Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра строительной механики

И.А. Куприянов, Н.А. Масленников

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

часть 1

**Учебное пособие и методические указания
к выполнению контрольных работ**

для студентов направления 08.03.01 Строительство

Санкт-Петербург

2021

УДК 531.2:624.04
ББК 22.31

Рецензент: канд. тех. наук, доцент Корихин Н.В. (СПбПУ)

Сопротивление материалов, часть 1. Учебное пособие и методические указания к выполнению контрольных работ/ Сост. И.А. Куприянов, Н.А. Масленников. – СПбГАСУ, – СПб.: ИД «Петрополис», 2021. – 208 с.

В учебном пособии представлен теоретический курс и методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине «Техническая механика» (первая часть курса сопротивления материалов) для студентов строительных специальностей, обучающихся по программам бакалавриата. В курсе излагаются основные понятия дисциплины; даются необходимые сведения о геометрических характеристиках сечений; рассматриваются простые виды деформаций стержня: растяжение и сжатие, кручение, плоский изгиб. Для каждого вида деформации получаются основные расчетные формулы для напряжений, формулируются условия прочности и жесткости. Излагается теория напряженного состояния и основы теорий прочности. Теоретическая часть дополняется примерами практических расчетов по всем темам курса. Пособие направлено на получение студентами необходимых знаний и умений в области расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Предназначено для студентов дневной и вечерней формы обучения по направлению 08.03.01 – Строительство.

Табл. 16. Рис. 156. Библиогр.: 5 назв.

Рекомендовано в качестве учебного пособия учебно-методической комиссией Строительного факультета СПбГАСУ.
Протокол № 1 от 22.10.2020 г.

© И.А. Куприянов, 2021
© Н.А. Масленников, 2021
© ИД «Петрополис», 2021

Тема 1. Основные положения

1.1. Предмет сопротивления материалов

Сопротивление материалов – это наука о прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций с учетом механических свойств применяемых материалов.

Считается, что родоначальником этой науки является Галилео Галилей, который в первой половине 17-го века довольно успешно пытался установить зависимость между нагрузками и требуемыми размерами поперечных сечений элементов конструкций.

Цель науки – создание расчетных методов, позволяющих выбрать или проверить существующие размеры элементов конструкций так, чтобы эти конструкции были достаточно прочными, жёсткими, устойчивыми и экономичными.

Прочность – это способность элемента воспринимать нагрузку, не разрушаясь.

Достаточная жёсткость – это способность элемента под действием нагрузки получать деформации в пределах допустимых величин.

Устойчивость – это способность элемента под действием нагрузки сохранять первоначальную форму равновесия.

В курсе теоретической механики принималось допущение, что все тела являются абсолютно твёрдыми, то есть недеформируемыми. На самом деле таких тел в природе нет. Все конструкции выполняются из определённых материалов, подверженных деформационным изменениям.

Деформацией называется изменение формы или размеров твёрдого тела под действием внешних сил**.** Деформации элементов – это следствие молекулярного строения вещества: действующие силы вызывают изменение расстояния между молекулами.

Деформации можно классифицировать как по направлению (линейные и угловые, рис. 1.1), так и по характеру (упругие и пластические).

Упругой называется деформация, которая исчезает после удаления нагрузки.

Остаточной или пластической называется деформация, которая частично или полностью остаётся после удаления нагрузки.

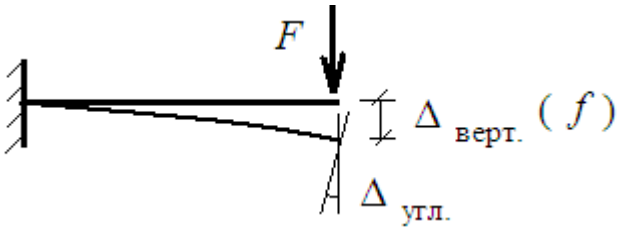


Рис. 1.1.

Упругостью называется свойство тел восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Абсолютно упругих тел не существует. Но некоторые материалы (сталь, чугун, дерево и др.) до определенной величины нагрузки получают весьма малые деформации, и их можно вполне считать упругими.

Пластичностью называется свойство тел получать значительные остаточные деформации, не разрушаясь.

1.2. Классификация нагрузок (внешних сил)

1. **По области действия** на элемент конструкции нагрузки подразделяются на **объёмные и поверхностные**.

Объёмные силы (собственный вес, силы инерции) измеряются в Н/м^3, кН/м^3, МН/м^3.

Поверхностные нагрузки приложены к участку поверхности тела или к участку длины стержня (нагрузка на балку, опорные реакции, снеговая нагрузка, давление ветра и т.д.). Поверхностные силы могут быть **сосредоточенными или распределёнными**.

Сосредоточенная нагрузка предполагается приложенной в одной точке. Таких сил нет в природе. Это понятие вводится для упрощения расчётов, если нагрузка распределена на малом участке поверхности (длины). Сосредоточенной может быть сила (Н, кН, МН) или пара сил (Н·м, кН·м, МН·м).

Распределённая нагрузка приложена непрерывно на некоторой площади или длине элемента (снеговая нагрузка, засыпка в междуэтажных перекрытиях и т.д.).

Если нагрузка распределена равномерно по всей площади (или длине) элемента – она называется **равномерно-распределённой нагрузкой.**

Равномерно-распределённая нагрузка характеризуется **интенсивностью *q*** (Н/м, кН/м, МН/м – для линейных схем и Н/м^2, кН/м^2, МН/м^2 для равномерно-распределённой нагрузки на плоскости).

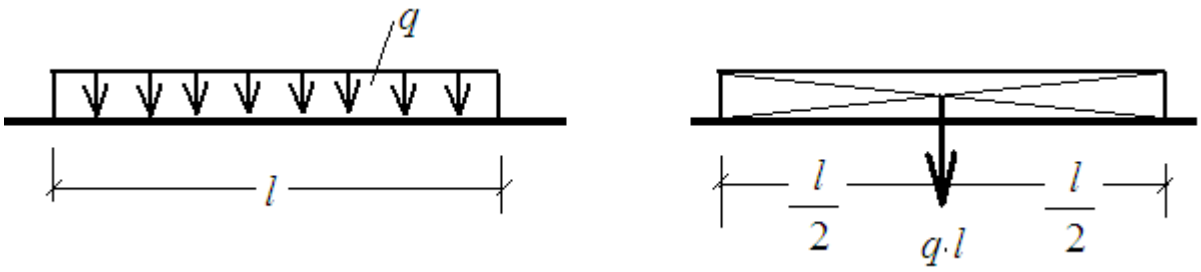


Рис. 1.2.

При статических расчётах равномерно-распределённая нагрузка мысленно заменяется равнодействующей − сосредоточенной силой, приложенной в середине участка её действия и равной произведению интенсивности на длину участка: $R = ql$, рис. 1.2.

2. **По времени действия** нагрузки подразделяются на **постоянные и временные**.

Постоянные нагрузки действуют на элемент конструкции постоянно, в течение всего времени его эксплуатации (собственный вес).

Временные нагрузки действуют в течение некоторого ограниченного промежутка времени (вес людей, оборудования, снеговая, ветровая нагрузки и т.д.).

3. **По характеру действия** нагрузки подразделяются на **статические и динамические.**

Статические нагрузки прикладываются достаточно медленно, возрастая постепенно от нуля до конечной величины, и далее остаются постоянными по величине, направлению и положению (снеговая нагрузка, кладка стены и т.д.).

Динамическая нагрузка может изменяться во времени по величине, направлению и положению. Такая нагрузка прикладывается к элементу с большой скоростью и обладает запасом кинетической энергии. При действии динамической нагрузки необходимо учитывать силы инерции масс конструкции. Динамические нагрузки подразделяются на **ударные** (действие копрового молота на забиваемую сваю), **внезапно приложенные** (нагрузка на мост от входящего на него поезда), **периодически изменяющиеся** (вибрационные), сейсмические и др.

1.3. Основные гипотезы и принципы

Гипотезы (допущения) используются в сопротивлении материалов для упрощения инженерных расчётов.

Гипотезы о свойствах материалов:

1. Материал считается **однородным**. Это значит, что физико-механические свойства во всех его точках одинаковы и не зависят от размера тела.

2. Материал предполагается **сплошным**, то есть весь объём тела считается заполненным этим материалом, без пустот. Это позволяет рассматривать характеристики материала, а также деформации и внутренние силы как непрерывные функции координат.

3. Материал считается **идеально упругим**: элемент способен восстанавливать свою первоначальную форму после устранения причин, вызвавших её изменение.

4. Материал является **изотропным,** то есть его механические свойства по всем направлениям одинаковы. Некоторые материалы имеют разные свойства в разных направлениях. Например, древесина по-разному сопротивляется нагрузкам вдоль и поперёк волокон. Такие материалы называются **анизотропными.**

Гипотезы о деформациях:

1. Деформации упругих тел малы по сравнению с размерами тела. (1/400 – 1/500l). Это позволяет не учитывать изменение положения нагрузок после деформации тела (расчет по недеформированному состоянию).

2. При малости деформаций можно предположить, что они прямо пропорциональны приложенным нагрузкам. Данная гипотеза носит название закона Гука.

3. При соблюдении предыдущих утверждений можно применять в расчётах так называемый **принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)**:

Эффект совместного действия на тело группы сил равен сумме эффектов от действия каждой силы в отдельности.

Например, при расчёте перемещений от действия нескольких сил вычисляются перемещения отдельно от каждой силы, а затем результаты складываются (рис. 1.3).

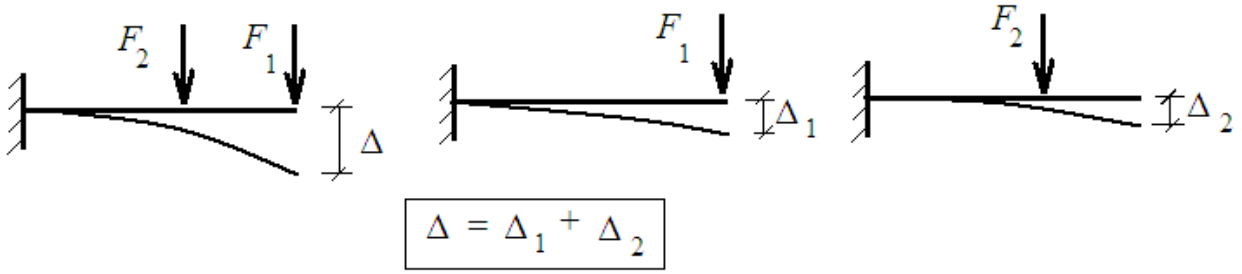


Рис. 1.3.

1.4. Геометрическая форма элементов

1. В сопротивлении материалов изучаются, в основном, **стержни** – тела, имеющие два размера значительно меньше третьего. Для простоты расчётов стержень идеализируется – изображается в виде собственной оси. В технике стержень называют его по-разному: **брусом**, **балкой**, **стойкой, колонной**, **валом двигателя** и т.д. Стержень может быть прямолинейным или криволинейным. Балка, свободно лежащая на опорах, называется **простой балкой,** защемлённая одним концом в опору – **консолью** (рис. 1.4).

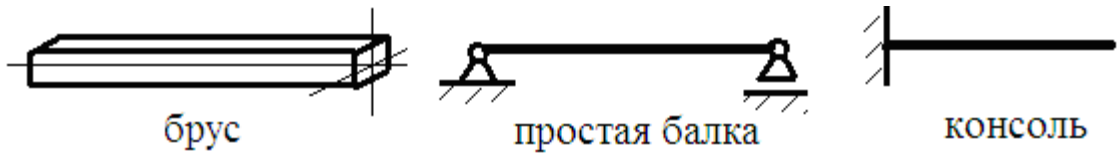


Рис. 1.4.

Основные характеристики стержня – продольная ось и поперечное сечение. Продольная ось – это линия, проходящая через центры тяжести поперечных сечений стержня. Поперечное сечение – плоская фигура, образуемая при пересечении стержня плоскостью перпендикулярной его оси. Таким образом, стержень можно образовать перемещением плоской фигуры (сечения) вдоль некоторой линии (оси). При этом центр тяжести сечения находится на оси стержня, а плоскость сечения перпендикулярна его оси в точке их пересечения.

2. **Пластины и оболочки** имеют один размер значительно меньше двух других (рис. 1.5).



Рис. 1.5.

3. **Массив** – это тело, у которого все три измерения – величины одного порядка. Например, фундамент здания (рис. 1.6).

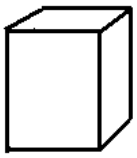


Рис. 1.6.

Пластины, оболочки и массивы рассматриваются в теории упругости, которая является разделом механики деформированного твердого тела.

1.5. Расчётная схема

В сопротивлении материалов рассчитываются не сами тела, конструкции или сооружения, а их расчётные схемы.

Расчётная схема – это идеализированное, упрощённое изображение реальной конструкции (или ее элемента), которое, отображает наиболее важные её свойства под действием нагрузки.

Правильный выбор расчётной схемы − важнейший этап при выполнении расчётов, так как от неё зависит точность и достоверность расчётов, а также степень их сложности.

Расчетная схема включает в себя модель идеального материала, элементы с идеализированной геометрией и средства их соединения (связи расчетных схем), а также схематизированные нагрузки.

Реальные конструкции (или сооружения) очень часто можно представить плоскими. Тогда расчётная схема считается **плоской** и рассчитывается в плоскости. Но иногда это сделать невозможно. Тогда расчётная схема становится **пространственной**.

Задача (расчётная схема) считается **статически определимой,** если опорные реакции и внутренние силы могут быть определены только с помощью уравнений равновесия.

Если неизвестных сил больше, чем уравнений равновесия, то есть расчётная схема имеет «лишние» связи, то она называется **статически неопределимой.**

Количество лишних связей называется **степенью статической неопределимости.** Для решения таких задач составляются дополнительные уравнения в перемещениях, учитывающие упругие свойства материала.

1.6. Определение внутренних сил. Метод сечений

Внутренние силы – это силы, действующие внутри тела или системы тел. Они представляют собой силы взаимодействия между

частицами твердого тела, возникающие от действия внешней нагрузки. При нормальной работе конструкции (сооружения) внутренние силы должны находиться в равновесии с нагрузкой. Когда это равновесие нарушается, происходит разрушение конструкции (сооружения). Поэтому именно внутренние силы являются причиной потери прочности или устойчивости конструкции.

Для определения внутренних сил пользуются **методом сечений**. Его сущность заключается в следующем:

Р − разрезаем (мысленно) тело на две части,

О − отбрасываем одну из них,

З − заменяем действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силами,

У − уравновешиваем их, то есть составляем уравнения равновесия и определяем внутренние силы по известным внешним силам.

Рассмотрим стержень с приложенной к нему произвольной нагрузкой. Применим метод сечений. В произвольном месте мысленно разрежем его плоскостью перпендикулярно оси, отбросим одну часть, заменим влияние отброшенной части внутренними силами и приведём их к центру тяжести сечения стержня (рис. 1.7).

Мы получим в общем случае (в пространственной системе координат) три составляющие главного вектора N, Q_y, Q_z и три составляющие главного момента M_x, M_y M_z.

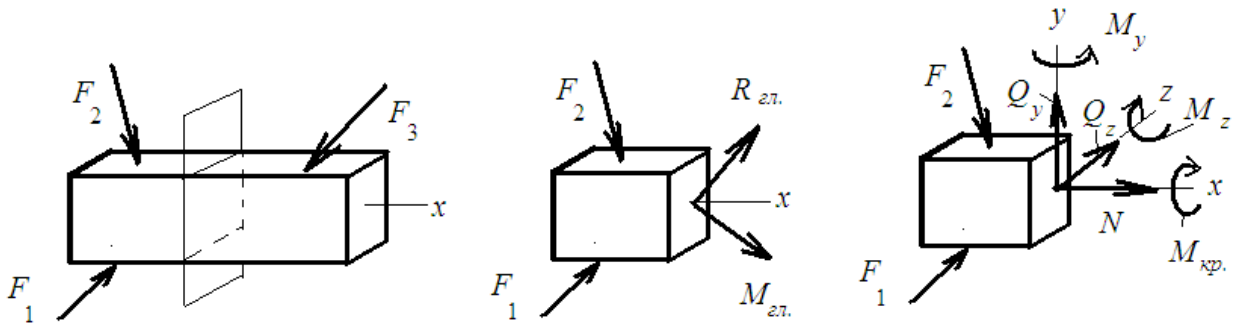


Рис. 1.7.

Все они называются **внутренними силовыми факторами (усилиями).** Каждый из них имеет своё название:

N − продольная сила;

Q_y и Q_z − поперечные силы;

M_z и M_y − изгибающие моменты;

$M_x = M_k$ − крутящий момент.

Продольная сила есть проекция равнодействующей внутренних сил на продольную ось стержня.

Поперечная сила есть проекция равнодействующей внутренних сил на ось (*y* или *z*), лежащую в плоскости поперечного сечения.

Изгибающий момент есть момент равнодействующей внутренних сил относительно центра тяжести рассматриваемого сечения для плоского (линейного) стержня или относительно оси (*y* или *z*) в плоскости сечения для пространственной схемы.

О выборе осей (y или z) в плоскости поперечного сечения будет сказано далее при изучении усилий при изгибе.

Крутящий момент – это момент внутренней пары, действующий в плоскости поперечного сечения стержня.

Для плоской расчётной схемы остаются три вида усилий:

N – продольная сила, Q – поперечная сила, M – изгибающий момент (рис. 1.8).

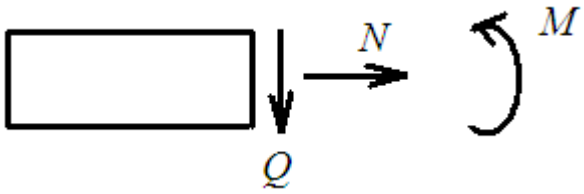


Рис. 1.8.

Все внутренние силовые факторы (усилия) определяются из уравнений равновесия.

Для пространственной системы:

$$\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum Z = 0,\ \sum M_x = 0,\ \sum M_y = 0,\ \sum M_z = 0.$$

Для плоской системы: $\sum X = 0,\ \sum Y = 0,\ \sum M = 0.$

1.7. Основные виды деформаций стержня

Внутренние силы, возникающие в сечениях стержня, полностью определяют характер его деформированного состояния (деформации). В общем случае в сечении могут одновременно действовать все шесть усилий. Но когда возникает только какое-нибудь одно усилие, а остальные равны нулю, тогда будет иметь место одна из следующих простых деформаций:

1. Растяжение и сжатие: в поперечном сечении стержня возникает только **продольная сила** N. В случае растяжения она направлена **от** сечения. В случае сжатия – **к** сечению (рис. 1.9).

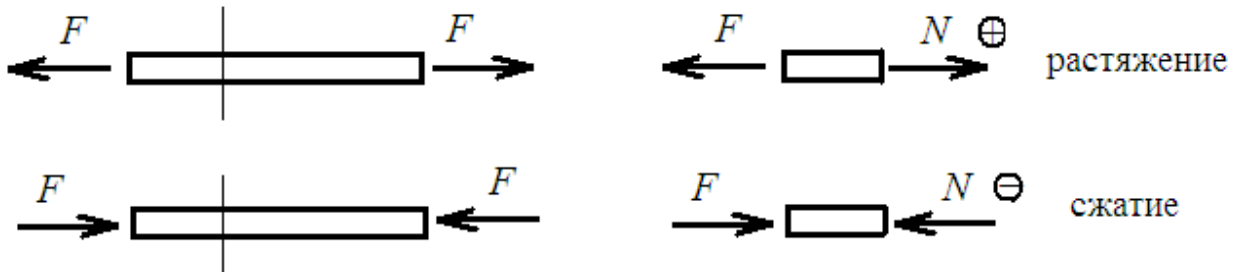


Рис. 1.9.

2. Сдвиг (срез, скалывание): в поперечном сечении стержня возникает только **поперечная сила** Q_y или Q_z (рис. 1.10). На сдвиг (срез) работают болтовые, заклёпочные и сварные соединения, деревянные врубки и другие элементы.

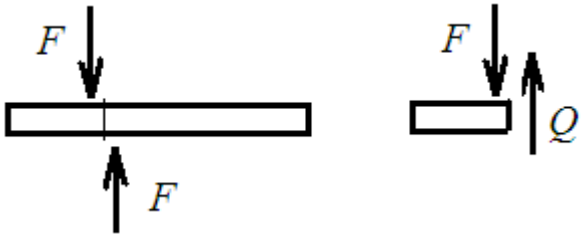


Рис. 1.10.

3. Изгиб: в поперечном сечении стержня возникает **изгибающий момент** M_y или M_z (M). При изгибе часто возникает и **поперечная сила** Q. Тогда изгиб называют поперечным.

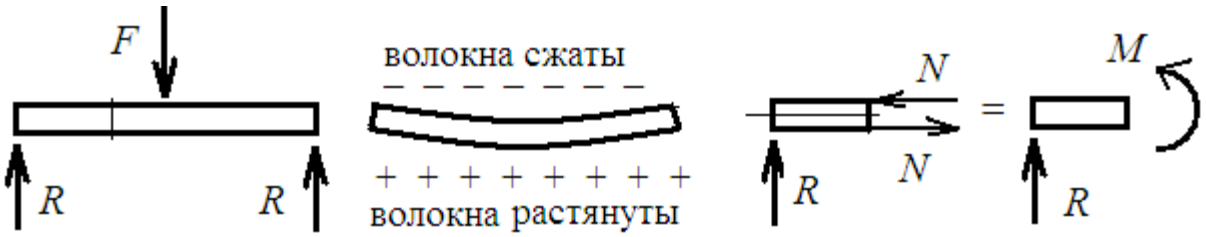


Рис. 1.11.

4. Кручение: в поперечном сечении стержня возникает только **крутящий момент** M_x (M_k) (рис. 1.12). На кручение работают валы машин и механизмов, штанги буров, некоторые балки ребристых железобетонных перекрытий, подкрановые балки и т.д.

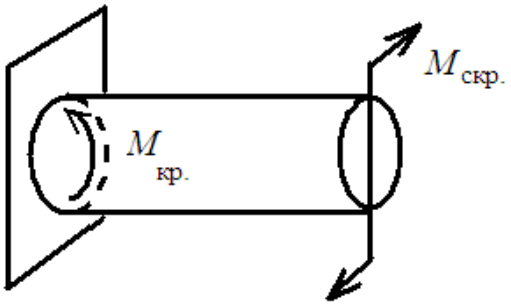


Рис. 1.12.

5. Сложные деформации (сложное сопротивление): в поперечном сечении стержня возникают несколько усилий. Виды сложных деформаций:

Косой изгиб: изгиб в 2-х плоскостях (M_y и M_z);

Изгиб с растяжением (сжатием) ($M_и$ и N) – внецентренное растяжение (сжатие);

Кручение с растяжением ($M_{кр}$ и N);

Изгиб с кручением ($M_и$ и $M_{кр}$).

6. Особо рассматривается так называемый **продольный изгиб**. Это деформация длинного тонкого стержня под действием сжимающей силы, направленной по оси стержня, при отклонении от вертикальной формы равновесия (рис. 1.13). В этом случае может произойти потеря устойчивости стержня. Он может выпучиться – изогнуться. На продольный изгиб рассчитывают сжатые стержни ферм, стойки, колонны и т.д.

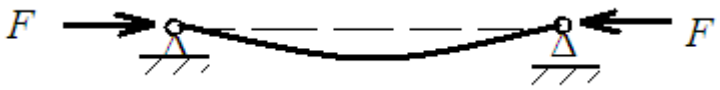


Рис. 1.13.

1.8. Понятие о напряжениях

В любом сечении стержня на каждую элементарную площадку величиной ΔA действует элементарная сила величиной ΔF (рис. 1.14). Отношение ΔF к ΔA выражает внутреннюю силу, отнесённую к единице площади сечения, и называется средним напряжением на этой площадке:

$$p_{ср} = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \qquad (1.1)$$

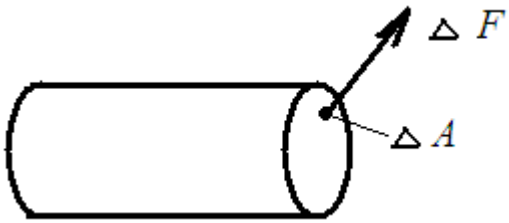


Рис. 1.14.

Если взять предел этого отношения при уменьшении площадки до нуля, то получим напряжение в данной точке, т.е.

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \qquad (1.2)$$

Для случая равномерного распределения внутренних сил по сечению напряжение можно определить путём деления равнодействующей внутренних сил на всю площадь сечения, т.е.

$$p = \frac{F}{A} \qquad (1.3)$$

Таким образом, **напряжением в точке сечения называется величина внутренней силы, приходящейся на единицу площади сечения**.

Единицами измерения напряжения служат: **Н/м^2**, **кН/м^2**, **МН/м^2**;

1 Н/м^2 = 1 Па (Паскаль),

1 МН/м^2 = 1 Н/мм^2 = 1 МПа (Мега Паскаль),

1 МПа = 0,1 кН /см^2 (1000 кН / 10000 см^2).

Напряжение, как и сила, есть вектор. Следовательно, оно имеет величину, точку приложения и направление.

Через любую точку тела можно провести бесчисленное множество сечений, и напряжения в них могут быть различны. Поэтому, говоря о напряжении в данной точке, надо всегда указывать площадку (сечение), по которой оно действует.

