = A(p+1)^2 + B(p-1) + C(p^2-1),$$

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{2},\ C = -\frac{1}{4};$$

$$\left.\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{8}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{p^2-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2}, \\ Y(p) &= \frac{3p}{2(p^2-1)^2}. \end{aligned}\right\}$$

Переходим к оригиналам:

$$\frac{1}{p+1} \doteqdot e^{-t},\quad \frac{1}{p^2-1} \doteqdot \operatorname{sh} t.$$

По теореме о дифференцировании изображений находим:

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)' \doteqdot -te^{-t} \text{ и } \left(\frac{1}{p^2-1}\right)' \doteqdot -t\operatorname{sh} t$$

или

$$\frac{1}{(p+1)^2} \doteqdot te^{-t} \text{ и } \frac{2p}{(p^2-1)^2} \doteqdot t\operatorname{sh} t.$$

Частное решение системы будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}\operatorname{sh} t + \frac{3}{4}te^{-t}, \\ y(t) &= \frac{3}{4}t\operatorname{sh} t. \end{aligned}\right\} \blacktriangleleft$$