В общем случае напряжение может действовать под любым углом к рассматриваемой площадке. И если разложить его по нормали (перпендикуляру) к площадке и по направлению плоскости сечения, то получим **нормальное напряжение**, которое действует перпендикулярно к сечению и **касательное напряжение**, действующее в плоскости сечения (рис. 1.15).

p − полное напряжение;

σ (сигма) − нормальное напряжение:

$$\sigma = p\sin\alpha; \qquad (1.4)$$

τ (тау) − касательное напряжение:

$$\tau = p\cos\alpha. \qquad (1.5)$$

Здесь α − угол между направлением полного напряжения и его проекцией на плоскость сечения.

Модуль полного напряжения:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \qquad (1.6)$$

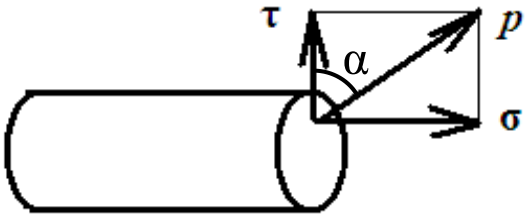


Рис. 1.15.

Нормальное напряжение при растяжении препятствует отделению частиц тела друг от друга, при сжатии – их сближению;

касательное напряжение препятствует сдвигу частиц относительно друг друга.

При решении задач об определении напряжений в деформируемых твердых телах часто используется полезный принцип Сен-Венана.

Принцип Сен-Венана.

На участках, удаленных от зоны приложения местной нагрузки, напряжения не зависят от способа приложения этой нагрузки.

Другая формулировка этого принципа:

Местная система взаимно уравновешенных сил не вызывает изменения напряжений на достаточном удалении от зоны приложения этих сил.

Принцип Сен-Венана позволяет решать задачи о простых видах деформации стержня на всей его протяженности за исключением тех малых участков, где приложена местная нагрузка.

Принцип Сен-Венана применим не во всех случаях. В частности, он не всегда справедлив для тонкостенных стержней.

Тема 2. Растяжение и сжатие

2.1. Усилия и напряжения

Этот вид деформации вызван наличием **продольной силы.** Рассмотрим пример: к стержню приложены сосредоточенные силы, направленные вдоль его оси (рис. 2.1). Определим продольную силу в сечении 1-1, для чего применим метод сечений (РОЗУ). Продольную ось обозначим *x*.

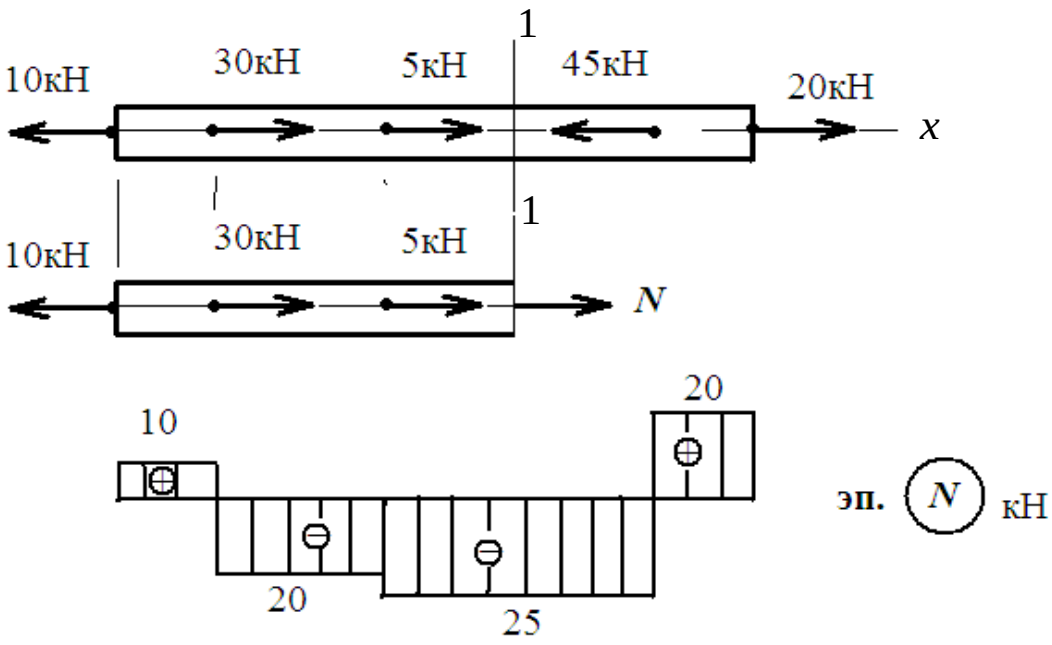


Рис. 2.1.

Составим уравнение равновесия отсеченной левой части:

$\sum X = 0$. $N + 5 + 30 - 10 = 0$. Отсюда $N = -25$ кН, то есть $N = \sum F_i$. Аналогично определяются продольные силы в других сечениях между точками приложения нагрузок.

Продольная сила в сечении равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, рассматриваемых по одну сторону от сечения, на продольную ось стержня.

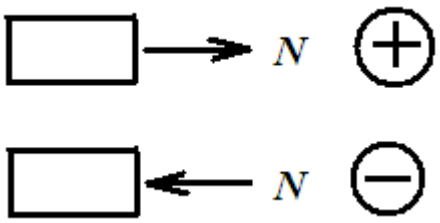


Рис. 2.2.

Продольная сила **положительна**, если направлена **от** сечения и **отрицательна**, если направлена **к** сечению (рис. 2.2).

Поскольку при сосредоточенных нагрузках продольная сила на участке не зависит от текущей координаты x, контур эпюры продольных сил в этом случае – всегда прямые, параллельные оси эпюры (рис. 2.1).

Яков Бернулли в 18-м веке предположил, что при растяжении (сжатии) плоские и нормальные (перпендикулярные) к оси поперечные сечения стержня до деформации остаются плоскими и нормальными к оси после деформации. На основании его гипотезы в 19-м веке **Сен-Венан** сделал вывод о том, что нормальные напряжения распределяются по поперечному сечению стержня равномерно (за исключением сечений вблизи приложения нагрузки). Следовательно,

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (2.1)$$

Это формула для напряжений при осевом растяжении – сжатии. Поскольку в пределах участка стержня $N = const$, то на этом участке и $\sigma = const$. Тогда эпюра нормальных напряжений для приведённого выше примера будет выглядеть так же, как эпюра N (при постоянной площади поперечного сечения A).

2.2. Деформации при растяжении и сжатии

Очевидно, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечное сечение сужается; при сжатии – наоборот.

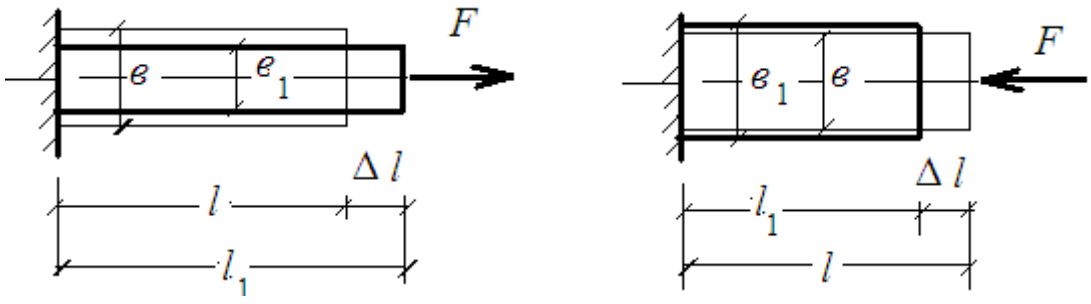


Рис. 2.3.

Увеличение (уменьшение) длины стержня Δl называется **абсолютным удлинением** (укорочением) или **абсолютной продольной деформацией** (рис. 2.3).

$\Delta l = l_1 - l$, при растяжении эта величина положительна, при сжатии отрицательна.

Относительным удлинением (укорочением) или **относительной продольной деформацией** называется отношение величины абсолютного удлинения к первоначальной длине:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad (2.2)$$

Её обычно выражают в процентах: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%$.

Величина $\Delta b = b - b_1$ (при растяжении) или $\Delta b = b_1 - b$ (при сжатии) называется **абсолютной поперечной деформацией.**

Величина $\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta b}{b} \cdot 100\%$ называется **относительной поперечной деформацией**.

В 17-м веке Роберт Гук сделал предположение о том, что деформация стержня прямо пропорциональна приложенной к стержню силе: «Какова сила – такова деформация». Предположение Гука подтвердилось экспериментально для большинства материалов при нагрузках, не достигающих некоторого предела.

В современном звучании этот **закон Гука** для напряжений и относительных деформаций звучит так: **Нормальные напряжения прямо пропорциональны относительным деформациям**:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (2.3)$$

Коэффициент пропорциональности E в формуле закона Гука называется модулем продольной упругости (модулем Юнга). Модуль упругости – физическая постоянная материала. Она определяется для каждого материала опытным путём и оценивает степень сопротивляемости материала упругой деформации.

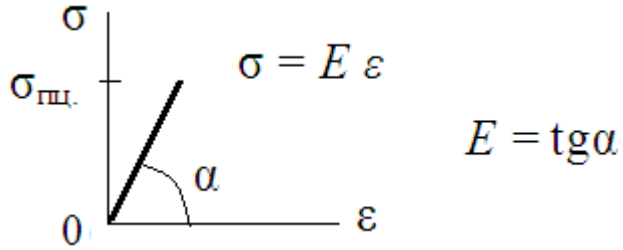


Рис. 2.4.

Графически закон Гука выражается линейным участком диаграммы в осях σ и ε (рис. 2.4). При этом модуль упругости численно равен тангенсу угла наклона этого отрезка к оси ε.

Линейная зависимость между напряжениями и относительными деформациями сохраняется до определенного уровня напряжений, называемого пределом пропорциональности ($\sigma_{\text{пц}}$). Предел пропорциональности также является характеристикой материала.

Если подставить в формулу закона Гука (2.3) $\sigma = \frac{N}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, получим **формулу для деформации** (при растяжении – сжатии):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}, \qquad (2.4)$$

где EA называется **жёсткостью сечения** (при растяжении – сжатии) или продольной жесткостью; A – площадь поперечного сечения, его **геометрическая характеристика**.

Частное от деления относительной поперечной деформации на относительную продольную деформацию, взятое по абсолютной величине, называется **коэффициентом Пуассона** (физическая постоянная материала, характеризующая его упругие свойства):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \right|. \qquad (2.5)$$

Величины коэффициента Пуассона для некоторых материалов: пробка: $\mu = 0$; сталь: $\mu = 0,2 - 0,3$; резина: $\mu = 0,47$; парафин $\mu = 0,5$.

2.3. Механические характеристики материалов

Чтобы определить свойства материалов, производят механические испытания образцов материалов в лабораториях, на специальных машинах.

Обычно для испытаний на растяжение используют длинные тонкие образцы, для сжатия – короткие (чтобы избежать продольного изгиба) цилиндры для металлов или кубики (для дерева).

Для определения свойств материалов лучше всего испытывать образцы на растяжение и сжатие, как наиболее «чистые» деформации (без примеси других).

Все материалы по их механическим свойствам можно разделить на две группы: пластичные и хрупкие.

Пластичные материалы разрушаются только после значительной остаточной деформации (малоуглеродистая сталь, медь, бронза и др.).

Хрупкие материалы разрушаются при весьма малых деформациях (чугун, камень, кирпич и др.)

Однако хрупкость и пластичность не являются неизменными свойствами материала. Всё зависит **от условий**, в которых он находится. Например, при низких температурах пластичная сталь становится хрупкой. Камень при одноосном сжатии хрупок, а некоторых случаях сложного сопротивления может получать значительные пластические деформации.

2.3.1. Испытание на растяжение (сжатие)

Образец устанавливается в захваты машины, медленно нагружается и доводится до разрушения. Современные машины имеют записывающие устройства (самописцы), вычерчивающие диаграмму зависимости абсолютного удлинения Δl образца от нагрузки F. Затем диаграмму пересчитывают на относительные величины σ и ε. Поскольку напряжения вычисляются делением нагрузки на первоначальную площадь сечения, а в ходе деформации эта площадь уменьшается, то такие напряжения называют условными напряжениями. Диаграмма $\sigma - \varepsilon$ соответственно называется диаграммой **условных напряжений** (рис. 2.5).

На участке **ОА** диаграммы растяжения наблюдается прямая линия – здесь действует закон Гука (какова сила – таково удлинение). Напряжение, соответствующее точке А, называется. **пределом пропорциональности** $\sigma_{\text{пц}}$. Это наибольшее напряжение, при котором еще соблюдается закон Гука.

Участок **ВС** –горизонтальная прямая: деформации растут даже без увеличения нагрузки. Материал «течёт». Этот участок называется **площадкой текучести.** Напряжение, при котором начинается рост деформаций при постоянном напряжении (точка **В**), называется **пределом текучести** $\sigma_{\text{т}}$.

На участке **СД** деформации растут с увеличением нагрузки, но не следуют закону Гука. Этот участок называют зоной упрочнения материала. В точке **Д** на образце появляется «шейка», которая быстро утончается, и происходит разрыв образца в т. **Е** (рис. 2.7).

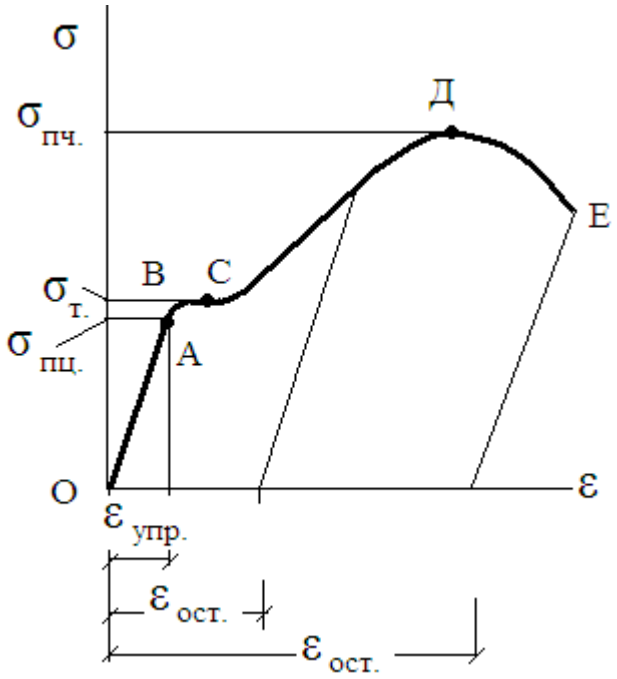


Рис. 2.5.

Точка Д соответствует наибольшему значению нагрузки и называется **пределом прочности** $\sigma_{пч}$. Иногда его называют временным сопротивлением $\sigma_{в}$. Это наибольшее напряжение, вычисленное по первоначальной площади поперечного сечения образца.

Немного выше точки А находится **предел упругости материала** $\sigma_{у}$. При изменении напряжений от $\sigma_{пц}$ до $\sigma_{у}$ происходит очень малое приращение деформации (0,001 – 0,005%), которым можно пренебречь. Поэтому практически считается, что

$\sigma_{у} = \sigma_{пц}$.

Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется наибольшее напряжение, до которого деформации изменяются прямо пропорционально напряжениям.

Пределом текучести $\sigma_{т}$ называется напряжение, при котором деформации растут без увеличения нагрузки.

Пределом прочности $\sigma_{пч}$ (временным сопротивлением) называется напряжение, вызванное наибольшей нагрузкой на образец и отнесённое к первоначальному поперечному сечению образца.

До достижения предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ образец приобретает только упругие деформации, которые исчезают после снятия нагрузки.

После достижения предела пропорциональности в образце возникают и упругие и пластические деформации.

Предел пропорциональности, предел текучести и предел прочности относятся к **характеристикам прочности материала**.

На рис. 2.6 приведены сравнительные диаграммы растяжения и сжатия пластичного (малоуглеродистая сталь) и хрупкого (чугун) материалов.

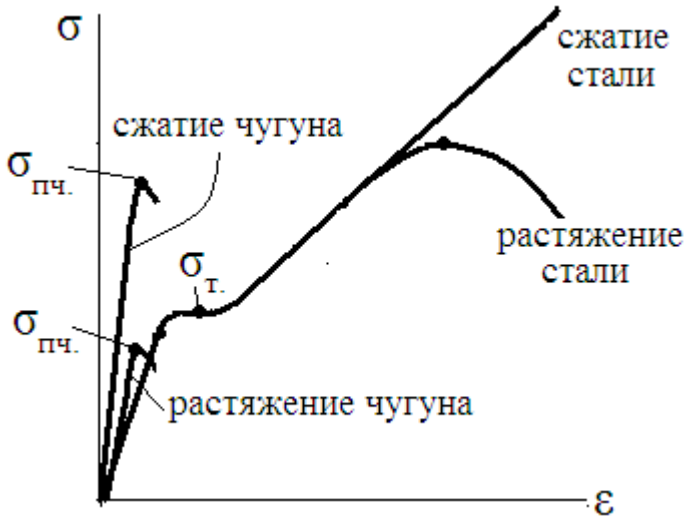


Рис. 2.6.

Поскольку у пластичных материалов при растяжении и сжатии пределы пропорциональности и пределы текучести практически совпадают, можно сказать, что **пластичный материал одинаково работает на растяжение и сжатие.**

При растяжении и сжатии хрупких материалов разрушение происходит внезапно, почти без деформаций. Предел прочности при растяжении намного меньше предела прочности на сжатие. Поэтому принято говорить: **хрупкий материал плохо работает на растяжение, но хорошо работает на сжатие.**

Диаграмма **сжатия** образца из **пластичного материала** вначале повторяет диаграмму растяжения, но не имеет предела прочности. Напряжения продолжают расти, а образец сплющивается без разрушения (рис. 2.7).

Разрушение при сжатии образца из хрупкого материала происходит внезапно и носит «хрупкий» характер − разлом происходит под углом (рис. 2.7). Диаграмма **сжатия хрупкого материала** напоминает диаграмму на растяжение, но предел прочности при этом значительно выше (рис. 2.6).

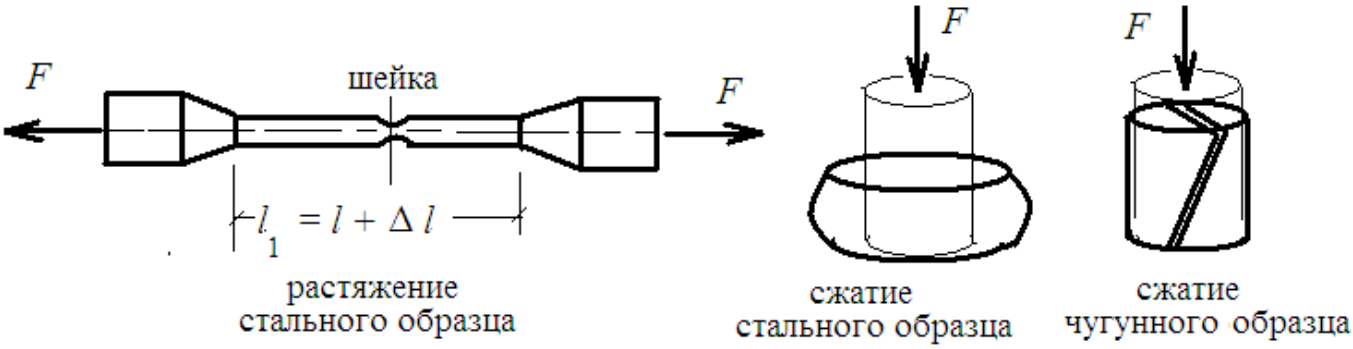


Рис. 2.7.

Такие материалы как **дюралюминий, медь, бронза, высокоуглеродистые и легированные стали** дают при растяжении диаграмму без ясно выраженной площадки текучести. Для таких материалов вводится понятие **условного предела текучести.** Он обозначается $\sigma_{0,2}$. Это напряжение, соответствующее относительной остаточной деформации, равной 0,2% (рис. 2.8).

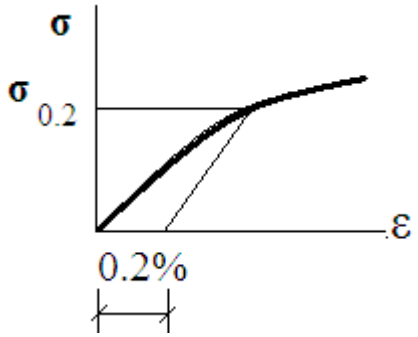


Рис. 2.8.

Некоторые легированные стали, подвергнутые закалке, имеют пределы текучести при растяжении и сжатии разные. Они называются **хрупко-пластичными**.

Для оценки **степени пластичности материала** используются следующие величины:

относительное остаточное удлинение образца при разрыве:

$$\delta = \frac{\Delta l_{ост}}{l} \cdot 100\%; \qquad (2.6)$$

относительное остаточное сужение образца:

$$\Psi = \frac{A - A_{ост}}{A} \cdot 100\%. \qquad (2.7)$$

$A_{ост}$ – площадь сечения в области шейки после разрыва образца.

Более пластичным считается материал, у которого эти характеристики больше.

Для обычных сталей $\delta = 8 - 28\%$, $\Psi = 30 - 70\%$.

2.3.2. Понятие о наклёпе, ползучести и релаксации

Если нагрузить образец до напряжений за пределом текучести, а затем снять нагрузку, то получим на диаграмме прямую, почти параллельную ОА. При этом упругая часть удлинения исчезнет, а остаточное удлинение образца останется.

Если после этого образец нагрузить снова, то пределы пропорциональности и текучести повышаются (рис. 2.9). Следовательно, область упругих деформаций увеличивается и материал получает способность воспринимать без остаточных деформаций б**о**льшие нагрузки: **материал стал более упругим и более прочным.**

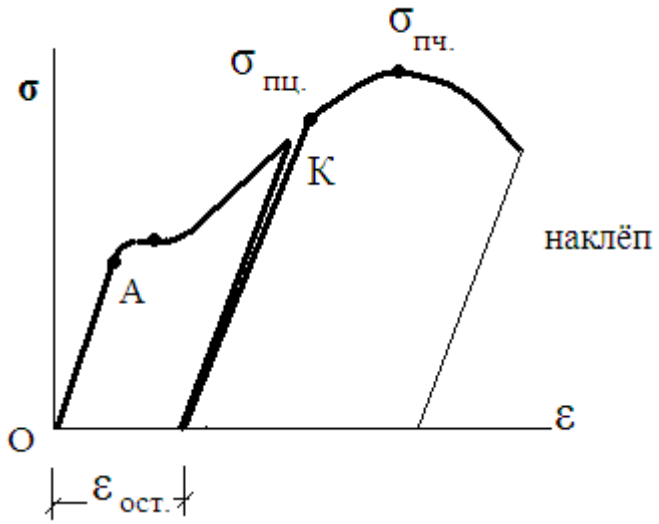


Рис. 2.9.

Одновременно можно заметить, что зона пластических деформаций уменьшилась и площадка текучести стала менее выраженной. Это свидетельствует о снижении пластических свойств материала.

Наклёп – это повышение прочностных свойств материала с одновременным понижением пластичности в результате растяжения выше предела текучести и полной разгрузки.

Можно сказать, что наклёп – это своеобразная закалка стали. Наклёп происходит при разрезании ножницами стальных листов. Их края, получая наклёп, становятся более хрупкими и при загибании в них могут образоваться трещины. Наклёп появлялся в краях заклёпочных соединений при выдавливании отверстий для заклёпок. Поэтому отверстия стали высверливать.

Но наклёп может иметь и положительное практическое применение. Например, чтобы цепи и канаты подъёмников или лифтов не вытягивались в процессе работы, их предварительно вытягивают за предел текучести. Однако применять наклёп можно только тогда,

когда точно известно, что элемент конструкции будет работать только на растяжение. Если же возможна работа элемента на сжатие, то наклёп будет вреден.

Как правило, напряжённое и деформированное состояние элемента определяется нагрузкой. Но иногда (особенно при высокой температуре) деформации и напряжения могут изменяться во времени без изменения нагрузки.

Ползучесть – это увеличение деформаций при постоянной нагрузке с течением времени. Явление ползучести наблюдается, например, в трубопроводах при высокой температуре теплоносителя и в строительных (бетонных и железобетонных) конструкциях.

Релаксация (ослабление) – это снижение напряжений при неизменной деформации с течением времени. Например, со временем уменьшается усилие затяжки в болтовых соединениях трубопроводов.

Ползучесть и релаксация в металлах происходят, как правило, при высоких (свыше 300ºС) температурах. Однако для ряда металлов с низкой температурой плавления, для полимерных материалов, бетона, древесины явление ползучести проявляется уже при комнатной температуре. Релаксация имеет особо важное значение для предварительно напряжённых железобетонных конструкций, так как в этом случае непредвиденное ослабление напряжённого элемента может резко снизить несущую способность конструкции.

2.4. Работа сил при растяжении (сжатии)

Рассмотрим диаграмму, написанную самописцем разрывной машины $F - \Delta l$, где F – величина нагрузки Δl – удлинение стержня от этой нагрузки (рис. 2.10).

Отрезок ОН соответствует длине образца после разрыва и обращения упругих деформаций.

Площадь всей диаграммы ОАВСДН есть полная работа внешних сил на пути ОН. Обозначим её через T. Эту полную работу T разделим на три части:

1). Работа T_1 – это площадь ОАК – **работа упругой деформации**. Она накапливается в образце в виде потенциальной энергии, и после снятия нагрузки полностью возвращается материалом. Поэтому образец приобретает первоначальную форму и размеры, если

его вынуть из захватов машины до достижения предела пропорциональности.

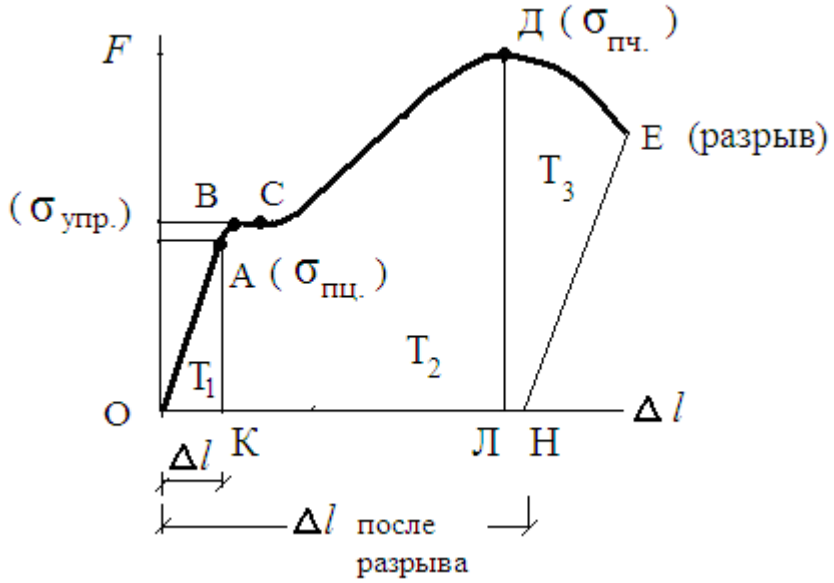


Рис. 2.10.

Величина этой работы: $T_1 = \frac{1}{2} F \Delta l$ (площадь треугольника ОАК);

Учитывая, что $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} F \frac{Fl}{EA} = \frac{F^2 l}{2EA} = U, \qquad (2.8)$$

где U – потенциальная энергия деформации растяжения до достижения предела пропорциональности.

2). Работа T_2 равна площади КАДЛ при изменении напряжений от предела пропорциональности (упругости) до предела прочности. Эта работа затрачивается, главным образом, на образование остаточных деформаций.

3). Работа T_3 – работа, затрачиваемая на разрыв после образования шейки.

Таким образом, полная работа $T = T_1 + T_2 + T_3$ равна площади всей диаграммы ОАВСДН. Чем больше площадь диаграммы, тем больше должна быть затраченная работа, тем более пластичным является материал.

Чтобы лучше судить о величине затраченной работы в пределах упругости, не связывая её ни с длиной образца l, ни с площадью

поперечного сечения A, используется понятие **удельной потенциальной энергии** u. Для вычисления u надо величину работы T_1 разделить на объём образца:

$$u = \frac{T_1}{Al} = \frac{F^2 l}{2EA \cdot Al} = \frac{F^2}{2EA^2} = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (2.9)$$

При разгрузке упругого тела за счёт потенциальной энергии производится работа внутренних сил. Следовательно, пока тело нагружено, оно является аккумулятором потенциальной энергии. Это свойство упругих тел широко используется в технике (работа пружин часов и других механизмов, амортизаторов, рессор и т.д.)

Зная величину работы внешних сил и потенциальной энергии, можно определить перемещения точек стержневой системы.

2.5. Расчёты на прочность и жёсткость при растяжении (сжатии)

Напряжения, возникающие в элементе под действием нагрузки, называются **действительными.**

Напряжения, при достижении которых дальнейшая нормальная эксплуатация элемента становится невозможной ввиду его разрушения или недопустимых деформаций, называются **опасными напряжениями**.

Установлено, что **опасным напряжением** $\sigma_{оп}$ **для пластичных материалов** является **предел текучести** $\sigma_т$. Поэтому действительное напряжение должно быть ниже предела пропорциональности.

Для **хрупкого материала опасным напряжением** является **предел прочности** $\sigma_{пч}$, различный растяжении и сжатии.

Для всех применяемых в строительстве и, вообще, в технике материалов установлены предельно допустимые значения напряжений. Они называются **допускаемыми напряжениями** и обозначаются $[\sigma]$.

Проверка прочности по допускаемым напряжениям появилась в середине 19 века.

Допускаемые напряжения получаются из соответствующих опасных значений напряжений с учётом коэффициентов запаса прочности.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{оп}}}{k}, \qquad (2.10)$$

где k – коэффициент запаса прочности, разный для пластичных и хрупких материалов.

Для пластичных материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{т}}}{k}, \ (k = 1,4 - 2,0). \qquad (2.11)$$

Для хрупких материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{k}, \ (k = 2,5 - 5,0). \qquad (2.12)$$

При этом для хрупких материалов допускаемые напряжения при сжатии и растяжении различны, поскольку существенно различаются соответствующие пределы прочности.

Коэффициент запаса для хрупких материалов принимается более высоким, чем для пластичных, ввиду особой опасности хрупкого (мгновенного) разрушения для конструкций. Разрушению элементов из пластичных материалов предшествуют существенные пластические деформации.

Коэффициент k зависит от многих факторов: условий работы, характера нагрузки, ответственности конструкции, технико-экономических соображений и других.

В общем виде условие прочности по допускаемым напряжениям при осевом растяжении-сжатии состоит в том, что действительные максимальные напряжения не должны превосходить допускаемых:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \le [\sigma]. \qquad (2.13)$$

В настоящее время нормами проектирования строительных конструкций предусмотрен более современный метод расчёта на прочность – **метод расчёта по предельным состояниям.** Положения этого метода вместо единого коэффициента запаса прочности предусматривают введение ряда коэффициентов безопасности: по материалу, по нагрузке, по условиям работы конструкции. Наибольшим напряжением, допускаемым в элементе конструкции является расчётное сопротивление материала R. Расчетное сопротивление определяется через нормативное сопротивление, деленное на коэффициент безопасности по материалу:

$$R = \frac{R_n}{\gamma_m}. \qquad (2.14)$$

Нормативное сопротивление имеет смысл минимального значения прочностных характеристик материала: предела текучести или предела прочности, определенных по результатам испытаний серии образцов.

Значения нормативных и расчетных сопротивлений приведены в нормах проектирования (СП, ранее СНиП).

Для элементов конструкций при растяжении-сжатии **условие прочности** по предельному состоянию имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \le R. \qquad (2.15)$$

Так как хрупкие материалы по-разному работают на растяжение и сжатие, то на прочность растянутые и сжатые волокна рассчитывают отдельно при любом методе расчёта.

Условием жесткости называется ограничение, накладываемое на деформации (перемещения) элементов конструкций из соображений нормальной эксплуатации конструкций. Условие жесткости при растяжении-сжатии имеет вид

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \le [\Delta], \qquad (2.16)$$

где $[\Delta]$ – максимально допускаемое удлинение (укорочение) стержня, устанавливаемое нормами.

Три типа задач при расчётах на прочность:

1. Проверка прочности.

Дано: размеры элемента, нагрузка и расчетное сопротивление R. Требуется проверить прочность.

В этом случае непосредственно проверяется условие прочности:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma] \text{ или } \sigma = \frac{N}{A} \le R. \qquad (2.17)$$

2. Определение допустимой нагрузки (определение несущей способности элемента).

Дано: размеры элемента и расчетное сопротивление R. Надо определить нагрузку ($F = N$).

Из условия прочности (2.15) следует:

$$N \le AR. \qquad (2.18)$$

3. Определение размеров поперечного сечения:

Дано: нагрузка и расчетное сопротивление R. Требуется подобрать сечение элемента.

Из условия прочности определяют необходимую площадь сечения:

$$A \geq \frac{N}{R}. \qquad (2.19)$$

2.6. Понятие о концентрации напряжений

Концентрация напряжений – это резкое повышение напряжений в ослабленном сечении стержня. Она возникает в сечении там, где сечение резко меняется (отверстия, выточки, вырезы, нарезка). Эти напряжения ещё называют **местными.**

Для пластичных материалов концентрация напряжений менее опасна, чем для хрупких. Хрупкий материал разрушается внезапно, без остаточных деформаций. Обязательно учитывается концентрация напряжений при динамических нагрузках.

Местные напряжения определить довольно трудно. Их основным показателем является теоретический коэффициент концентрации напряжений:

$$\lambda_\sigma = \frac{\sigma_{\text{м}}}{\sigma_{\text{ср}}}, \qquad (2.20)$$

где $\sigma_{\text{м}}$ − максимальные напряжения в зоне концентрации, $\sigma_{\text{ср}}$ − средние напряжения в неослабленном сечении (рис. 2.11).

Коэффициенты концентрации напряжений определяются методами теории упругости и приведены в справочниках. Так, для круглого отверстия в растянутой пластинке коэффициент концентрации равен 3; для полукруглых вырезов по краям такой пластинки он равен 2 (рис. 2.11).

Иногда можно избежать концентрации напряжений или снизить ее, делая плавный переход от сечения к сечению (см. рис. 2.12).

Опыты показывают, что в образце из пластического материала при постепенном увеличении нагрузки напряжения в местах концентрации напряжений, достигнув предела текучести, не повышаются, хотя в остальной части сечения – растут. Иными словами, напряжения в ослабленном сечении выравниваются.

Поэтому для пластичных материалов концентрация напряжений менее опасна, чем для хрупких, а при статических нагрузках и вовсе не влияет на прочность.

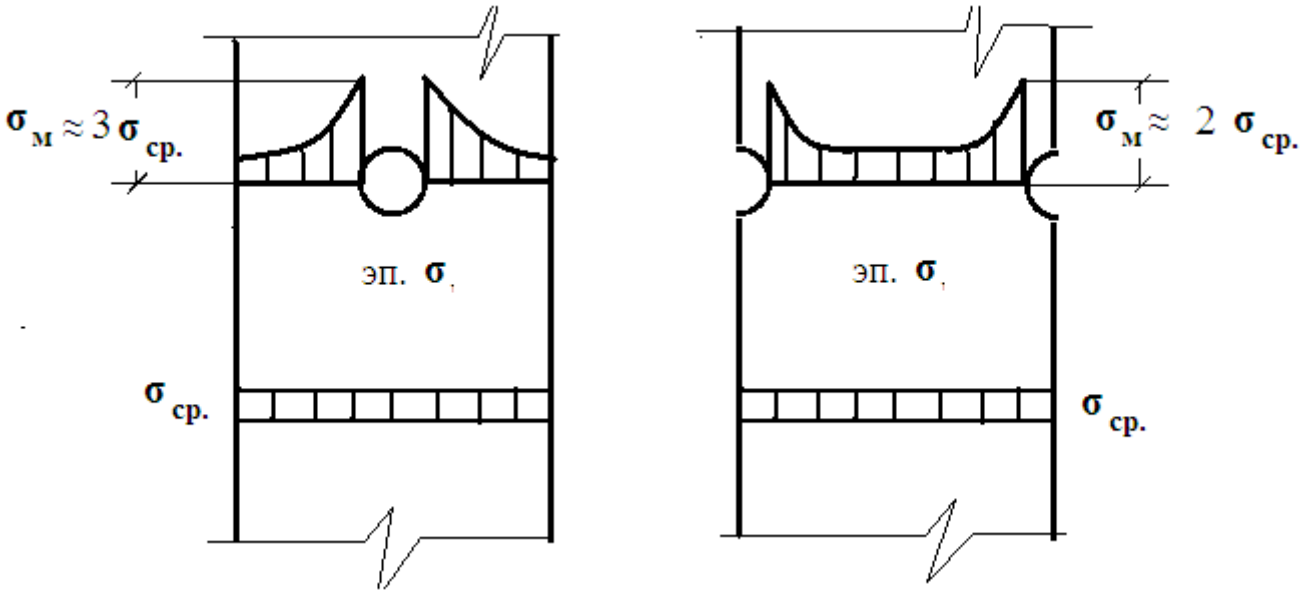


Рис. 2.11.

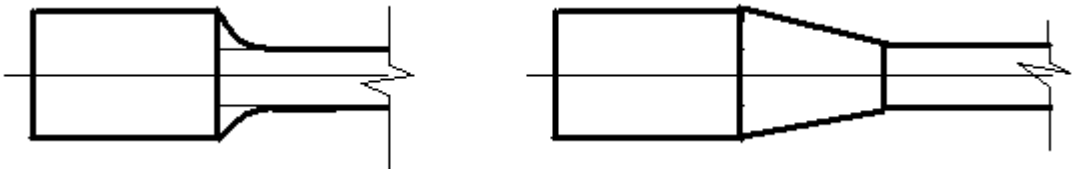


Рис. 2.12.

2.7. Статически неопределимые задачи при растяжении (сжатии)

2.7.1. Статически неопределимые задачи в упругой стадии деформирования

Статически неопределимыми называются задачи, в которых опорные реакции и внутренние силы не могут быть определены только с помощью уравнений статики, так как число неизвестных больше числа этих уравнений.

Поэтому требуется составление дополнительных уравнений, учитывающих упругие свойства материала и деформации элемента. Следовательно, в эти уравнения должны входить геометрические размеры элемента и упругие константы материала, например, модуль упругости.

Напряжения в статически неопределимых системах могут возникать не только от силовой нагрузки, но и от неточного изготовления элементов или от действия температуры и т.д.

Характер таких задач весьма разнообразен. Рассмотрим некоторые примеры их решения.

Пример 2.1. К стальному стержню, защемлённому двумя концами, приложена сила 100 кН (рис. 2.13). *EA = const.* Определить реакции опор.

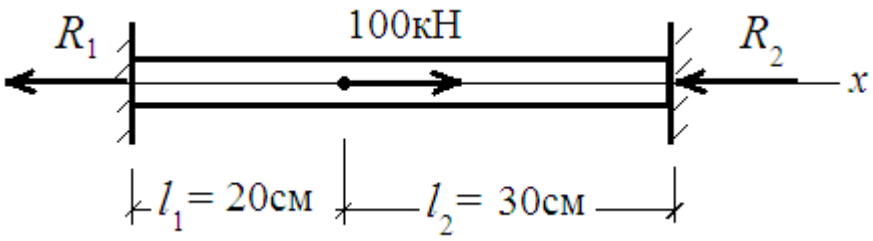


Рис. 2.13.

Очевидно, что сила растягивает левую часть и сжимает правую. Следовательно, реакции будут направлены **влево.**

1. Составим уравнение равновесия:

$\sum X = 0;\ 100 - R_1 - R_2 = 0.$

2. Рассмотрим деформацию стержня: В силу постоянства расстояния между опорами абсолютные величины деформаций левой и правой частей стержня равны между собой: $\Delta l_1 = \Delta l_2$.

Согласно закону Гука $\Delta l_1 = \dfrac{R_1 l_1}{EA},\ \Delta l_2 = \dfrac{R_2 l_2}{EA}.$

После подстановки получим $\dfrac{R_1 l_1}{EA} = \dfrac{R_2 l_2}{EA}$, откуда

$$R_1 = R_2 \frac{l_2}{l_1} = R_2 \cdot \frac{30}{20} = 1{,}5R_2.$$

3. Подставим этот результат в уравнение равновесия:

$R_1 + R_2 = 100;\ 1{,}5R_2 + R_2 = 100$. Находим реакции опор:

$R_2 = 40$ кН, $R_1 = 60$ кН.

Эпюра N будет иметь следующий вид (рис. 2.14):

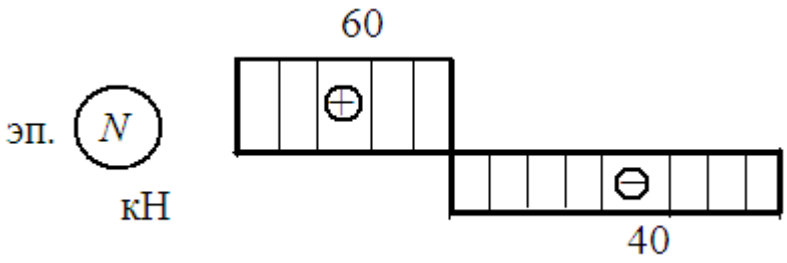


Рис. 2.14.

Пример 2.2. Учет неточности изготовления элементов конструкций.

Жёсткий стержень (рис. 2.15) подвешен на трёх стальных стержнях длиной 3м и площадью поперечного сечения $A = const$. При сборке конструкций оказалось, что стержень C короче проектной длины на $\delta = 1{,}5$ мм. Поэтому он установлен с начальным натяжением. Определить напряжение в стержнях. $E = 2 \cdot 10^5$ МПа (20000 кН/см^2).

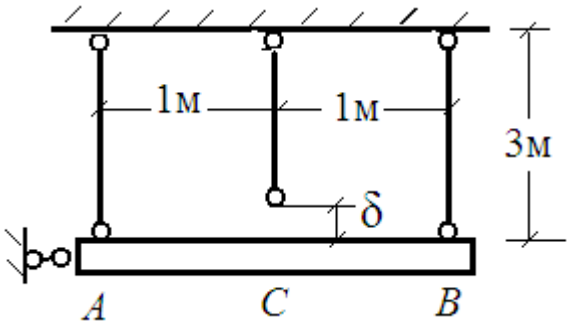


Рис. 2.15.

При сборке конструкции стержень C надо удлинить на Δl_2, при этом стержни A и B укорачиваются на Δl_1. Тогда стержень займёт новое положение (рис. 2.16).

1). Уравнения равновесия (рис. 2.16):

$\sum M_C = 0;\ N_3 \cdot 1 - N_1 \cdot 1 = 0;\ N_1 = N_3 = N$.

$\sum Y = 0;\ N_1 + N_3 - N_2 = 0;\ N_2 = 2N$.

Так как $A = const$, то и $\sigma_2 = 2\sigma_1$.

2). Условие совместности деформаций: $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \delta$.

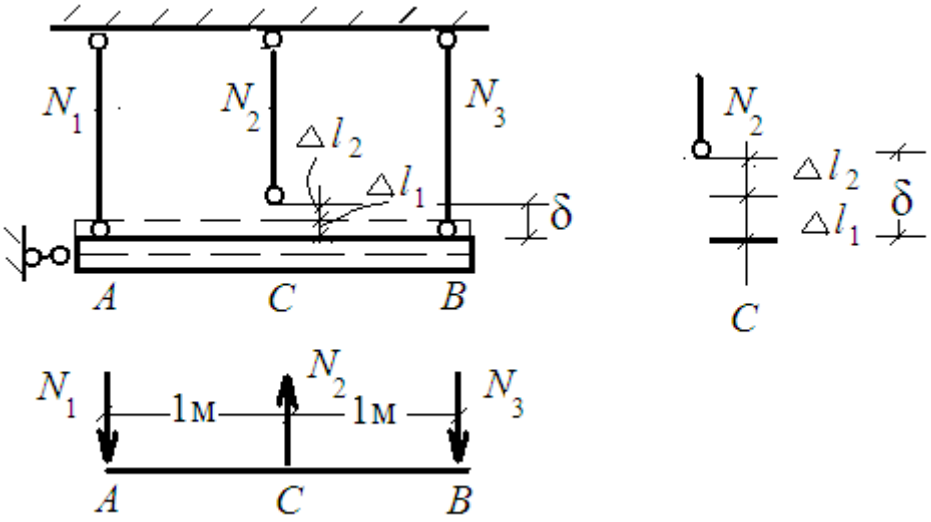


Рис. 2.16.

3) С учетом закона Гука

$$\frac{\sigma_1 l}{E}+\frac{\sigma_2 l}{E}=\delta.\ \sigma_1+\sigma_2=\frac{\delta E}{l};\ \sigma_1+2\sigma_1=\frac{\delta E}{l};\ 3\sigma_1=\frac{\delta E}{l}.$$

Отсюда $\sigma_1=\dfrac{0{,}15\cdot 20000}{300\cdot 3}=3{,}33$ кН/см^2 = 33,3 МПа (сжатие).

$\sigma_2=2\cdot 33{,}3=66{,}7$ МПа (растяжение).

Пример 2.3. Влияние температуры на напряжения и деформации.

а) Стержень, закреплённый жестко с двух концов, находился при температуре t_1 и был нагрет до температуры $t_2>t_1$ (рис. 2.17). От увеличения температуры стержень расширился, его длина возрастает. Поэтому реакции опор будут сжимающими.

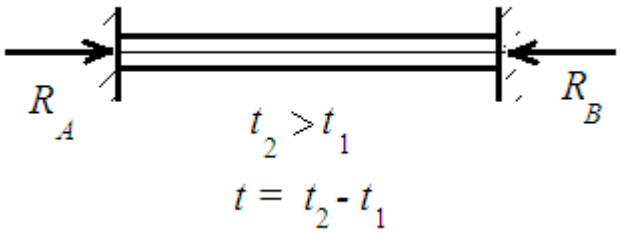


Рис. 2.17.

b) Если в процессе эксплуатации температура понизилась ($t_2<t_1$), то реакции будут растягивающими, так как стержень укорачивается (рис. 2.18).

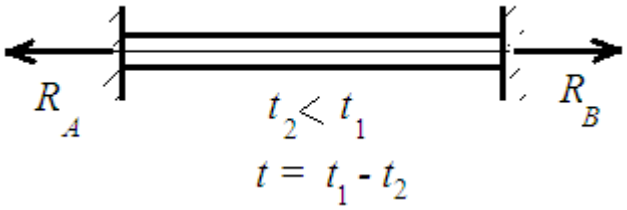


Рис. 2.18.

В результате в стержне возникают **температурные напряжения**.

Рассмотрим случай а. Определим удлинение, вызванное повышением температуры в отсутствии опоры на правом конце стержня (рис. 2.19).

$\Delta l_t = \alpha t l$, где α – коэффициент линейного расширения.

С другой стороны, абсолютная деформация укорочения, вызванная реакцией R_B, определяется по закону Гука:

$$\Delta l_R = \frac{R_B l}{EA}.$$

Поскольку опоры стержня неподвижны, расстояние между ними не меняется, а отсюда $\Delta l_t = \Delta l_R$. Подставив в это равенство выражения для Δl_t и Δl_R, получим

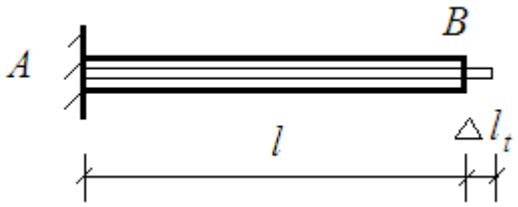


Рис. 2.19.

$\alpha t l = \frac{R_B l}{EA}$. Отсюда $R_B = \alpha l E A$;

температурные напряжения $\sigma_t = \frac{R_B}{A} = E\alpha t$.

Приняв числовые значения величин: $t_1 = 5^\circ$, $t_2 = 40^\circ$, $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ 1/град, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, получим $\sigma_t = 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot (40 - 5) = 84$ МПа.

Как видно из рассмотренных примеров, усилия и напряжения в статически неопределимых системах при расчете на силовую нагрузку зависят от соотношения жесткостей их элементов. При расчете на температурные и монтажные воздействия усилия прямо зависят от значений жесткостей.

2.7.2. Расчет статически неопределимых систем по предельному пластическому состоянию.

Если учесть полностью пластические свойства материала, то его ресурс прочности можно использовать более полно. Это позволяет повысить грузоподъемность конструкции либо добиться экономии материала.

Предельным пластическим состоянием конструкции называют такое состояние, при котором система становится изменяемой за счет развития пластических деформаций, то есть превращается в механизм.

Предельного пластического состояния допускать нельзя. Но в статически неопределимых системах возможно допустить возникновение пластических деформаций в некоторых элементах до тех пор, пока система в целом сохраняет геометрическую неизменяемость.

При расчете конструкций по упругой стадии деформаций (когда все элементы работают упруго и полностью отсутствуют пластические деформации) условие прочности формулируется в напряжениях и составляется для наиболее напряженного стержня системы:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma] \text{ или } \sigma_{\max} \le R. \qquad (2.21)$$

При расчете по предельному пластическому состоянию условие прочности составляется для всей конструкции и записывается через допускаемую (или предельную) нагрузку:

$$F \le F_{\partial} = \frac{F_T}{n}, \qquad (2.22)$$

где F_T – предельная нагрузка, при которой система переходит в предельное пластическое состояние, n – коэффициент запаса прочности конструкции.

Для определения предельной нагрузки рассматривается так называемое предельное равновесие – момент перехода системы в предельное пластическое состояние. При этом в ряде элементов системы напряжения известны: они достигают предела текучести. В этот момент составляются уравнения равновесия, из которых и получается предельная нагрузка.

Расчет по предельному пластическому состоянию применим только к конструкциям из пластичных материалов. Если элементы системы состоят их хрупкого материала, то при достижении предельного состояния (когда напряжения равны пределу прочности)

эти элементы мгновенно выходят из строя, испытывая хрупкое разрушение.

2.8. Стержень, растянутый под действием собственного веса

Рассмотрим стержень постоянного поперечного сечения, расположенный вертикально и закрепленный жестко на верхнем конце (рис. 2.20). Пусть объемный вес материала этого однородного стержня равен γ, а площадь сечения равна A. Тогда вес единицы длины стержня составит $q = \gamma A$. Эта величина представляет собой интенсивность равномерно распределенной нагрузки, приложенной вдоль оси стержня.

Определим методом сечений продольную силу в произвольном сечении с координатой x, рассматривая нижнюю отсеченную часть стержня. Продольная сила равна интенсивности нагрузки, умноженной на длину участка:

$$N(x) = qx = \gamma A x. \qquad (2.23)$$

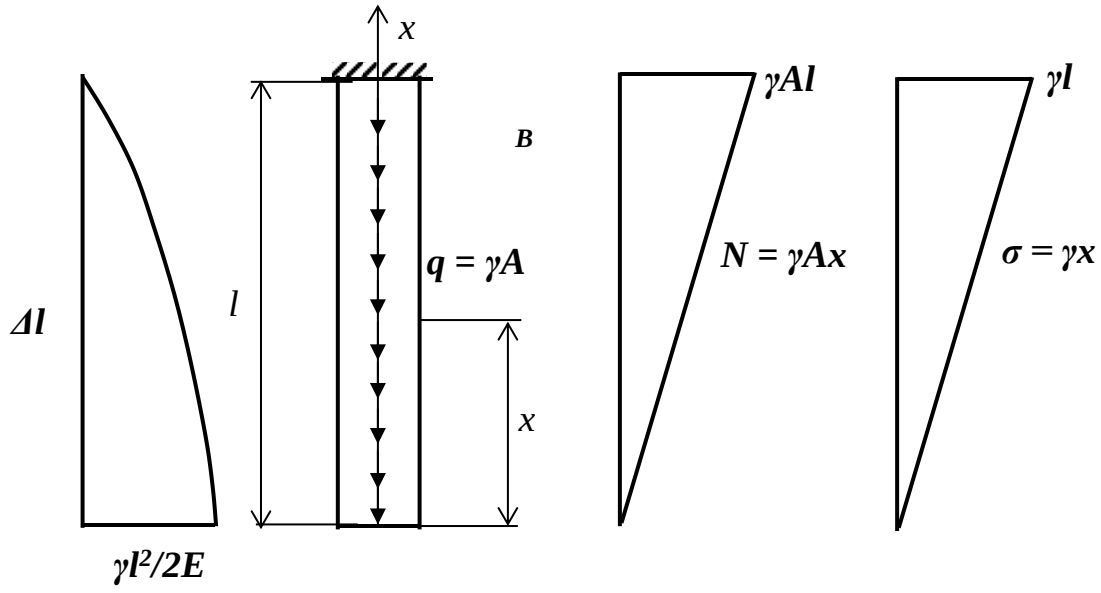


Рис. 2.20.

Напряжения в этом же сечении равны

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \frac{\gamma A x}{A} = \gamma x. \qquad (2.24)$$

Как видно, усилия и напряжения изменяются по линейному закону. При этом напряжения не зависят от площади сечения, а только от объемного веса материала.

Эпюры усилий и напряжений показаны на рисунке 2.20. Их максимальные значения возникают в верхнем закрепленном сечении и равны соответственно $N_{\max} = \gamma Al$ и $\sigma_{\max} = \gamma l$.

Найдем теперь абсолютное удлинение участка стержня от его закрепленного конца до произвольного сечения x. Одновременно эта величина является вертикальным перемещением сечения относительно закрепленного конца. Абсолютная деформация бесконечно малого участка стержня dx согласно закону Гука равна

$$d\Delta l = \frac{N(x)dx}{EA}. \qquad (2.25)$$

Полную деформацию получим, взяв интеграл в пределах от x до l:

$$\Delta l = \int_x^l \frac{N(x)}{EA}dx = \int_x^l \frac{\gamma x}{E}dx = \frac{\gamma}{E}\frac{x^2}{2}\Big|_x^l = \frac{\gamma}{2E}\left(l^2 - x^2\right). \qquad (2.26)$$

При $x = l$ (неподвижное сечение) деформация равна нулю. Максимальное значение удлинения достигается для свободного конца стержня (при $x = 0$) и представляет собой абсолютную деформацию всего стержня:

$$\Delta l_{\max} = \frac{\gamma l^2}{2E}. \qquad (2.27)$$

Эпюра абсолютных удлинений представляет собой участок квадратной параболы, имеющей вершину в точке нижнего сечения стержня.

Тема 3. Геометрические характеристики сечений

3.1. Основные понятия

Рассмотрим произвольное сечение в осях координат *y,* z, с площадью A и познакомимся с геометрическими характеристиками этого сечения (рис. 3.1). Выделим бесконечно малую площадь dA.

1. Площадь поперечного сечения (м^2, см^2, мм^2).

$$A = \int_A dA. \qquad (3.1)$$

2. Статический момент площади фигуры относительно оси (м^3, см^3, мм^3)

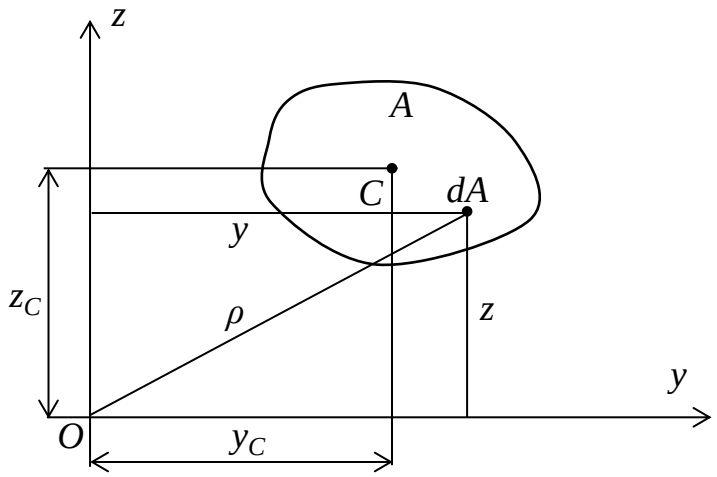


Рис. 3.1.

Статическим моментом площади фигуры относительно оси называется сумма произведений площадей элементарных площадок на их координаты, ортогональные этой оси.

$$S_z = \int_A y dA = A y_C,\ S_y = \int_A z dA = A z_C, \qquad (3.2)$$

где y_C и z_C называются координатами центра тяжести плоской фигуры.

Из этих выражений получаются формулы для определения координат центра тяжести сложного сечения, образованного из нескольких простых фигур:

$$y_C = \frac{S_z}{A},\ z_C = \frac{S_y}{A}. \qquad (3.3)$$

Свойства статического момента:

1). Статический момент может быть положительным или отрицательным. Это зависит от знаков координат элементарных площадок либо координат центров тяжести составляющих сечение фигур (рис. 3.2).

2). Статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен нулю.

3). Если сечение сложное, его можно представить, как ряд простых фигур. Статический момент сечения, состоящего из ряда простых фигур, равен сумме статических моментов каждой фигуры относительно той же оси.

$$S_z = \sum A_i y_i,\ S_y = \sum A_i z_i. \qquad (3.4)$$

Тогда координаты центра тяжести определяются по формулам

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i};\ z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}. \qquad (3.5)$$

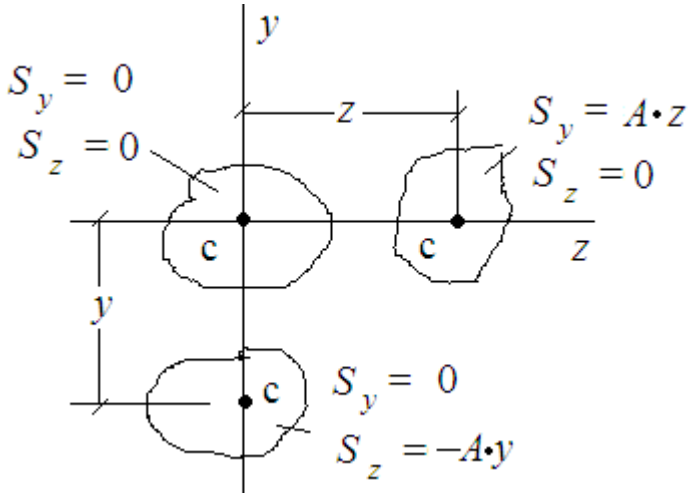


Рис. 3.2.

3. Осевой (экваториальный) момент инерции площади фигуры относительно оси (м^4, см^4, мм^4).

Осевым моментом инерции площади фигуры относительно оси называется сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат их координат относительно этой оси.

$$I_z = \int_A y^2 dA;\ I_y = \int_A z^2 dA. \qquad (3.5)$$

Если сечение сложное, то осевой момент инерции сечения, состоящего из ряда простых фигур, равен сумме осевых моментов инерции каждой фигуры относительно той же оси.

$$I_z = \sum I_{iz};\ I_y = \sum I_{iy}. \qquad (3.6)$$

4. Полярный момент инерции площади фигуры относительно центра (м^4, см^4, мм^4).

Полярным моментом инерции площади фигуры относительно центра называется сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат их расстояния до центра координат.

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \qquad (3.7)$$

Поскольку $\rho^2 = y^2 + z^2$, то $I_p = I_z + I_y$. (3.8)

5. Центробежный момент инерции площади фигуры относительно осей (м^4, см^4, мм^4).

Центробежным моментом инерции площади фигуры относительно осей z и y называется сумма произведений площадей элементарных площадок на их координаты z и y.

$$I_{yz} = \int_A yzdA. \qquad (3.9)$$

Он может быть положительным, отрицательным или равным 0. Если оси z и (или) y являются осями симметрии сечения, то $I_{yz} = 0$.

6. Полярный момент сопротивления (м^3, см^3, мм^3).

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \qquad (3.10)$$

7. Осевой момент сопротивления (м^3, см^3, мм^3), рис. 3.3.

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},\ W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}. \qquad (3.11)$$

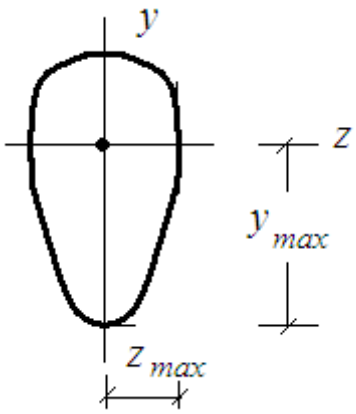


Рис. 3.3.

8. Радиус инерции (м, см, мм).

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}};\ i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \qquad (3.12)$$

3.2. Геометрические характеристики простейших фигур

Рассмотрим, как на основе определений вычисляются моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции некоторых простых геометрических фигур. К этим фигурам зачастую сводятся поперечные сечения стержня.

3.2.1. Прямоугольник

Покажем вычисление осевого момента инерции прямоугольника относительно центральной оси y, параллельной стороне b (рис. 3.4).

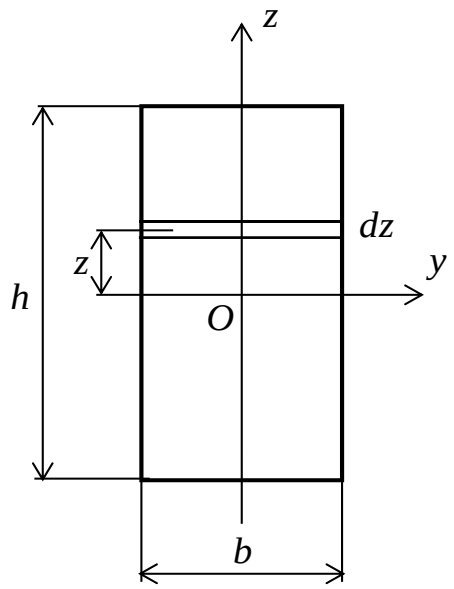


Рис. 3.4.

Выделим элемент площади в виде полоски, параллельной y и имеющей толщину dz, на расстоянии z от оси y. Площадь этой полоски равна

$dA = bdz$, а элементарный момент инерции:

$dI_y = z^2 bdz$.

Момент инерции всей фигуры получим, интегрируя от $z = -h/2$ до $z = h/2$:

$$I_y = b\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = b\frac{z^3}{3}\Bigg|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \frac{bh^3}{12}. \qquad (3.13)$$

Рассуждая аналогично, можно получить формулу для момента инерции прямоугольника относительно оси z, параллельной стороне h:

$$I_z = \frac{hb^3}{12}. \qquad (3.14)$$

Поскольку оси z и y являются осями симметрии сечения, то центробежный момент инерции $I_{yz} = 0$.

Радиусы инерции прямоугольного сечения получаются по формулам

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12 \cdot bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h}{3,464}; \quad (3.15)$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12 \cdot bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{3,464}. \quad (3.16)$$

Моменты сопротивления прямоугольного сечения относительно осей z и y равны

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{I_y}{h/2} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}; \quad (3.17)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{b/2} = \frac{hb^3 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{hb^2}{6}. \quad (3.18)$$

3.2.2. Круг

Для круглого сечения удобнее вначале вычислить полярный момент инерции, пользуясь полярной системой координат (рис. 3.5).

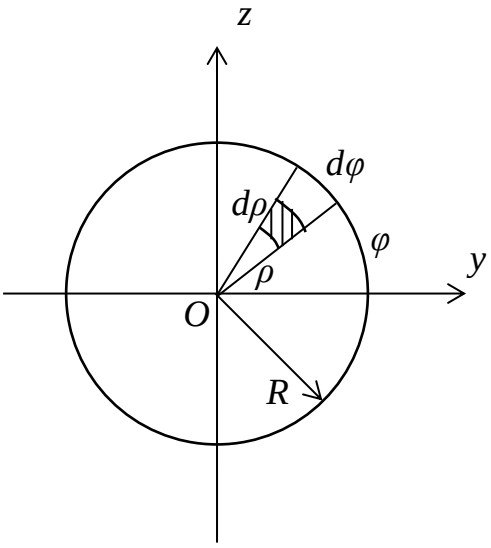


Рис. 3.5.

Выделим бесконечно малый элемент, ограниченный двумя радиусами с углом $d\varphi$ между ними и двумя концентрическими дугами, расстояние между которыми равно $d\rho$. Элемент имеет полярные координаты ρ и φ. Площадь элемента вычисляем как площадь прямоугольника, пренебрегая искажениями формы высшего порядка малости:

$$dA = \rho d\varphi \cdot d\rho$$

Его полярный момент инерции равен

$$dI_p = \rho^2 \cdot \rho d\varphi d\rho = \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Интегрирование ведем по двум независимым переменным ρ и φ в пределах их изменения по всей площади круга:

$$I_p = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{R^4 \cdot 2\pi}{4} = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (3.19)$$

Поскольку осевые моменты инерции круга одинаковы ввиду его симметрии относительно любой центральной оси, каждый из этих осевых моментов инерции равен половине полярного:

$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}\ . \quad (3.20)$$

Учитывая, что диаметр круга $d = 2R$, можно получить формулы для моментов инерции круга через диаметр:

$$I_p = \frac{\pi\left(d/2\right)^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32};\ I_y = I_z = \frac{\pi\left(d/2\right)^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (3.21)$$

Радиус инерции круга:

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4 \cdot \pi R^2}} = \frac{R}{2} = \frac{d}{4}. \quad (3.22)$$

3.2.3. Кольцо

Для сечения в виде кольца, имеющего внешний диаметр D и внутренний диаметр d, моменты инерции получаются как разности моментов инерции внешней и внутренней окружности кольца:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right). \quad (3.23)$$

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^4}{64}\left(1 - \alpha^4\right). \quad (3.24)$$

Здесь α – это отношение $d/D < 1$.

Можно эти формулы выразить и через радиус внешней окружности:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}\left(1 - \alpha^4\right);\ I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}\left(1 - \alpha^4\right). \quad (3.25)$$

Радиус инерции кольцевого сечения:

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{\pi R^4\left(1 - \alpha^4\right)}{4 \cdot \pi R^2\left(1 - \alpha^2\right)}} = \frac{R}{2}\sqrt{1 + \alpha^2}\ . \quad (3.26)$$

Моменты сопротивления круглого и кольцевого сечений получаются делением моментов инерции на радиус круга (внешней окружности), поскольку этот размер является и максимальным полярным, и максимальным осевым расстоянием до контура сечения.

Для круга:

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16};\ \ W_y = W_z = \frac{\pi R^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \qquad (3.27)$$

Для кольца:

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right); \qquad (3.28)$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi R^3}{4}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^3}{32}\left(1-\alpha^4\right). \qquad (3.29)$$

3.3. Моменты инерции при параллельном переносе осей

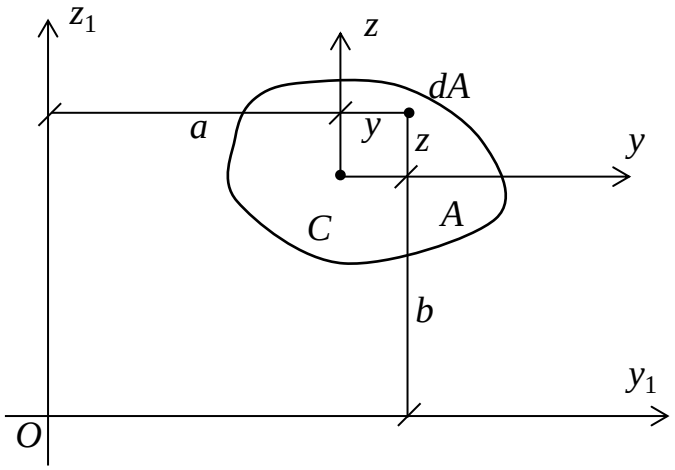


Рис. 3.6.

Пусть y и z – центральные оси фигуры (сечения), имеющей площадь A (рис. 3.6). Элементарная часть площади dA имеет в системе центральных осей координаты y и z. Оси y_1 и z_1 параллельно смещены по отношению к осям y и z на величины b и a соответственно.

Таким образом, центр тяжести фигуры C в системе координат y_1Oz_1 имеет координаты a и b.

Вычислим момент инерции фигуры относительно оси y_1.

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A \left(z+b\right)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b\int_A z dA + b^2\int_A dA. \qquad (3.30)$$

В этом выражении первый интеграл есть момент инерции относительно оси y: $\int_A z^2 dA = I_y$.

Второй интеграл равен нулю, так как представляет собой статический момент относительно центральной оси y: $\int_A z dA = S_y = 0$.

Третий интеграл равен площади фигуры: $\int_A dA = A$.

После подстановки получим первое из выражений теоремы о моментах инерции при параллельном переносе осей:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A. \qquad (3.31)$$

Таким же образом получается момент инерции относительно оси z_1:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A. \qquad (3.32)$$

Определим теперь центробежный момент инерции относительно осей y_1 и z_1:

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y + a)(z + b) dA = \int_A (yz + az + by + ab) dA =$$

$$= \int_A yz da + a\int_A z dA + b\int_A y dA + ab\int_A dA. \qquad (3.33)$$

Первый интеграл полученной формулы есть центробежный момент инерции относительно осей y, z: $\int_A yz dA = I_{yz}$. Второй и третий интегралы – это статические моменты относительно центральных осей, и они равны нулю. Последний интеграл равен площади сечения.

Таким образом, получаем третью формулу теоремы о моментах инерции при параллельном переносе осей:

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA. \qquad (3.34)$$

Выведенные формулы представляют собой выражения теоремы о моментах инерции при параллельном переносе осей (*теорема Штайнера-Гюйгенса*).

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A$$

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA \qquad (3.35)$$

Данная теорема применяется при определении моментов инерции составных фигур.

3.4. Моменты инерции при повороте осей координат

Пусть yOz – система координат (не обязательно центральных), в которой известны моменты инерции фигуры с площадью A: I_y, I_z, I_{yz} (рис. 3.7).

Повернем систему координат на угол α по ходу часовой стрелки, в результате чего она займет положение y_1Oz_1. Требуется определить в этой новой системе координат моменты инерции I_{y_1}, I_{z_1}, $I_{y_1z_1}$.

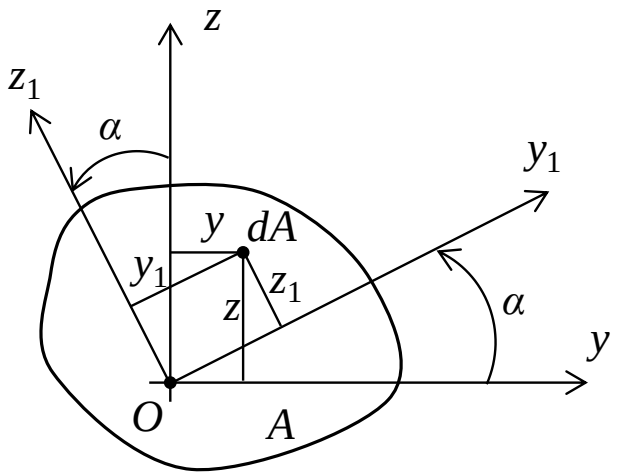


Рис. 3.7.

Вначале получим выражения для новых координат y_1 и z_1 точки dA через исходные координаты y и z. На основании рисунка путем сложения проекций исходных координат на новые направления эти формулы принимают вид

$$y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha;\ z_1 = z\cos\alpha - y\sin\alpha. \qquad (3.36)$$

Подставим эти формулы в интегральные определения моментов инерции относительно новых осей y_1 и z_1.

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A \left(z\cos\alpha - y\sin\alpha\right)^2 dA =$$

$$= \int_A \left(z^2\cos^2\alpha - 2yz\cos\alpha\sin\alpha + y^2\sin^2\alpha\right)dA = \cos^2\alpha\int_A z^2 dA -$$

$$-2\cos\alpha\sin\alpha\int_A yzdA+\sin^2\alpha\int_A y^2dA=$$

$$=I_y\cos^2\alpha-I_{yz}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha+I_z\sin^2\alpha. \qquad (3.37)$$

С учетом известного из тригонометрии соотношения

$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$

выражение (3.37) для I_{y_1} приобретает вид

$$I_{y_1}=I_y\cos^2\alpha+I_z\sin^2\alpha-I_{yz}\sin 2\alpha. \qquad (3.38)$$

Определим теперь момент инерции I_{z_1}.

$$I_{z_1}=\int_A y_1^2dA=\int_A\left(y\cos\alpha+z\sin\alpha\right)^2dA=$$

$$=\int_A\left(y^2\cos^2\alpha+2yz\cos\alpha\sin\alpha+z^2\sin^2\alpha\right)dA=\cos^2\alpha\int_A y^2dA+$$

$$+2\cos\alpha\sin\alpha\int_A yzdA+\sin^2\alpha\int_A z^2dA=$$

$$=I_z\cos^2\alpha+I_{yz}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha. \qquad (3.39)$$

После подстановки $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$

получаем окончательно из (3.39)

$$I_{z_1}=I_z\cos^2\alpha+I_y\sin^2\alpha+I_{yz}\sin 2\alpha. \qquad (3.40)$$

Формулы (3.38) и (3.40) можно полностью выразить через функции только двойного угла 2α. Для этого надо использовать еще два тригонометрических соотношения:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \qquad (3.41)$$

Преобразуем (3.38) с помощью этих формул:

$$I_{y_1}=I_y\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+I_z\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-I_{yz}\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha-I_{yz}\sin 2\alpha. \qquad (3.42)$$

Преобразование формулы (3.40) дает аналогичную формулу:

$$I_{z_1}=I_z\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+I_y\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+I_{yz}\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_z-I_y}{2}\cos 2\alpha+I_{yz}\sin 2\alpha. \qquad (3.43)$$

Сложив левые и правые части формул (3.42) и (3.43), получим $I_{y_1}+I_{z_1}=I_y+I_z$.

Она выражает важное свойство осевых моментов инерции: ***при повороте координатных осей сумма моментов инерции относительно двух взаимно ортогональных осей не меняется.***

Наконец, центробежный момент инерции:

$$I_{y_1z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A \left(y\cos\alpha + z\sin\alpha\right)\left(z\cos\alpha - y\sin\alpha\right)dA =$$

$$= \int_A \left[z^2 \sin\alpha\cos\alpha - y^2 \sin\alpha\cos\alpha + yz\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\right]dA =$$

$$= \left(I_y - I_z\right)\sin\alpha\cos\alpha + I_{yz}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right). \qquad (3.44)$$

Используем известные из тригонометрии зависимости

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha;\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha. \qquad (3.45)$$

С их учетом формула (3.44) приобретает окончательный вид

$$I_{y_1z_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha. \qquad (3.46)$$

Если принять в качестве $\alpha = 90^\circ$, то получим

$$I_{y_1z_1} = -I_{yz}. \qquad (3.47)$$

Тем самым доказано свойство центробежных моментов инерции: ***при повороте осей координат на 90° центробежный момент инерции сохраняет свою величину и меняет знак***.

Сведем воедино формулы для осевых и центробежного моментов инерции при повороте осей координат.

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha.$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha.$$

$$I_{y_1z_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha. \qquad (3.48)$$

Эти формулы справедливы при любом положении начала координат. Далее будем их использовать и для случая, когда начало координат совпадает с центром тяжести сечения.

3.5. Главные оси и главные моменты инерции

Как видно из предыдущих формул, осевые моменты инерции I_{y_1}, I_{z_1} и центробежный момент инерции $I_{y_1z_1}$ меняются при повороте осей на угол α.

На практике очень важно знать экстремальные (максимальное и минимальное) значения осевых моментов инерции и положение соответствующих осей, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения.

Поскольку центробежный момент инерции есть непрерывная функция угла α, меняющая свой знак, то всегда можно найти такое положение осей, при которых $I_{yz} = 0$.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются **главными**. Если начало координат совпадает с центром тяжести, главные оси называются **главными центральными осями инерции**.

Оси симметрии – всегда главные центральные оси инерции. Если сечение имеет только одна осу симметрии, то она является главной, а другая главная ось перпендикулярна оси симметрии и проходит через центр тяжести.

Моменты инерции относительно главных центральных осей инерции называются **главными центральными моментами инерции**. Как будет показано далее, они имеют экстремальные значения (максимум и минимум). На практике часто опускают слово «центральные» и называют такие моменты инерции просто главными моментами инерции.

Если сечение **не имеет оси симметрии**, то главные оси инерции и главные моменты инерции определяются на основе их определения: центробежный момент инерции относительно таких осей равен нулю.

Приравняем к нулю выражение (3.48) для центробежного момента инерции при повороте осей координат:

$$I_{y_1z_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha + I_{yz}\cos 2\alpha = 0, \qquad (3.49)$$

откуда следует, что

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \qquad (3.50)$$

С другой стороны, возьмем первую производную от I_{y_1} по α и приравняем ее к нулю (условие экстремума I_{y_1}):

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = -\frac{I_y - I_z}{2} \cdot 2\sin 2\alpha - 2I_{yz}\cos 2\alpha = 0. \qquad (3.51)$$

Отсюда получается формула, определяющая положение осей, осевые моменты инерции относительно которых имеют экстремум.

$$\tan 2\alpha = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \qquad (3.52)$$

Это условие совпадает с условием (3.50), определяющим положение главных осей, относительно которых равен нулю центробежный момент инерции. Следовательно, осевые моменты инерции относительно главных центральных осей имеют экстремальные значения.

Чтобы получить формулы для главных моментов инерции, надо использовать выражения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\tan 2\alpha$:

$$\cos 2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}};\ \sin 2\alpha = \pm\frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}}. \qquad (3.53)$$

Подставим в эти выражения $\tan 2\alpha$ из формулы (3.52), соответствующий положению главных осей:

$$\cos 2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4I_{yz}^2}{\left(I_y - I_z\right)^2}}} = \pm\frac{I_y - I_z}{\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}}; \qquad (3.54)$$

$$\sin 2\alpha = \mp\frac{2I_{yz}}{\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}}. \qquad (3.55)$$

Наконец, используем полученные зависимости в формуле (3.42) для осевого момента инерции I_{y_1}.

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha =$$

$$= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{\left(I_y - I_z\right)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}} \pm \frac{2I_{yz}^2}{\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}} =$$

$$= \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}{2\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\,. \tag{3.56}$$

Полученное выражение дает величины двух главных моментов инерции – максимального и минимального:

$$I_{\text{гл}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\,. \tag{3.57}$$

Положение главных осей инерции определяется углом поворота α_0 (3.52):

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z},\ 2\alpha_0 = \arctan\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right). \tag{3.58}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right). \tag{3.59}$$

Поскольку сумма осевых моментов инерции есть величина неизменная при повороте осей, то она равна и сумме главных моментов инерции:

$$I_{\max} + I_{\min} = I_y + I_z. \tag{3.60}$$

Поэтому величины главных моментов инерции можно найти и по-другому. Вначале определяют удвоенный угол наклона главных осей $2\alpha_0$. Затем вычисляют один из главных моментов инерции по формуле для моментов инерции при повороте осей:

$$I_{\text{гл1}} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha_0 - I_{yz}\sin 2\alpha_0. \tag{3.61}$$

И наконец находят второй главный момент инерции из условия постоянства суммы осевых моментов инерции:

$$I_{\text{гл2}} = I_y + I_z - I_{\text{гл1}}. \tag{3.62}$$

При этом одновременно выясняется, какой из двух главных моментов инерции является максимальным, а какой – минимальным.

Центробежный момент инерции также имеет экстремумы. Чтобы найти положение осей, относительно которых центробежный момент инерции максимален, используем формулу (3.46) для центробежного момента инерции, в которой исходные оси считаем главными осями. Тогда $I_{yz} = 0$ и формула приобретает вид

$$I_{y_1z_1} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha\,. \qquad (3.63)$$

Максимум этой функции достигается при $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $\alpha = 45^\circ$. Следовательно, ***оси относительно которых центробежный момент инерции максимален по величине, повернуты под углом 45º по отношению к главным осям***.

Максимальная величина центробежного момента инерции при $\sin 2\alpha = 1$ равна

$$I_{y_1z_1}^{\max} = \frac{I_y - I_z}{2}. \qquad (3.64)$$

Максимальный центробежный момент инерции равен полуразности главных осевых моментов инерции.

3.6. Примеры определения геометрических характеристик

Пример 3.1. Определить центральные моменты инерции, осевые моменты сопротивления и радиусы инерции сечения (рис. 3.8). Размеры даны в см.

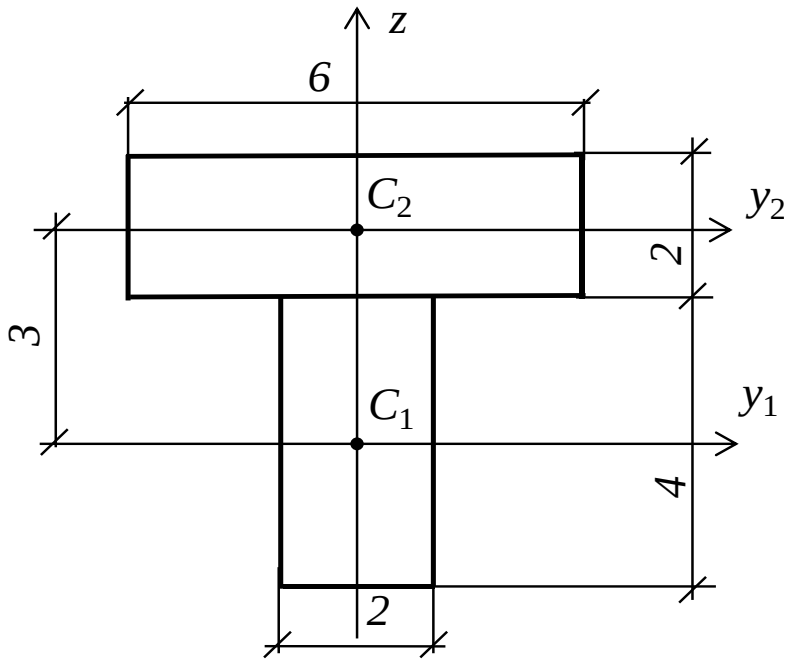


Рис. 3.8.

Сечение симметрично относительно вертикальной оси, которую обозначим z. Разобьем сечение на два прямоугольника как показано на рисунке. Через центры тяжести этих частей проведем их центральные оси y_1 и y_2 перпендикулярно оси z.

1. Определяем центр тяжести всего сечения.

$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 20$ см^2.

Поскольку z является осью симметрии, на этой оси находится центр тяжести всего сечения, как и центры составляющих фигур. Для определения координат центра тяжести удобно выбрать в качестве начальной оси ось y_1, которая является центральной осью первого прямоугольника. Статический момент первого прямоугольника относительно этой равен нулю, что сокращает объем вычислений. Вычисляем координаты центра тяжести сечения в системе y_1C_1z:

$$y_C = \frac{S_z}{A} = 0;\ z_C = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{\sum A_i z_{1i}}{\sum A_i} = \frac{8 \cdot 0 + 12 \cdot 3}{20} = 1{,}8 \text{ см}.$$

2. Через полученный центр тяжести сечения проводим центральную ось y перпендикулярно z. Оси y и z будут главными центральными осями сечения, так как z – ось симметрии (рис. 3.9).

Вычисляем координаты центров тяжести частей фигуры в центральной системе yCz всего сечения.

$a_1 = a_2 = 0;\ b_1 = -1{,}8$ см; $b_2 = 1{,}2$ см.

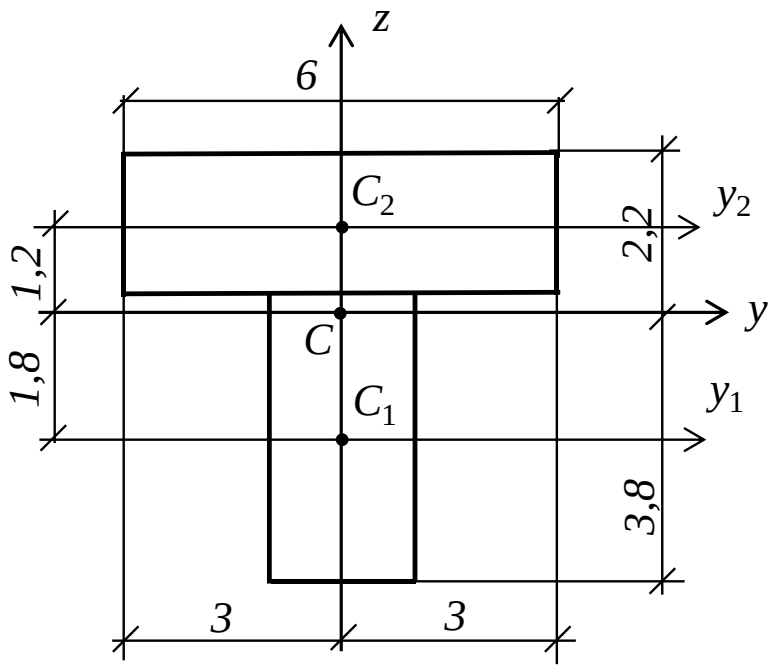


Рис. 3.9.

3. Определяем главные центральные моменты инерции:

$$I_y = \sum_i \left(I_{y_i} + b_i^2 A_i \right) = \frac{2 \cdot 4^3}{12} + 1{,}8^2 \cdot 8 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 1{,}2^2 \cdot 12 = 57{,}87 \text{ см}^4.$$

$$I_z = \sum_i \left(I_{z_i} + a_i^2 A_i \right) = \frac{4 \cdot 2^3}{12} + 0 + \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 0 = 36{,}87 \text{ см}^4.$$

4. Определяем осевые моменты сопротивления:

Максимальные расстояния от главных осей до контура сечения (по модулю) равны

$y_{\max} = 3$ см; $z_{\max} = 3{,}8$ см.

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{57{,}87}{3{,}8} = 15{,}23 \text{ см}^3; \; W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{38{,}67}{3} = 12{,}89 \text{ см}^3.$$

5. Определяем радиусы инерции:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{57{,}87}{20}} = 1{,}7 \text{ см}; \; i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{38{,}67}{20}} = 1{,}4 \text{ см}.$$

Пример 3.2.

Определить центральные моменты инерции, осевые моменты сопротивления и радиусы инерции сечения (рис. 3.10). Размеры даны в см.

В этом примере применяются так называемые отрицательные площади, то есть площади фигур, вырезанных из внешнего контура.

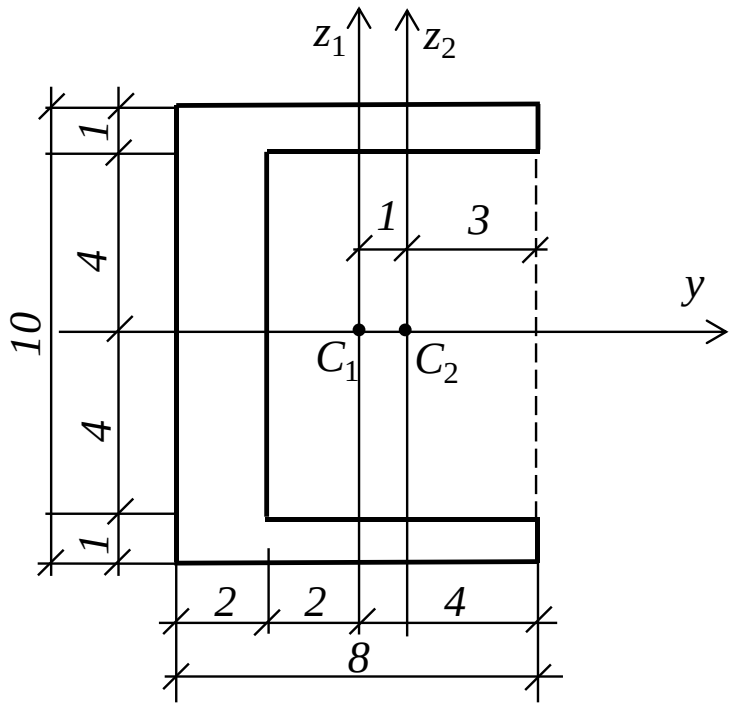


Рис. 3.10.

1. Мысленно разбиваем сечение на 2 прямоугольника: из большого (8 × 10) с центром тяжести C_1 вырезаем маленький (6 × 8) с центром тяжести C_2; их площади $A_1 = 8 \cdot 10 = 80$ см^2; $A_2 = -6 \cdot 8 = -48$ см^2; общая площадь сечения $A = A_1 + A_2 = 80 - 48 = 32$ см^2.

2. Выбираем начальные оси: ось симметрии y, которая есть одна из главных центральных осей, и центральную ось первой фигуры z_1.

Вычисляем координаты центра тяжести сечения в системе yC_1z_1:

$$z_C = \frac{S_y}{A} = 0. \; y_C = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{\sum A_i y_{1i}}{\sum A_i} = \frac{80 \cdot 0 - 48 \cdot 1}{32} = -1{,}5 \text{ см}.$$

3. Через полученный центр тяжести сечения проводим главную центральную ось z перпендикулярно y (рис. 3.11).

Вычисляем координаты центров тяжести частей фигуры в центральной системе yCz всего сечения.

$b_1 = b_2 = 0$; $a_1 = 1{,}5$ см; $a_2 = 2{,}5$ см.

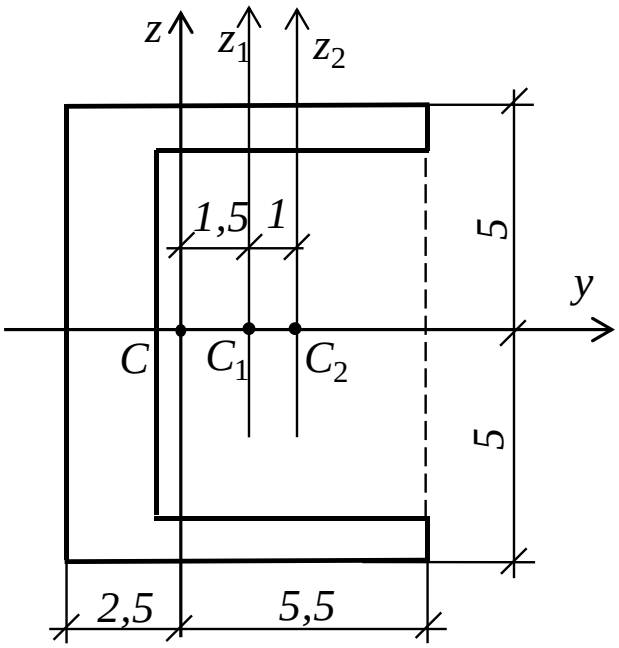


Рис. 3.11.

4. Определяем главные центральные моменты инерции:

$$I_y = \sum_i \left(I_{y_i} + b_i^2 A_i \right) = \frac{8 \cdot 10^3}{12} - \frac{6 \cdot 8^3}{12} = 410,7 \text{ см}^4.$$

$$I_z = \sum_i \left(I_{z_i} + a_i^2 A_i \right) = \frac{10 \cdot 8^3}{12} + 1,5^2 \cdot 80 - \frac{8 \cdot 6^3}{12} - 2,5^2 \cdot 48 = 162,6$$

см^4.

Обратим внимание на то, что моменты инерции отрицательных площадей также принимаются отрицательными.

5. Определяем осевые моменты сопротивления:

Максимальные расстояния от главных осей до контура сечения:

$y_{\max} = 5,5$ см; $z_{\max} = 5$ см.

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{410,7}{5} = 82,14 \text{ см}^3; \; W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{162,6}{5,5} = 29,56 \text{ см}^3.$$

6. Определяем радиусы инерции:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{410,7}{32}} = 3,58 \text{ см}; \; i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{162,6}{32}} = 2,25 \text{ см}.$$

Пример 3.3. Определить главные центральные моменты инерции (рис. 3.12). Размеры даны в см.

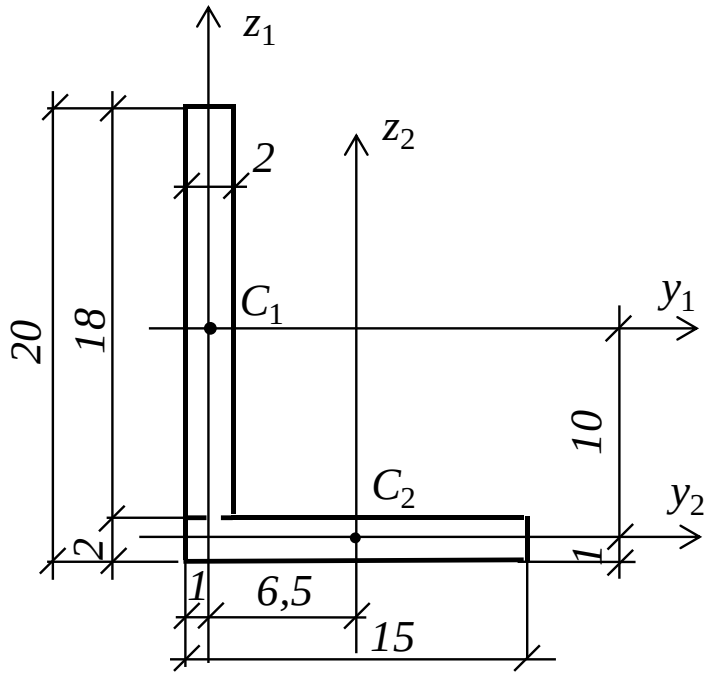


Рис. 3.12.

1. Разбиваем сечение на два прямоугольника как показано на рис. 3.12. Выбираем в качестве начальных осей центральные оси первого прямоугольника y_1 и z_1.

2. Определяем центр тяжести всего сечения.

Площади частей сечения:

$A_1 = 18 \cdot 2 = 36$ см^2; $A_2 = 15 \cdot 2 = 30$ см^2.

$A = A_1 + A_2 = 36 + 30 = 66$ см^2.

Координаты центров тяжести в исходной системе:

$y_{11} = 0$; $y_{12} = 6,5$ см; $z_{11} = 0$; $z_{12} = -10$ см.

Координаты центра тяжести всего сечения:

$$y_C = \frac{S_{z_1}}{A} = \frac{\sum A_i y_{1i}}{\sum A_i} = \frac{36 \cdot 0 + 30 \cdot 6,5}{66} = 2,95 \text{ см}.$$

$$z_C = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{\sum A_i z_{1i}}{\sum A_i} = \frac{36 \cdot 0 - 30 \cdot 10}{66} = -4,55 \text{ см}.$$

3. Через полученный центр тяжести сечения проводим центральные оси y_0 и z_0 параллельно исходным осям y_1 и z_1.

Вычисляем координаты центров тяжести частей фигуры в центральной системе координат $y_0 C z_0$ всего сечения.

$a_1 = y_{11} - y_C = 0 - 2,95 = -2,95$ см.

$a_2 = y_{12} - y_C = 6,5 - 2,95 = 3,55$ см.

$b_1 = z_{11} - z_C = 0 + 4,55 = 4,55$ см.

$b_2 = z_{12} - z_C = -10 + 4,55 = -5,45$ см.

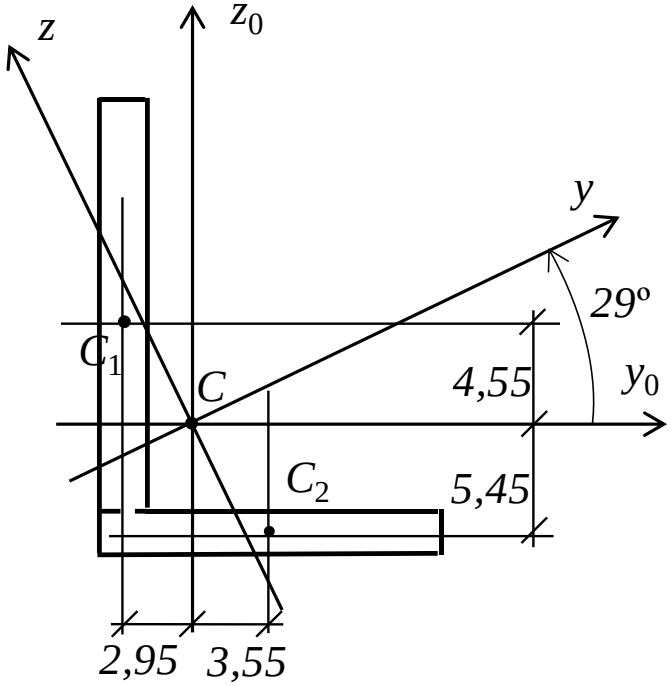


Рис. 3.13.

4. Определяем центральные осевые моменты инерции относительно осей y_0 и z_0:

$$I_{y_0} = \sum_i \left(I_{y_i} + b_i^2 A_i \right);\ I_{z_0} = \sum_i \left(I_{z_i} + a_i^2 A_i \right).$$

$$I_{y_0} = \frac{2 \cdot 18^3}{12} + 4{,}55^2 \cdot 36 + \frac{15 \cdot 2^3}{12} + 5{,}45^2 \cdot 30 = 2618{,}4 \text{ см}^4.$$

$$I_{z_0} = \frac{18 \cdot 2^3}{12} + 2{,}95^2 \cdot 36 + \frac{2 \cdot 15^3}{12} + 3{,}55^2 \cdot 30 = 1265{,}9 \text{ см}^4.$$

5. Определяем центробежный момент инерции относительно осей y_0 и z_0.

$$I_{y_0 z_0} = \sum_i \left(I_{y_i z_i} + a_i b_i A_i \right) = -2{,}95 \cdot 4{,}55 \cdot 36 - 3{,}55 \cdot 5{,}45 \cdot 30 = -1074{,}3$$

см^4.

Для данной задачи в формуле центробежного момента инерции слагаемые $I_{y_i z_i}$ равны 0, поскольку для составляющих прямоугольников оси y_i и z_i являются главными центральными.

6. Определяем положение главных осей инерции: вычисляем угол их поворота α_0 относительно y_0 и z_0):

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2 I_{y_0 z_0}}{I_{y_0} - I_{z_0}} = -\frac{2 \cdot (-1074{,}3)}{2618{,}4 - 1265{,}9} = 1{,}59.$$

$2\alpha = 57^\circ 30'$; $\alpha = 28^\circ 45'$.

На чертеже сечения (рис. 3.13) полученный угол откладываем против хода часовой стрелки (положительное направление).

7. Определяем главные центральные моменты инерции.

$$I_{\text{гл}} = \frac{I_{y_0} + I_{z_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(I_{y_0} - I_{z_0} \right)^2 + 4 I_{y_0 z_0}^2} =$$

$$= \frac{2618{,}4 + 1265{,}9}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(2618{,}4 - 1265{,}9 \right)^2 = 4 \left(-1074{,}3 \right)^2}.$$

$I_{\max} = 3211$ см^4; $I_{\min} = 673$ см^4.

Выясним, какой из главных осей соответствует максимальный момент инерции. Для этого вычислим момент инерции относительно оси y по формуле для поворота осей:

$$I_y = \frac{I_{y_0} + I_{z_0}}{2} + \frac{I_{y_0} - I_{z_0}}{2} \cos 2\alpha_0 - I_{yz} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= \frac{2618,4+1265,9}{2} + \frac{2618,4-1265,9}{2} \cdot 0,537 - \left(-1074,3\right) \cdot 0,843 =$$

= 3211 см^4.

Видно, что относительно главной оси y момент инерции имеет максимальное значение: $I_y = I_{\max}$. Тогда момент инерции относительно оси z минимален: $I_z = I_{\min}$.

Можно заметить, что максимальному моменту инерции соответствует наибольшая степень удаления площади сечения от главной оси: в нашем примере это ось y.

Проверим свойство постоянства суммы моментов инерции при повороте осей:

$I_{\max} + I_{\min} = I_{y_0} + I_{z_0}$. $3211 + 673 = 2618 + 1266 = 3884$ см^4.

Тема 4. Теория напряжённого состояния

4.1. Характеристика напряженных состояний

Под условным термином «**напряжённое состояние в точке**» элемента конструкции понимают совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по бесчисленному множеству площадок, проходящих через данную точку.

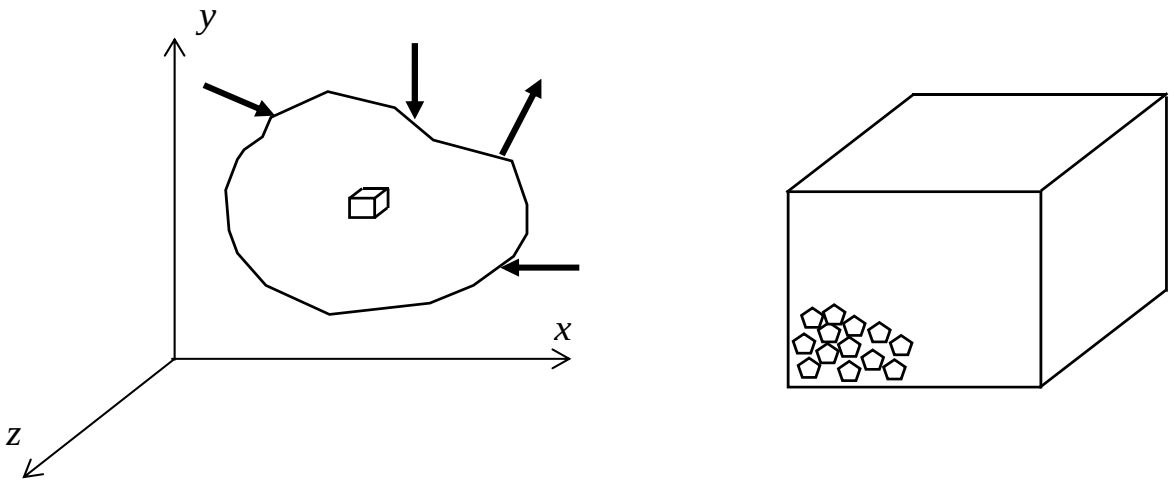


Рис. 4.1.

В качестве точки понимается малый объем материала (элемент), ограниченный взаимно перпендикулярными площадками. Этот элемент существенно мал по сравнению с размерами тела (рис. 4.1), но значительно превосходит размеры частиц материала. Такая двоякость свойств позволяет:

1) считать элемент однородным и обладающим всеми физическими свойствами данного материала (элемент есть представительный объем материала).

2) считать, что составляющие напряжений на противоположных гранях элемента одинаковы. При переходе от элемента к элементу напряжения являются непрерывными функциями координат.

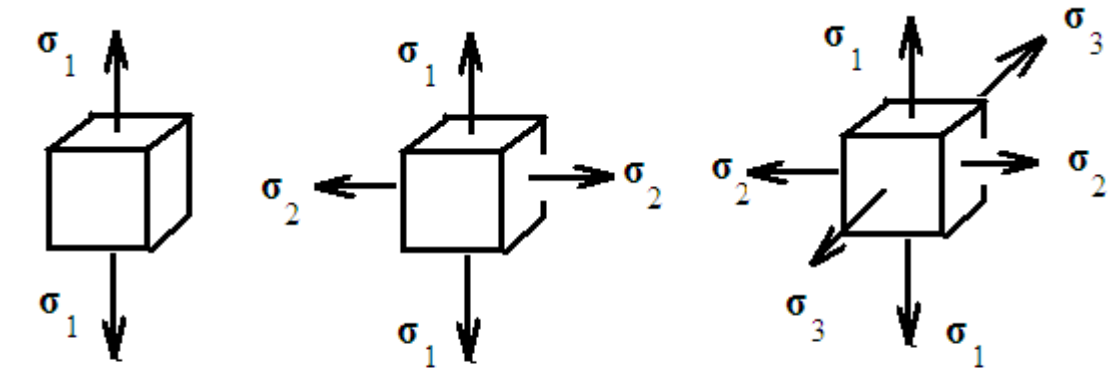
Напряжённое состояние необходимо знать для правильной оценки прочности и жёсткости элемента конструкции.

В зависимости от нагрузки и геометрических параметров поставленной задачи (расчётной схемы) напряжённое состояние в точке может быть линейным, плоским или объёмным (рис. 4.2).

В теории упругости доказывается, что через любую точку напряжённого упругого тела можно провести три взаимно перпендикулярные площадки, по которым действуют только нормальные напряжения. Иначе говоря, всегда можно выделить элементарный кубический объем (иногда говорят «кубик»), ограниченный такими площадками.

Площадки, по которым отсутствуют касательные напряжения, называются **главными площадками**, а нормальные напряжения, действующие по ним, называются **главными напряжениями**.

Главные напряжения обозначаются цифровыми индексами: σ_1, σ_2 и σ_3. При этом соблюдается следующее правило расстановки этих индексов: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (сравниваются величины с учетом знаков напряжений).



линейное напряжённое состояние

плоское напряжённое состояние

объёмное напряжённое состояние

Рис. 4.2.

При осевом растяжении-сжатии элемента имеется только одно ненулевое главное напряжение: σ_1 или σ_3. Осевое растяжение-сжатие – это **линейное** напряжённое состояние (рис. 4.2).

Линейное напряжённое состояние испытывают, например, точки стержня при центральном растяжении или сжатии.

Если на материал элемента действуют два ненулевых растягивающих или сжимающих главных напряжения, а третье равно нулю, то такое напряжённое состояние называется **плоским**: например, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$ (рис. 4.2).

Плоское напряжённое состояние наиболее часто встречается в задачах сопротивления материалов. Плоское напряжённое состояние испытывают балки покрытий и перекрытий, элементы плоских рам, точки сборных панелей стен здания, стенок и днищ резервуаров, котлов и т.д.

Когда на гранях элемента действуют три ненулевых растягивающих или сжимающих главных напряжения, то такое напряжённое состояние называется **объемным** (рис. 4.2).

В объёмном напряжённом состоянии находятся точки подводных частей мостов и массивных гидротехнических сооружений.

При графическом изображении линейного и плоского напряжённого состояния элемент (кубик) заменяется его проекцией на плоскость грани (квадрат), в которой напряжения отсутствуют.

4.2. Линейное напряженное состояние

Напряжения по наклонным площадкам при растяжении (сжатии)

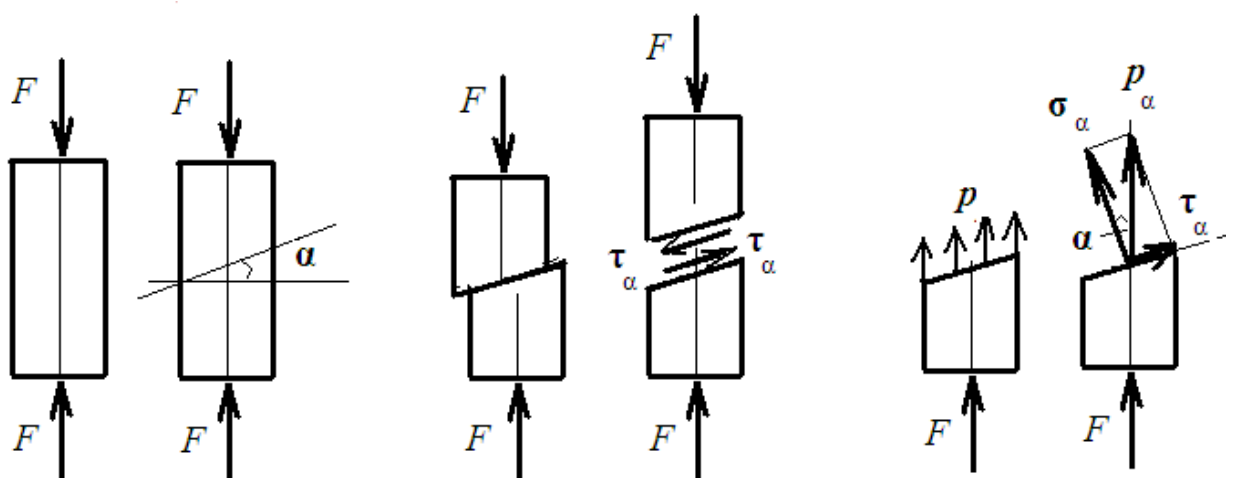


Рис. 4.3.

Рассмотрим сжатый или растянутый стержень. Если выделить из него малый элемент (точку), одна из граней которого лежит в плоскости сечения, то по этой грани действуют только нормальные напряжения, совпадающие с полными напряжениями. Давление между продольными волокнами отсутствует, поэтому других напряжений по граням элемента нет. Такой элемент находится в условиях линейного напряженного состояния при главных напряжениях σ_1 или σ_3.

Проведём сечение под углом α к поперечному сечению (рис. 4.3). Назовём это сечение наклонным (косым). В наклонном сечении полные напряжения направлены по-прежнему вдоль продольных волокон стержня. Но, поскольку нормаль к сечению образует угол с осью стержня, на наклонных площадках возникают не только нормальные напряжения, но и касательные, которые вызывают деформации сдвига.

Если обозначить A – площадь поперечного сечения, и A_α – площадь наклонного сечения, то $A_\alpha = A/\cos\alpha$.

Полное напряжение на наклонной площадке получается делением продольной силы на площадь наклонного сечения:

$$p_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{F\cos\alpha}{A} = \sigma\cos\alpha. \qquad (4.1)$$

Здесь $\sigma = \frac{F}{A}$ – нормальные напряжения в поперечном сечении, то есть по исходной главной площадке.

Чтобы найти составляющие полного напряжения по наклонной площадке, спроектируем его на нормаль и на плоскость этой площадки:

$$\sigma_\alpha = p_\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha. \qquad (4.2)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha\sin\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha. \qquad (4.3)$$

Мы получили выражения для нормальных и касательных напряжений по наклонной площадке при линейном напряженном состоянии.

Подставим в формулы для напряжений значения угла α в диапазоне от 0 до 90º и получим следующую таблицу (табл. 4.1):

Табл. 4.1

$\alpha,^\circ$	$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha$	$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$
0	$\sigma = \sigma_{\max}$	0
45°	$\frac{\sigma}{2}$	$\frac{\sigma}{2} = \tau_{\max}$
90°	0	0

Сделаем выводы по данным таблицы:

1) В поперечном сечении нормальные напряжения максимальны, а касательные равны нулю.

2) При увеличении угла нормальные напряжения убывают, а касательные возрастают при $0 \le \alpha \le 45^\circ$ и убывают при $45^\circ \le \alpha \le 90^\circ$.

3) На площадках, наклоненных под углом 45º, нормальные и касательные напряжения одинаковы по величине и равны половине максимального нормального напряжения.

4) На площадках, расположенных вдоль оси стержня, нормальные и касательные напряжения равны нулю, то есть продольные волокна при растяжении не влияют друг на друга.

4.3. Плоское напряженное состояние

4.3.1. Выражение напряжений по наклонным площадкам

Рассмотрим элемент, ограниченный произвольными взаимно ортогональными площадками, который находится в условиях плоского напряженного состояния (рис. 4.4).

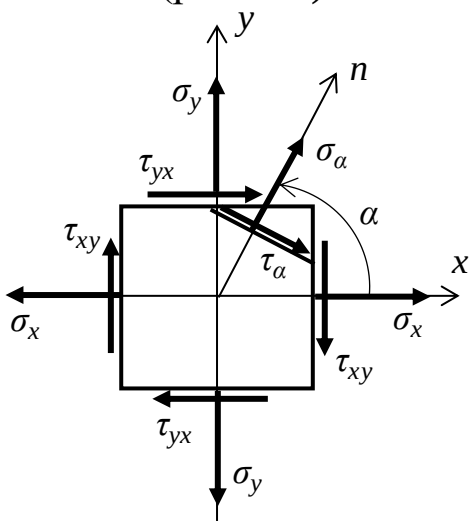


Рис. 4.4.

По четырем граням такого элемента будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения, расположенные в одной плоскости, параллельной двум остальным граням. На этих двух гранях элемента напряжения отсутствуют.

Введем в рассмотрение систему прямоугольных координат в плоскости действия напряжений. Оси x и y этой системы направлены перпендикулярно граням элемента. Составляющие напряжений по этим площадкам обозначим σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx}. Индекс нормального напряжения соответствует оси, вдоль которой действует это напряжение. Эта ось совпадает с нормалью к площадке. Напряжение τ_{xy} действует по той же площадке, что и σ_x, а напряжение τ_{yx} – по площадке, где действует σ_y. Иными словами, первый индекс касательного напряжения показывает направление нормали к площадке, а второй индекс – направление оси, вдоль которой действует это напряжение.

Будем использовать следующее правило знаков для напряжений. Нормальные напряжения положительны, если направлены от площадки (по внешней нормали к ней). Положительные нормальные напряжения вызывают растяжение. Касательные напряжения положительны, если они вызывают вращение элемента по ходу часовой стрелки. На рисунке показаны положительные направления всех напряжений.

Проведем через элемент наклонное сечение. Положение этого сечения будем характеризовать углом α, который отсчитывается от оси x до направления внешней нормали n к площадке против хода часовой стрелки (рис. 4.5).

Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, τ_{yx}, действующие на взаимно ортогональных гранях элемента, будем считать заданными. Поставим задачу определить напряжения σ_α и τ_α по наклонной площадке.

Для решения этой задачи выделим призматический элемент, ограниченный двумя взаимно ортогональными площадками с нормалями x и y, а также заданной наклонной площадкой с нормалью n (рис. 4.5).

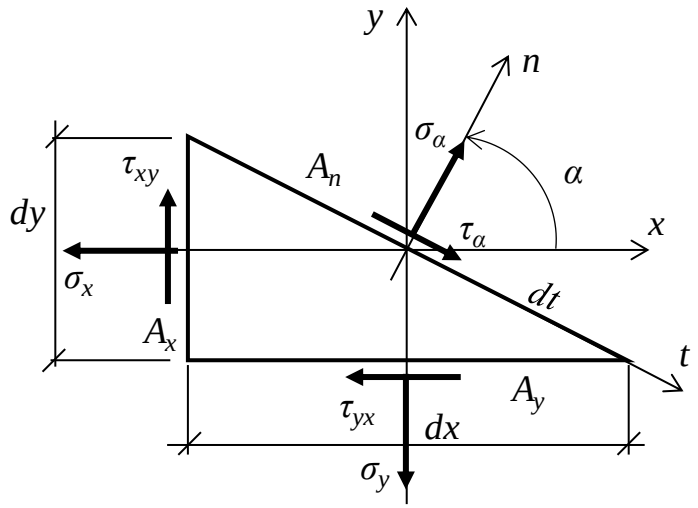


Рис. 4.5.

Размеры взаимно ортогональных площадок и наклонной площадки выделенного малого элемента равны dx, dy и dt соответственно. Площади соответствующих граней призмы обозначим A_x и A_y, площадь наклонной грани обозначим A_n. Между площадями граней справедливы соотношения:

$$A_x = A_n \cos\alpha,\ A_y = A_n \sin\alpha. \qquad (4.4)$$

Между размерами граней также имеет место зависимость:

$$dx = dt \sin\alpha,\ dy = dt \cos\alpha. \qquad (4.5)$$

Исходя из малости размеров граней, считаем напряжения постоянными в пределах каждой грани. Поэтому внутренние силы на поверхности граней приводятся к центрам их тяжести (к середине ширины, рис. 4.6).

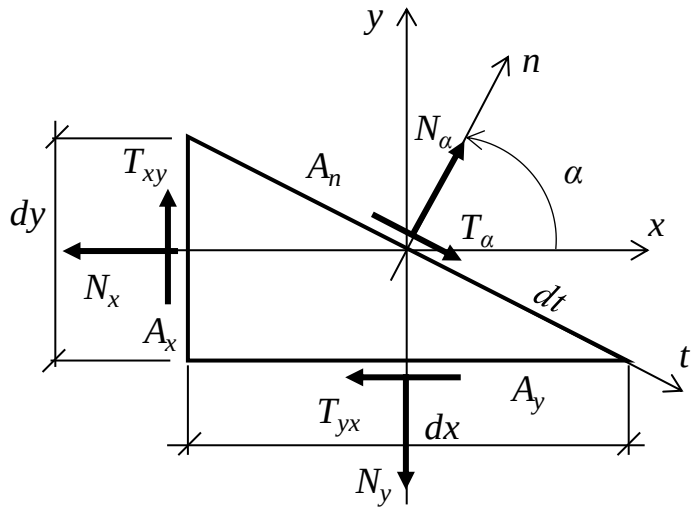


Рис. 4.6.

Так, касательные силы на площадках A_x и A_y будут равны

$$T_{xy} = \tau_{xy} A_x = \tau_{xy} A_n \cos\alpha;\ T_{yx} = \tau_{yx} A_y = \tau_{yx} A_n \sin\alpha. \quad (4.6)$$

Нормальные силы по взаимно ортогональным площадкам равны

$$N_x = \sigma_x A_x = \sigma_x A_n \cos\alpha;\ N_y = \sigma_y A_y = \sigma_y A_n \sin\alpha. \quad (4.7)$$

Нормальная и касательная сила по наклонной площадке равны

$$N_\alpha = \sigma_\alpha A_n;\ T_\alpha = \tau_\alpha A_n. \quad (4.8)$$

Составим уравнение равновесия элемента (рис. 4.6): сумма моментов всех сил относительно центра наклонной грани равна нулю:

$$T_{xy} \frac{dx}{2} + T_{yx} \frac{dy}{2} = 0;\ \tau_{xy} A_x \frac{dx}{2} + \tau_{yx} A_y \frac{dy}{2} = 0. \quad (4.9)$$

После подстановок в (4.9) площадей и размеров граней получим

$$\tau_{xy} A_n \cos\alpha \frac{dt \sin\alpha}{2} + \tau_{yx} A_n \sin\alpha \frac{dt \cos\alpha}{2} = 0. \quad (4.10)$$

После деления на ненулевые множители окончательно будем иметь

$\tau_{xy} + \tau_{yx} = 0$, или

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} \quad (4.11)$$

Полученное равенство выражает собой ***закон парности касательных напряжений***:

Касательные напряжения по взаимно ортогональным площадкам равны по величине и противоположны по знаку.

Рассмотрим еще два условия равновесия элементарной призмы.

Спроектируем все силы, приложенные к элементу, на направление нормали к наклонной площадке n.

$$N_\alpha - N_x \cos\alpha - N_y \sin\alpha + T_{xy} \sin\alpha - T_{yx} \cos\alpha = 0. \quad (4.12)$$

После подстановки в (4.12) выражений для усилий получим

$$\sigma_\alpha A_n - \sigma_x A_n \cos^2\alpha - \sigma_y A_n \sin^2\alpha + \tau_{xy} A_n \cos\alpha \sin\alpha - \tau_{yx} A_n \sin\alpha \cos\alpha = 0 \quad . \quad (4.13)$$

С учетом закона парности касательных напряжений $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ после деления на A_n получается формула для нормальных напряжений по наклонной площадке:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - 2\tau_{xy} \sin\alpha \cos\alpha. \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) можно преобразовать, выразив через двойной угол с помощью формул

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha;\ \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

В результате получится выражение

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha. \qquad (4.15)$$

Наконец, спроектируем все силы на направление оси t, касательной к наклонной площадке:

$$T_\alpha-N_x\sin\alpha+N_y\cos\alpha-T_{xy}\cos\alpha-T_{yx}\sin\alpha=0. \qquad (4.16)$$

Подставим в (4.16) выражения для усилий:

$$\tau_\alpha A_n-\sigma_x A_n\cos\alpha\sin\alpha+\sigma_y A_n\sin\alpha\cos\alpha-\tau_{xy}A_n\cos^2\alpha-\tau_{yx}A_n\sin^2\alpha=0 \qquad (4.17)$$

.

После учета $\tau_{yx}=-\tau_{xy}$ и деления на A_n получается формула для касательных напряжений по наклонной площадке:

$$\tau_\alpha=\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin\alpha\cos\alpha+\tau_{xy}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right). \qquad (4.18)$$

Преобразуем формулу (4.18) к аргументу 2α с помощью соотношений

$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ и $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$.

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha. \qquad (4.19)$$

В итоге получены формулы, выражающие напряжения по произвольной наклонной площадке через известные напряжения по двум взаимно ортогональным площадкам:

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha. \qquad (4.20)$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha. \qquad (4.21)$$

Можно заметить, что эти выражения аналогичны формулам преобразования осевого и центробежного моментов инерции при повороте осей координат.

Видно, что для вычисления напряжений по любой площадке при плоском напряженном состоянии достаточно знать 3 напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам: σ_x, σ_y и τ_{xy} (четвертое напряжение τ_{yx} не является независимым в силу закона

парности). Эти три напряжения называются компонентами плоского напряженного состояния.

Применим формулы для напряжений по наклонной площадке к случаю, когда исходными являются главные площадки. Пусть, например, главные напряжения равны σ_1 и σ_2. Касательные напряжения по главным площадкам равны нулю. Тогда полученные общие формулы (4.20) и (4.21) приобретают более простой вид:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha; \qquad (4.22)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha. \qquad (4.23)$$

Аналогично получаются формулы для напряжений по наклонным площадкам, если заданы другие пары главных напряжений: σ_1 и σ_3 либо σ_2 и σ_3.

Применим формулу для нормальных напряжений (4.20) к величине угла $\alpha + 90^\circ$:

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos\left(2\alpha + 180^\circ\right) - \tau_{xy}\sin\left(2\alpha + 180^\circ\right) =$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha. \qquad (4.24)$$

Если теперь сложить левые и правые части выражений (4.20) для σ_α и (4.24) для $\sigma_{\alpha+90^\circ}$, то получим

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y. \qquad (4.25)$$

Иными словами, ***сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная***.

В частности, эта сумма равна сумме главных напряжений для данного плоского напряженного состояния. Например,

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Сумму главных напряжений принято называть **первым инвариантом** напряженного состояния (инвариантный означает независимый, в данном случае от поворота осей).

4.3.2. Главные напряжения и положение главных площадок

Как уже было сказано, главными площадками называются такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Для определения положения этих площадок по отношению к произвольным направлениям приравняем к 0 выражение (4.21) для касательных напряжений τ_α:

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = 0. \qquad (4.26)$$

Решение этого уравнения дает тангенс угла наклона нормали одной из главных площадок относительно оси x:

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \qquad (4.27)$$

Учитывая периодичность тангенса (180º), из (4.27) получаем значения углов наклона главных площадок:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \pm 90^\circ. \qquad (4.28)$$

Итак, доказано, что главные площадки расположены под углом 90º друг к другу (рис. 4.7).

Величины нормальных напряжений на главных площадках достигают экстремумов. Чтобы в этом убедиться, достаточно приравнять к нулю первую производную от σ_α по α аналогично тому, как это было сделано в теории моментов инерции:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cdot 2\sin 2\alpha - 2\tau_{xy}\cos 2\alpha = 0. \qquad (4.29)$$

Это уравнение имеет те же корни, что и равенство нулю касательных напряжений (4.26). Следовательно, на главных площадках, где касательные напряжения равны нулю, действуют экстремальные (главные) напряжения.

Величины этих главных напряжений определяются путем подстановки в выражение напряжений по наклонной площадке σ_α (4.20) функций угла поворота главных площадок α_0. При этом используются тригонометрические соотношения

$$\cos 2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}};\ \sin 2\alpha = \pm\frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1+\tan^2 2\alpha}}. \qquad (4.30)$$

Проведя такие же выкладки, как и при получении главных моментов инерции, выведем формулу для величин главных напряжений:

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\,. \qquad (4.31)$$

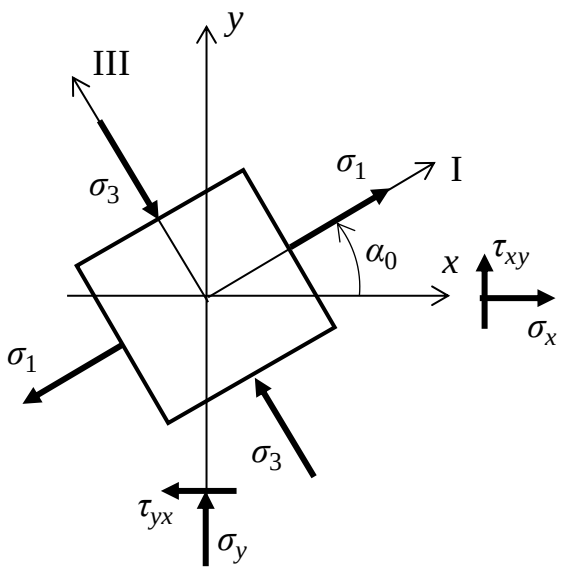


Рис. 4.7.

Формула (4.31) дает два значения ненулевых главных напряжений в заданной плоскости. Третье главное напряжение равно 0. Индексацию полученных значений следует проводить по правилу, установленному для главных напряжений: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Для расстановки главных напряжений по главным площадкам исследуем характер экстремума на площадке, определяемой углом α_0. Как известно, наличие минимума или максимума в точке экстремума зависит от знака второй производной в этой точке. Запишем поэтому выражение для второй производной от σ_α по α.

$$\left.\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0} = -2\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\alpha_0 + 4\tau_{xy}\sin 2\alpha_0\,. \qquad (4.32)$$

Если в результате вычислений по этой формуле получится отрицательное число, то площадке под углом α_0 к оси x соответствует максимальное из двух главных напряжений, если же получится положительное число, – то минимальное (рис. 4.7).

Используя тригонометрические выражения косинуса и синуса через тангенс угла 2α, можно упростить выражение для второй производной:

$$\left.\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{2\left(\sigma_x - \sigma_y\right)}{\cos 2\alpha_0}\left(\cos^2 2\alpha_0 - 2\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_z}\sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha_0\right) =$$

$$= -\frac{2\left(\sigma_x - \sigma_y\right)}{\cos 2\alpha_0}\left(\cos^2 2\alpha_0 + \tan 2\alpha_0 \sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha_0\right) =$$

$$= -\frac{2\left(\sigma_x - \sigma_y\right)}{\cos 2\alpha_0}\left(\cos^2 2\alpha_0 + \sin^2 2\alpha_0\right) = -\frac{2\left(\sigma_x - \sigma_y\right)}{\cos 2\alpha_0}. \qquad (4.33)$$

Практически можно использовать оба полученных выражения.

Нормали к главным площадкам принято называть главными осями и обозначать римскими цифрами I, II, III соответственно номера главного напряжения (рис. 4.7).

4.3.3. Максимальные касательные напряжения

Рассмотрим выражение для касательных напряжений по наклонной площадке через главные напряжения:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \qquad (4.34)$$

и исследуем эту функцию на максимум. Очевидно, что касательные напряжения достигают максимума при значении $\sin 2\alpha = 1$, то есть при $2\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 45^\circ$.

Следовательно, *максимальные касательные напряжения в плоскости действия ненулевых главных напряжений действуют на площадках, расположенных под углом 45° к главным площадкам*.

Величина максимальных касательных напряжений равна полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max}^{1-2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ либо } \tau_{\max}^{2-3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \text{ или } \tau_{\max}^{3-1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (4.35)$$

Максимальные касательные напряжения в плоскости действия ненулевых главных напряжений вычисляются по величинам этих главных напряжений. Если же надо определить максимум касательного напряжения для всего объемного элемента, то он равен полуразности максимального и минимального значений из всех трех главных напряжений, включая нулевое.

$$_{\max}\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (4.36)$$

В формуле (4.36) σ_1 либо σ_3 могут равняться 0.

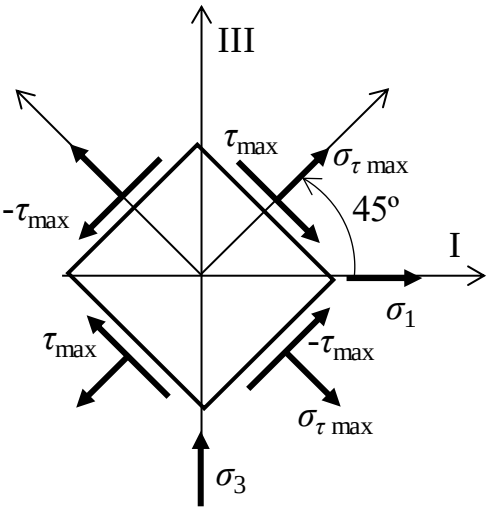


Рис. 4.8.

Максимум касательных напряжений для всего элемента достигается на площадках, составляющих угол 45° с главными площадками, на которых действуют напряжения σ_1 и σ_3.

На площадках, перпендикулярных площадкам с максимальными касательными напряжениями, в соответствии с законом парности действуют такие же напряжения, но противоположные по знаку. $\tau_{\min} = -\tau_{\max}$.

Направление максимальных касательных напряжений можно определить визуально по простому правилу: проекция касательного напряжения на направление максимального из главных напряжений должна быть направлена от главной площадки (см. рис 4.8).

Нормальные напряжения, действующие по площадкам с максимальными касательными напряжениями, всегда равны полу-сумме соответствующих главных напряжений, что следует из формулы для σ_α при $\alpha = 45^\circ$:

$$\sigma_{\tau_{\max}}^{1-2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{ либо } \sigma_{\tau_{\max}}^{2-3} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \text{ или } \sigma_{\tau_{\max}}^{1-3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (4.37)$$

Для всего элементарного объема эти напряжения вычисляются всегда через σ_1 и σ_3:

$$\sigma_{\max\tau} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (4.38)$$

Пример 4.1. Даны компоненты плоского напряженного состояния: $\sigma_x = 60$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\tau_{xy} = -30$ МПа (рис. 4.9). Определить главные напряжения и положение главных площадок.

Решение.

1. Показываем заданные напряжения на чертеже с учетом правила знаков. По закону парности касательных напряжений $\tau_{yx} = 30$ МПа.

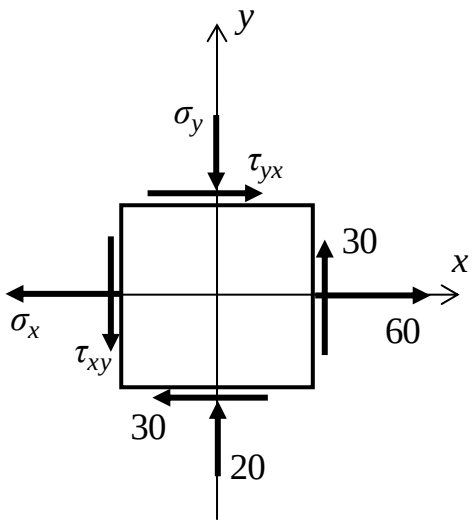


Рис. 4.9.

2. Вычисляем главные напряжения.

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{60 - 20}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(60 + 20\right)^2 + 4 \cdot 30^2} = 20 \pm 50 \text{ МПа.}$$

В соответствии с правилами индексации главных напряжений обозначаем их следующим образом:

$\sigma_1 = 70$ МПа. $\sigma_3 = -30$ МПа. $\sigma_2 = 0$.

3. Определяем угол наклона главных площадок.

$$\operatorname{tan} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2\left(-30\right)}{60 + 20} = 0,75.$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctan} 0,75 = \frac{36,9}{2} = 18,4^\circ. \quad \alpha_0' = 18,4 - 90 = -71,6^\circ.$$

Показываем на чертеже (рис. 4.10) нормали к главным площадкам (главные оси) и сами главные площадки.

4. Определяем характер экстремума напряжения на главной площадке, отклоненной от оси x на угол $\alpha_0 = 18,4^\circ$.

$$\left.\frac{d^2\sigma_\alpha}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{2\left(\sigma_x - \sigma_y\right)}{\cos 2\alpha_0} = -\frac{2\left(60 + 20\right)}{\cos 38,9^\circ} < 0.$$

Обращаем внимание на то, что величину второй производной знать не обязательно. Достаточно выяснить ее знак. Поскольку в нашем случае этот знак отрицательный, углу $\alpha_0 = 18,4^\circ$ соответствует максимальное главное напряжение $\sigma_1 = 70$ МПа. На главной площадке, определяемой углом $\alpha_0' = -71,6^\circ$ будет действовать $\sigma_3 = -30$ МПа.

Показываем главные напряжения на чертеже.

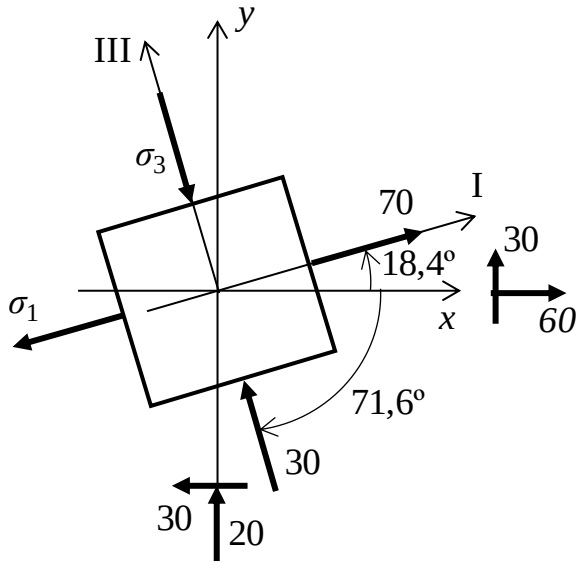


Рис. 4.10.

Отметим полезный визуальный прием, который позволяет расставить главные напряжения по площадкам без вычислений. Если касательное напряжение по площадке с максимальным из исходных нормальных напряжений имеет положительную проекцию на главную ось (от площадки), то вдоль этой оси действуют максимальные главные напряжения.

4.3.4. Графическое представление плоского напряженного состояния

Пусть плоское напряженное состояние характеризуется главными напряжениями σ_1 и σ_3. Запишем формулы для напряжений по наклонной площадке с наклоном нормали α относительно первой главной оси I (рис. 4.11):

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha; \qquad (4.39)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha. \qquad (4.40)$$

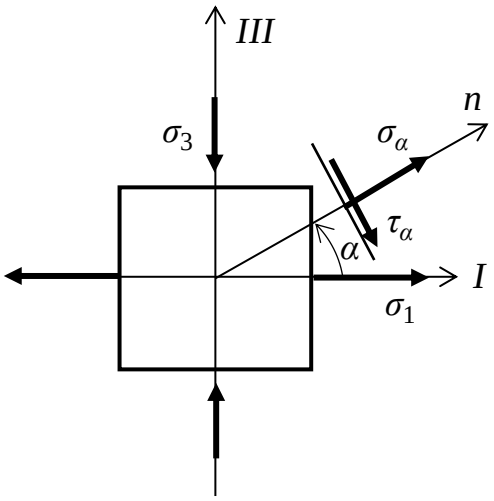


Рис. 4.11.

Введем следующие обозначения:

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2};\ R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (4.41)$$

Перенесем первое слагаемое правой части формулы (4.39) влево; затем возведем обе части полученных равенств (4.39) и (4.40) в квадрат и сложим их. В результате будем иметь

$$\left(\sigma_\alpha - C\right)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right), \qquad (4.42)$$

или, учитывая $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,

$$\left(\sigma_\alpha - C\right)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2. \qquad (4.43)$$

Полученный результат в координатах $\sigma_\alpha = \sigma$ и $\tau_\alpha = \tau$ представляет собой уравнение окружности радиуса R со смещением центра по оси σ вправо на величину C.

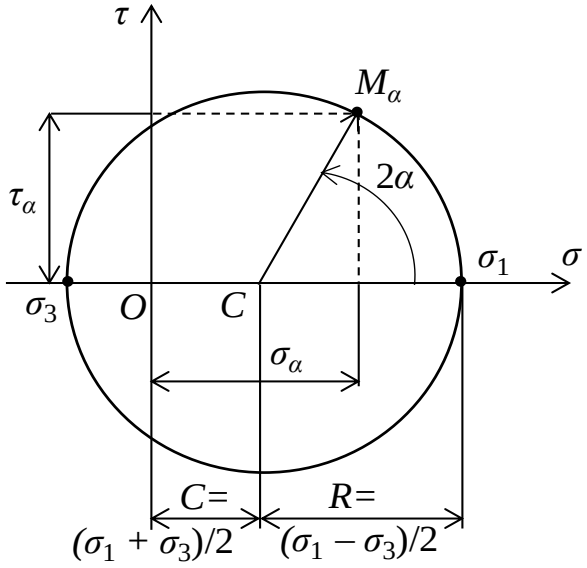


Рис. 4.12.

Построить такую окружность можно, отложив на оси σ величины главных напряжений σ_1 и σ_3. Затем расстояние между полученными точками надо поделить надвое, получив таким образом центр окружности. Из данного центра радиусом до точки σ_1 или до σ_3 провести окружность, которая и будет искомой (рис. 4.12).

Окружность, описывающую зависимость между нормальными и касательными напряжениями для заданного напряженного состояния, называют окружностью Мора или, как исторически сложилось, кругом Мора.

Формулы, выражающие нормальное и касательное напряжения через угол 2α, являются параметрическими уравнениями такой окружности. Параметром является угол 2α, отсчитываемый от радиуса точки на оси σ с главным напряжением σ_1.

Если от точки σ_1 отложить в ту же сторону, что и фактический угол α, двойной угол 2α, то получим радиус с точкой на окружности M_α (рис. 4.12). Координаты этой точки σ_α и τ_α равны нормальному и касательному напряжениям по наклонной площадке с углом α. Каждому радиусу точки круга ставится в соответствие нормаль к наклонной площадке.

Очевидно, что в качестве главных напряжений может выступать любая их пара, характеризующая данное напряженное состояние.

Если рассмотреть две точки круга Мора, лежащие на одном диаметре, то центральный угол между их радиусами составляет 180º, а значит, фактический угол между площадками для этих точек равен 90º. Отсюда следует, что круг Мора можно построить по напряжениям, действующим по любой паре взаимно ортогональных площадок.

Для того, чтобы построить круг Мора по двум произвольным взаимно ортогональным площадкам, надо прежде всего нанести на координатную плоскость две точки, координаты которых равны заданным напряжениям на этих площадках. Если заданы напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, то координаты искомых точек будут равны: $M_x\left(\sigma_x, \tau_{xy}\right)$ и $M_y\left(\sigma_y, \tau_{yx}\right)$ (рис. 4.13). При этом $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$.

Затем надо соединить построенные точки отрезком прямой, который будет диаметром круга Мора. На пересечении диаметра с

осью σ получим центр круга Мора. Из полученного центра радиусом любой из точек на конце диаметра надо провести окружность, которая и даст требуемый круг Мора.

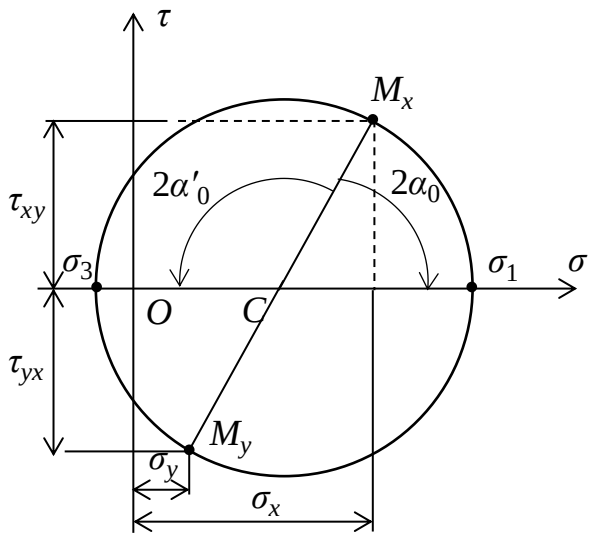


Рис. 4.13.

Построенный таким образом круг Мора можно использовать для определения главных напряжений и положения главных площадок. Точки, соответствующие главным напряжениям, получаются на пересечении круга Мора с осью нормальных напряжений. Чтобы получить величины главных напряжений, достаточно измерить отрезки от начала координат до полученных точек. Величина двойного угла наклона главных площадок получается измерением соответствующего угла от радиуса исходной площадки до радиуса главной площадки. Например, на рисунке 4.13 угол $2\alpha_0$ измеряется от радиуса точки M_x до радиуса точки σ_1. Полученный результат показывает, что нормаль к главной площадке с напряжением σ_1 отклоняется от исходной оси x на отрицательный угол α_0 (по ходу часовой стрелки, рис. 4.14). Нормаль к другой главной площадке поворачивается на положительный угол $\alpha'_0 = \alpha_0 + 90^\circ$, что на круге соответствует повороту радиуса точки M_x до радиуса точки σ_3 на угол $2\alpha'_0 = 2\alpha_0 + 180^\circ$.

Как видно из рисунка 4.14, одновременно с определением угла наклона главной площадки мы получаем то из двух главных напряжений, которое действует по этой площадке. Анализа знака второй производной от напряжения по углу поворота уже не требуется.

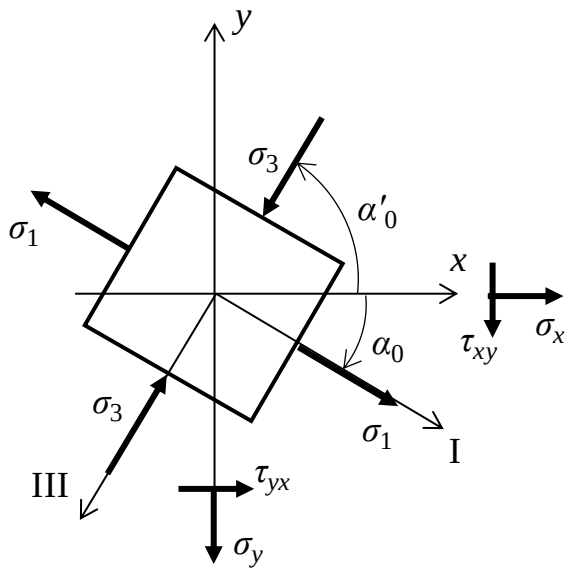


Рис. 4.14.

Максимальные касательные напряжения на круге Мора изображаются ординатой точки, лежащей на вертикальном диаметре круга (рис. 4.15). Абсцисса этой точки равна нормальному напряжению на соответствующей площадке. Прямой угол между радиусом точки главного напряжения и вертикальным радиусом изображает фактический угол 45º между главной площадкой и площадкой с $\tau_{\max}$ (рис. 4.15).

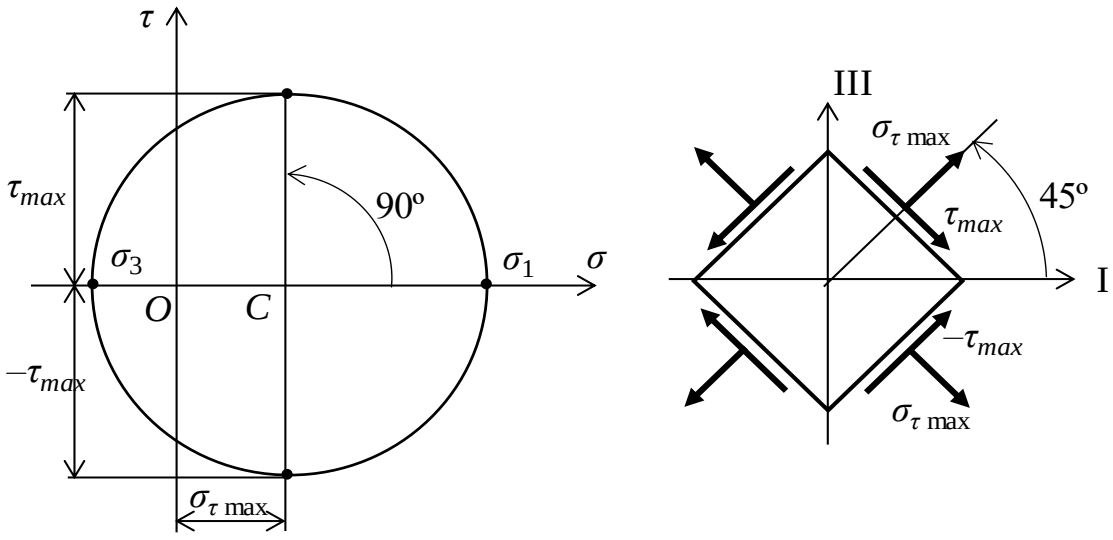


Рис. 4.15.

С помощью кругов Мора можно показать истинное положение главных площадок. Для этого используют так называемый полюс. Полюсом назовем точку пересечения нормалей к исходным площадкам, проведенных из точек на круге, соответствующих парам напряжений на исходных площадках.

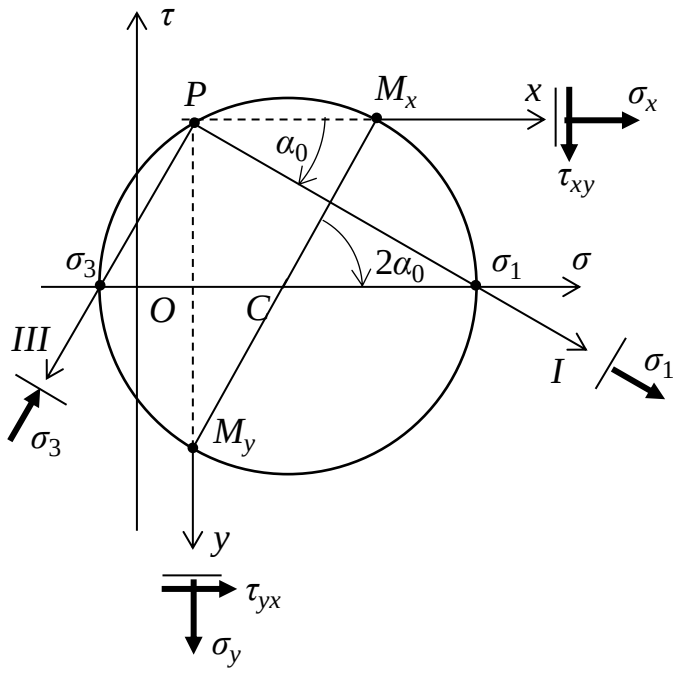


Рис. 4.16.

Пусть, например, круг Мора построен по точкам M_x и M_y (рис. 4.16). Проведем из точки M_x горизонтальную нормаль x к площадке, по которой действуют напряжения σ_x и τ_{xy}. Аналогично из точки M_y проведем вертикальную нормаль y к площадке с напряжениями σ_y и τ_{yx}. На пересечении этих двух нормалей находится полюс – точка P. Эта точка обязательно лежит на круге Мора, поскольку прямой угол между нормалями опирается на дугу диаметра, а значит, является вписанным.

Если теперь провести из полюса луч через точку круга с напряжением σ_1, то угол между осью x и этим лучом будет равен фактическому значению угла наклона главной площадки α_0. Это объясняется тем, что названный угол опирается на дугу $M_x\sigma_1$ с центральным углом $2\alpha_0$, поэтому равен половине центрального угла. Сам луч $P\sigma_1$ показывает направление главной оси *I*.

Аналогично можно показать направление главной оси *III*, которая проходит через полюс и точку круга с напряжением σ_3.

Для случая линейного напряженного состояния круги Мора строят так же, как и для плоского, но с учетом того, что одно из главных напряжений в плоскости равно нулю. В результате круги Мора

для растяжения и сжатия выглядят так, как показано на рис. 4.17 и 4.18:

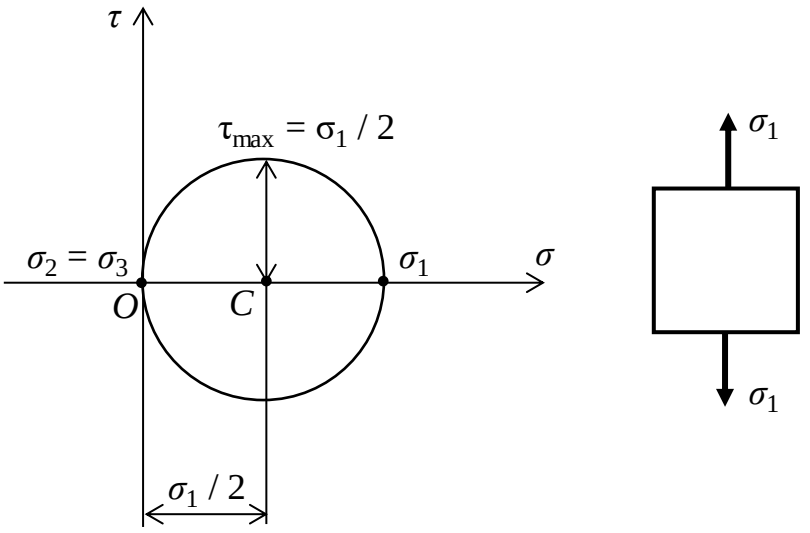


Рис. 4.17.

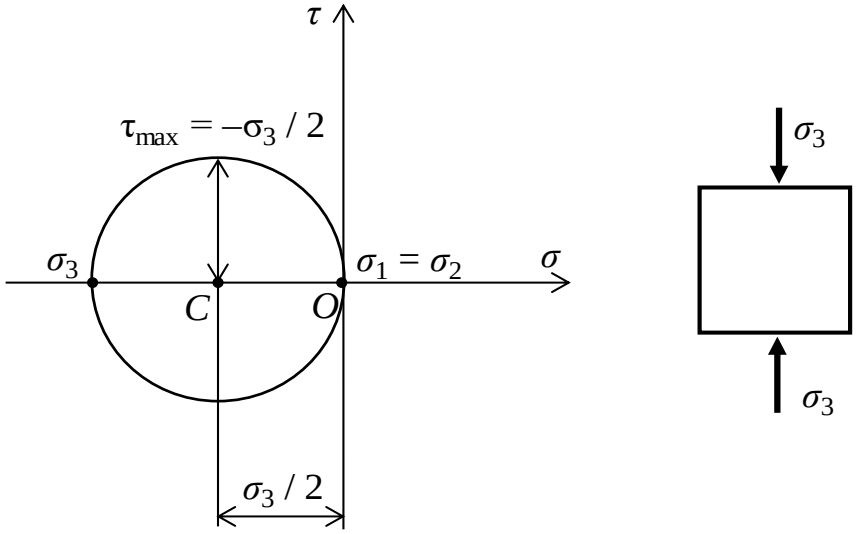


Рис. 4.18.

Объемное напряженное состояние изображается графически тремя кругами Мора, каждый из которых строится как для плоского напряженного состояния с двумя ненулевыми главными напряжениями: σ_1 и σ_2, σ_2 и σ_3, σ_1 и σ_3 (рис. 4.19). При повороте элемента вокруг одной из главных осей изменение напряжений по его граням отражает круг Мора, построенный по двум другим главным напряжениям. Если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей, то точки, соответствующие напряжениям по наклонным площадкам, находятся внутри области между окружностью внешнего круга и окружностями двух внутренних кругов.

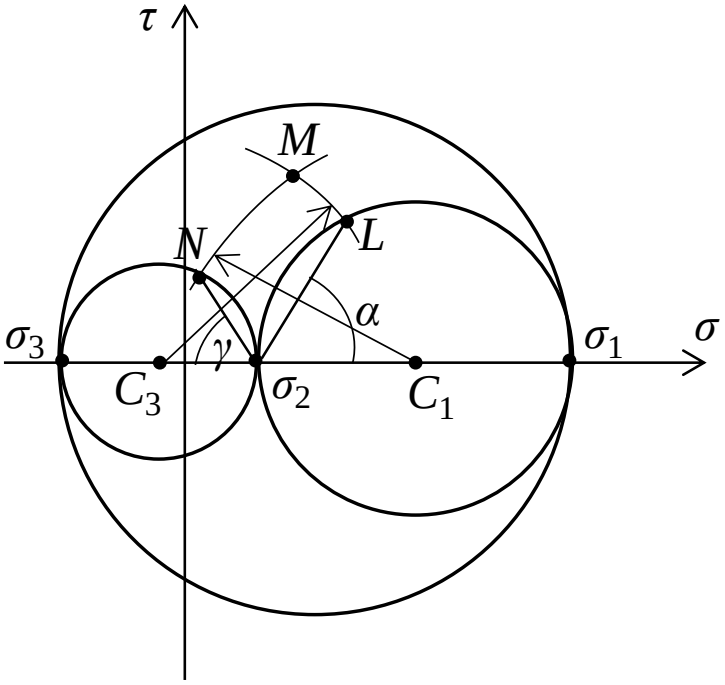


Рис. 4.19.

Чтобы найти положение точки, дающей напряжения по наклонной площадке, надо знать углы наклона нормали n к этой площадке по отношению к главным осям. Пусть эта нормаль составляет угол α с направлением оси *I* и угол γ с направлением оси *III*. Тогда из точки σ_2 на диаграмме под углом α к направлению $\sigma_2 \to \sigma_1$ и под углом γ к направлению $\sigma_2 \to \sigma_3$ проводим лучи, которые на пересечении с внутренними кругами дадут точки L и N.

Из центра круга C_1 проводим дугу радиусом C_1N, а из центра круга C_3 проводим дугу радиусом C_3L. На пересечении этих двух дуг и находится искомая точка M. Координаты этой точки будут напряжениями по наклонной площадке σ_n и τ_n.

Пример 4.2. (та же задача в Примере 4.1 была решена ранее аналитически). Даны компоненты плоского напряженного состояния: $\sigma_x = 60$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\tau_{xy} = -30$ МПа. Определить главные напряжения и положение главных площадок графически.

Решение (рис. 4.20).

На координатную плоскость наносим точки $M_x(60, -30)$ МПа, $M_y(-20, 30)$ МПа.

Проводим отрезок M_xM_y и находим центр круга Мора. Из центра радиусом CM_x проводим радиус круга.

На пересечении круга с осью абсцисс получаем точки главных напряжений. Измеряем отрезки и получаем их значения: $\sigma_1 = 70$ МПа, $\sigma_3 = -30$ МПа.

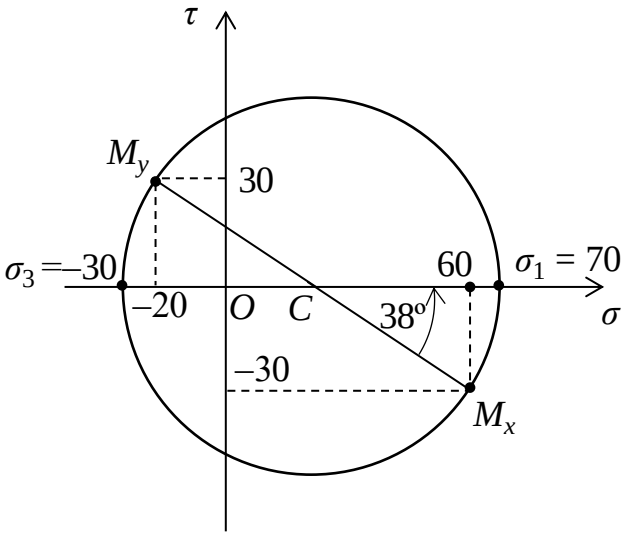


Рис. 4.20.

Измеряем транспортиром угол от радиуса CM_x до радиуса $C\sigma_1$. Направление этого угла следует против хода часовой стрелки; следовательно, знак его положительный.

$2\alpha_0 \approx 37^\circ$. Фактический угол равен $\alpha_0 \approx 18,5^\circ$.

Показываем полученное решение на чертеже (рис. 4.21).

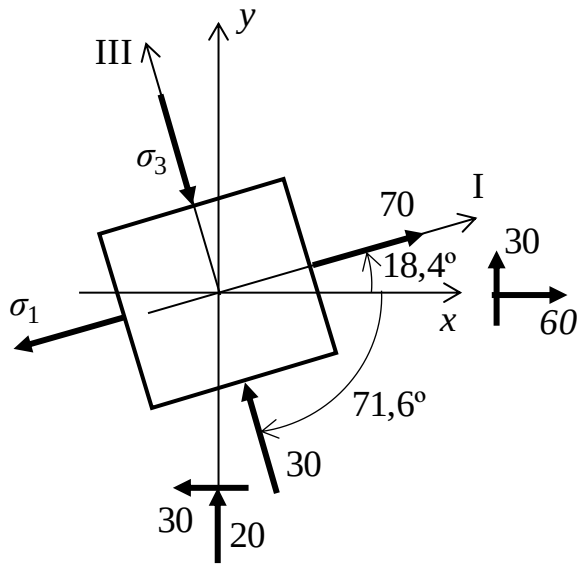


Рис. 4.21.

4.4. Объемное напряженное состояние

При объемном напряженном состоянии по взаимно ортогональным граням, расположенным произвольно, действуют нормальные и касательные напряжения. При этом у касательных напряжений на каждой грани есть 2 составляющие. С учетом закона парности касательных напряжений для каждой пары граней объемное напряженное состояние характеризуется шестью компонентами: нормальные напряжения σ_x, σ_y, σ_z и касательные напряжения τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}. Совокупность компонентов напряжений образует объект, называемый тензором напряжений (тензор второго ранга):

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \qquad (4.44)$$

Определение напряжений по произвольной наклонной площадке, отыскание главных напряжений и положения главных площадок при объемном напряженном состоянии изучаются в курсе теории упругости и здесь не рассматриваются. Напомним лишь, что при объемном напряженном состоянии можно выделить 3 взаимно ортогональные главные площадки, по которым действуют ненулевые главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3.

Рассмотрим в данной главе лишь вопросы, относящиеся к связи между напряжениями и деформациями, а также к определению потенциальной энергии упругой деформации.

4.4.1. Обобщенный закон Гука (прямая форма)

Для определения относительных линейных деформаций в направлении главных осей (ε_1, ε_2, ε_3) в общем случае объёмного напряжённого состояния используется принцип независимости действия сил. Представим объемное напряженное состояние как совокупность трех линейных состояний с главными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3 соответственно (рис. 4.22).

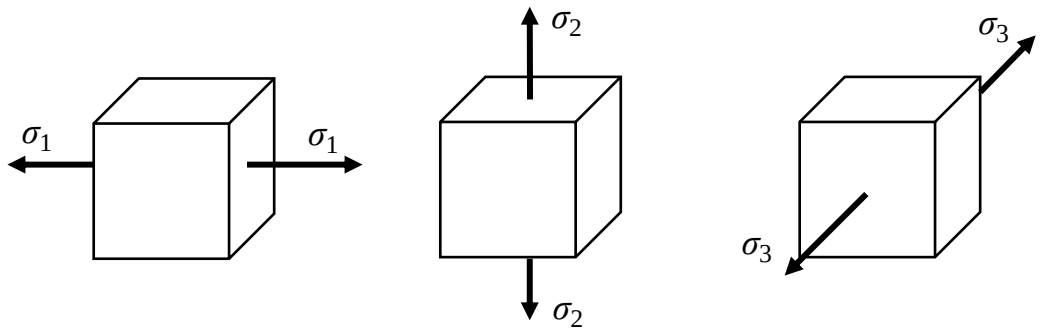


Рис. 4.22.

Линейная деформация от действия напряжения σ_1 в направлении этого же напряжения вычисляется по закону Гука при растяжении-сжатии:

$$\varepsilon_{1,1} = \frac{\sigma_1}{E}. \tag{4.45}$$

Напряжения σ_2 и σ_3 в том же направлении вызовут линейные деформации, определяемые по закону Пуассона:

$$\varepsilon_{1,2} = -\mu\frac{\sigma_2}{E};\ \varepsilon_{1,3} = -\mu\frac{\sigma_3}{E}. \tag{4.46}$$

Алгебраическая сумма всех трех линейных деформаций составит общую линейную деформацию в направлении σ_1:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E}. \tag{4.47}$$

После упрощений (4.47) получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]. \tag{4.48}$$

Рассуждая аналогично, получим величины линейных деформаций в направлении главных напряжений σ_2 и σ_3:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_3\right)\right]; \tag{4.49}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]. \tag{4.50}$$

Полученные формулы носят название ***обобщенного закона Гука*** для линейных деформаций.

В случае **плоского напряжённого состояния**, например, при $\sigma_3 = 0$ эти формулы примут вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\sigma_2\right);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\sigma_1\right);$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right). \qquad (4.51)$$

Если рассматривать элемент, ограниченный не главными, а произвольными взаимно ортогональными площадками, то линейные деформации в направлениях x, y и z будут зависеть только от нормальных напряжений σ_x, σ_y, σ_z. Касательные напряжения вызывают лишь деформации сдвига. Тогда относительные деформации ε_x, ε_y, ε_z можно вычислять по формулам, аналогичным формулам для главных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]. \qquad (4.52)$$

4.4.2. Относительное изменение объема

Рассмотрим малый объем тела в виде кубика с единичными размерами сторон. Первоначальный объем такого элемента равен $V_0 = 1$. После действия сил по граням элемента размеры сторон изменятся и станут равны $1+\varepsilon_x$, $1+\varepsilon_y$ и $1+\varepsilon_z$ (рис. 4.23). Объем элемента после деформации составит

$$V = \left(1+\varepsilon_x\right)\left(1+\varepsilon_y\right)\left(1+\varepsilon_z\right) = 1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z. \qquad (4.53)$$

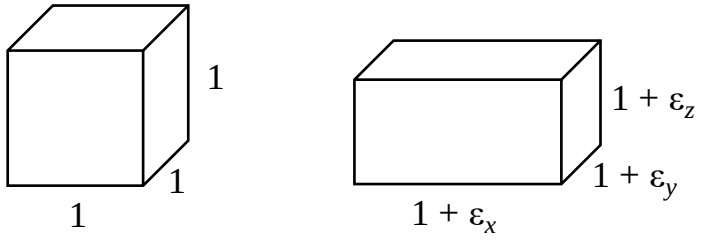


Рис. 4.23.

Поскольку произведения относительных деформаций имеют более высокий порядок малости по сравнению с самими малыми деформациями, будем пренебрегать этими произведениями. Тогда

$$V = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z . \qquad (4.54)$$

Вычислим относительное изменение объема элемента:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z - 1}{1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z . \qquad (4.55)$$

Таким образом, относительное изменение объема элемента равно сумме линейных деформаций в направлении его осей. Эта величина θ также называется ***объемной деформацией***:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z . \qquad (4.56)$$

Выразим объемную деформацию через компоненты нормальных напряжений. Для этого используем формулы обобщенного закона Гука (4.52):

$$\theta = \frac{1}{E}\Big[\sigma_x - \mu\big(\sigma_y + \sigma_z\big) + \sigma_y - \mu\big(\sigma_z + \sigma_x\big) + \sigma_z - \mu\big(\sigma_x + \sigma_y\big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{E}\Big[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\mu\big(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\big)\Big] = \frac{1 - 2\mu}{E}\big(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\big). \qquad (4.57)$$

Величина в скобках равна первому инварианту напряженного состояния, который обозначим через S. Тогда

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} S . \qquad (4.58)$$

Последняя формула представляет собой вторую форму обобщенного закона Гука. Из нее видно, что коэффициент Пуассона не может быть больше 0,5. В противном случае при всестороннем сжатии получается увеличение объема элемента (парадокс).

4.4.3. Обратная форма закона Гука.

Рассмотрим первую из формул обобщенного закона Гука для линейных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\Big[\sigma_x - \mu\big(\sigma_y + \sigma_z\big)\Big].$$

Добавим и вычтем внутри квадратной скобки выражение $\mu\sigma_x$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\Big[\sigma_x + \mu\sigma_x - \mu\big(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\big)\Big] = \frac{1}{E}\Big[\big(1 + \mu\big)\sigma_x - \mu S\Big].$$

Из полученного равенства выразим σ_x:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x + \frac{\mu}{1+\mu}\cdot\frac{E}{1-2\mu}\theta = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right). \quad (4.59)$$

Аналогично получаются еще две формулы:

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right) \text{ и } \sigma_z = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right). \quad (4.60)$$

Полученные формулы выражают компоненты напряжений через линейные деформации и объемную деформацию. Они представляют собой обратную форму закона Гука. Иногда эти зависимости выражают через так называемые коэффициенты Лямэ:

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta;$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta;$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta. \quad (4.61)$$

Здесь коэффициенты Лямэ имеют вид

$$2G = \frac{E}{1+\mu};\ \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \quad (4.62)$$

4.4.4. Потенциальная энергия деформации

Найдём ***удельную потенциальную энергию*** u, т.е. энергию, накопленную вследствие упругих деформаций единицей объёма материала при объёмном напряжённом состоянии. Для этого рассмотрим кубик со стороной, равной 1, находящийся под действием главных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3. При простом растяжении удельная потенциальная энергия деформации имеет известный вид:

$$u = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1. \quad (4.63)$$

Обобщая эту формулу на случай одновременного действия трёх главных напряжений, получим:

$$u = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right). \quad (4.64)$$

Подставим сюда выражения удлинений по закону Гука (4.52) и получим формулу для удельной потенциальной энергии через главные напряжения:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]. \quad (4.65)$$

Если грани кубика не являются главными площадками, и на них действуют нормальные и касательные напряжения, то выражение для удельной потенциальной энергии (4.64) будет иметь вид:

$$u = \frac{1}{2}\left[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right]. \qquad (4.66)$$

Здесь γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} – углы сдвига между указанными парами направлений.

Удельная потенциальная энергия деформации может быть разложена на две части: энергия изменения объема и энергия изменения формы элемента.

Введем в рассмотрение среднее нормальное напряжение

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{S}{3}. \qquad (4.67)$$

Пусть теперь по трем граням кубического элемента действуют одинаковые главные напряжения $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$. Совокупность их образует так называемый шаровой тензор.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \qquad (4.68)$$

Тогда по общей формуле (4.65) для удельной потенциальной энергии через главные напряжения имеем:

$$u_o = \frac{1}{2E}\left[3\sigma_0^2 - 2\mu\cdot 3\sigma_0^2\right] = \frac{3\sigma_0^2}{2E}(1-2\mu) = \frac{S^2}{6E}(1-2\mu). \qquad (4.69)$$

Действие одинаковых главных напряжений по граням элемента вызывает его всестороннее (гидростатическое) сжатие либо растяжение. При этом меняется только объем кубика, но не его форма. Поэтому последняя формула выражает собой удельную потенциальную энергию изменения объема:

$$u_o = \frac{S^2}{6E}(1-2\mu) = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{6E}(1-2\mu). \qquad (4.70)$$

Оставшаяся часть удельной потенциальной энергии деформации накапливается за счет изменения формы элемента. Чтобы получить эту величину, надо вычесть из полной энергии энергию изменения объема:

$$u_\phi = u - u_o. \qquad (4.71)$$

После подстановки выражений и преобразований получим удельную потенциальную энергию изменения формы:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]. \qquad (4.72)$$

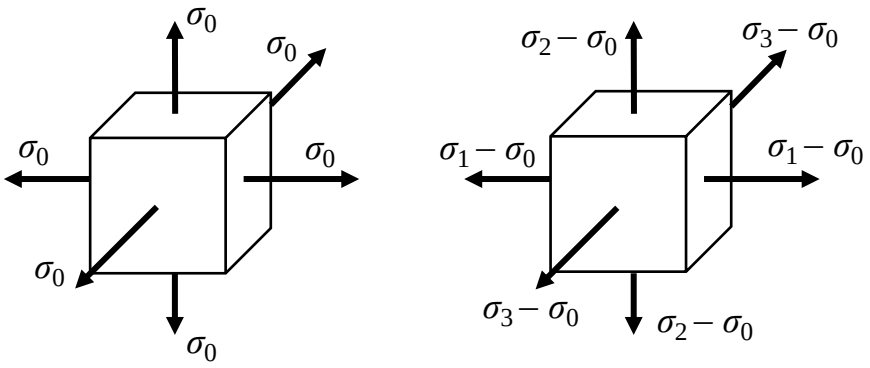
При изменении только формы элемента по его граням действуют главные напряжения, которые получаются вычитанием из исходных главных напряжений средних напряжений σ_0:

$$\sigma_1-\sigma_0,\ \sigma_2-\sigma_0 \text{ и } \sigma_3-\sigma_0. \qquad (4.73)$$

Их совокупность образует так называемый девиатор напряжений. Его действие вызывает изменение прямых углов между гранями произвольного элемента, то есть деформации сдвига, а также непропорциональное изменение размеров граней элемента. Объем элемента при этом не меняется.

$$D_\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1-\sigma_0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2-\sigma_0 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3-\sigma_0\end{pmatrix}. \qquad (4.74)$$

На рис. 4.24 показаны напряженные состояния, соответствующие шаровому тензору и девиатору напряжений.



Шаровой тензор Девиатор напряжений

Рис. 4.24.

4.5. Понятие о теориях (гипотезах) прочности

Целью инженерного расчёта является оценка прочности и жёсткости любого элемента конструкции в наиболее опасной точке его поперечного сечения. Для простых видов деформаций это решается довольно просто, так как имеются расчётные формулы для максимальных напряжений, которые сравнивают с опасными (предельными) для каждого материала.

Для сложного напряжённого состояния этот метод оценки прочности не годится, поскольку количество предельных соотношений значений нормальных и касательных напряжений может быть очень значительным.

Классические теории прочности стремятся установить критерии прочности для элементов конструкций, находящихся в сложном напряжённом состоянии. При этом это состояние сравнивают с линейным напряжённым состоянием (растяжение-сжатие). И фактическое напряжённое состояние заменяют **эквивалентным ему** (равноопасным) **линейным напряжённым состоянием** (рис. 4.25).

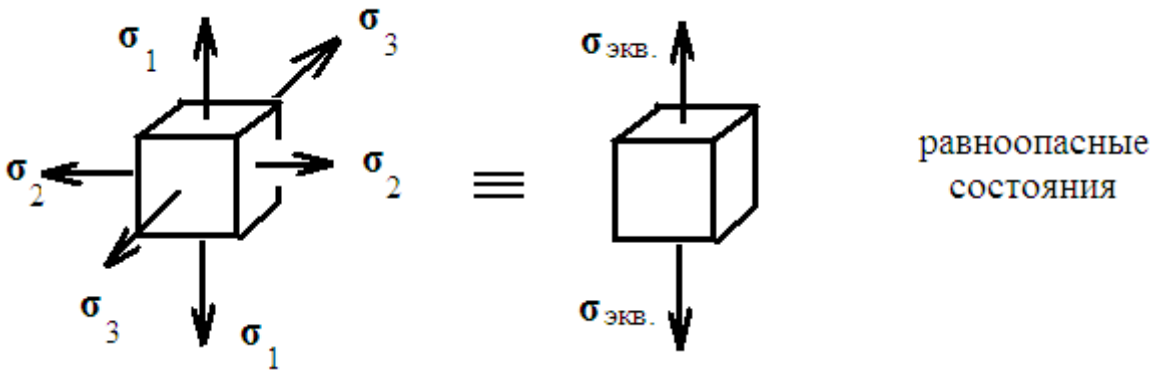


Рис. 4.25.

Любое напряжённое состояние характеризуется главными напряжениями σ_1, σ_2 и σ_3.

С использованием соответствующего критерия прочности условие наступления предельного состояния приобретает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) = \sigma_o, \qquad (4.75)$$

где σ_o – опасное напряжение, вызывающее предельное состояние в образце при линейном напряженном состоянии. Для пластичных материалов это предел текучести $\sigma_{\text{т}}$, для хрупких – временное сопротивление (предел прочности) $\sigma_{\text{в}}$ при растяжении (сжатии).

В соответствии с методом расчета по предельным состояниям в общем виде условие прочности можно записать так:

$$\sigma_{\text{экв}} = f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) \le R\gamma_c, \qquad (4.76)$$

где R – расчётное сопротивление материала при простом растяжении (сжатии), γ_c – коэффициент условий работы, который далее для простоты будем предполагать равным 1.

Предельным состоянием для пластичных материалов считается состояние, когда появляются остаточные (пластические деформации).

Для хрупких материалов предельное состояние наступает, когда материал находится на границе появления первых трещин, т.е. на границе нарушения целостности материала.

Исторически сформировалось несколько теорий (гипотез) прочности. В настоящее время **для пластичных материалов** используются: третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений) и четвертая теория (энергетическая теория прочности); **для хрупких** – пятая, так называемая теория прочности Мора – теория прочности предельных напряженных состояний.

Рассмотрим кратко содержание основных теорий прочности. Первая и вторая теории прочности предсказывают хрупкое разрушение материала (теории разрушения); третья и четвертая – пластическое течение (теории пластичности).

Первая теория прочности. Теория наибольших нормальных напряжений.

По этой гипотезе независимо от вида напряженного состояния ***хрупкое разрушение наступает вследствие достижения максимальными нормальными напряжениями предельного значения***.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\max} = \sigma_o . \qquad (4.77)$$

В случае максимальных растягивающих напряжений $\sigma_{\max} = \sigma_1$, $\sigma_o = \sigma_{\text{в}}^{p}$; при максимальных сжимающих напряжениях $\sigma_{\max} = |\sigma_3|$, $\sigma_o = \sigma_{\text{в}}^{c}$.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma_1 \le R_p \qquad (4.78)$$

при максимальных растягивающих напряжениях,

$$|\sigma_3| \le R_c \qquad (4.79)$$

при максимальных сжимающих напряжениях.

Эта теория (первая по времени возникновения) не имеет экспериментального подтверждения для пластичных материалов. Удовлетворительные результаты получены лишь для хрупких материалов при условии, что наибольшие напряжения – растягивающие. В настоящее время она не применяется.

Вторая теория прочности. Теория наибольших относительных удлинений.

Предложена Э. Мариоттом (1682 г).

Согласно этой гипотезе основной ***причиной разрушения материала является наибольшая относительная линейная деформация удлинения.*** Условие наступления предельного состояния имеет такой вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] = \varepsilon_o, \qquad (4.80)$$

где ε_1 – рассчитанное максимальное относительное удлинение в рассматриваемом напряженном состоянии;

ε_o – предельное значение относительного удлинения, полученное экспериментально при простом растяжении. При этом значении нормальное напряжение равно пределу прочности материала при растяжении $\sigma_{\text{в}}^{p}$. Тогда

$\varepsilon_o = \frac{\sigma_{\text{в}}^{p}}{E}$. После исключения модуля упругости получим условие разрушения в эквивалентных напряжениях:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) = \sigma_{\text{в}}^{p}. \qquad (4.81)$$

Условие прочности записывается через расчетное сопротивление (или допускаемое напряжение):

$$\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le R_p. \qquad (4.82)$$

Эта теория также не получила достаточного экспериментального подтверждения для разных напряженных состояний. Например, при гидростатическом сжатии появляются значительные деформации укорочения, что не приводит, однако, к разрушению. Поэтому в настоящее время она не применяется, хотя имела значение для оценки прочности хрупких материалов в прошлом.

Опасное сечение элемента (опасная площадка) согласно второй теории прочности – это площадка, перпендикулярная направлению максимальных удлинений, то есть перпендикулярная главной оси *I* (рис. 4.26).

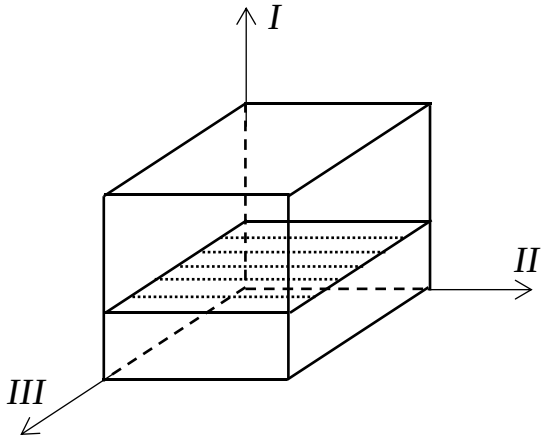


Рис. 4.26.

Третья теория прочности. Теория наибольших касательных напряжений.

Критерий прочности третьей теории впервые предложен Треска в 1868 г и развит в работах Сен-Венана. Он предполагает, что ***предельное состояние (текучесть) материала наступает, если максимальные касательные напряжения достигают опасного значения, соответствующего предельному состоянию данного материала при растяжении***.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_o = \frac{\sigma_o}{2} = \frac{\sigma_т}{2}. \qquad (4.83)$$

Здесь учтено, что при растяжении $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$.

Условие пластичности получается следующим:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_т. \qquad (4.84)$$

Условие прочности через эквивалентные напряжения принимает вид

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le R, \qquad (4.85)$$

где R – расчетное сопротивление материала по пределу текучести.

Эта теория прочности даёт хорошие результаты для пластичных материалов и не применима для хрупких. Ее недостатком является то, что не учитывается главное напряжение σ_2.

Поскольку критерием пластичности являются максимальные касательные напряжения, то и опасной площадкой в окрестности точки будет площадка с максимальными касательными напряжениями. Она, как известно, расположена под углом 45º к главным осям *I* и *III* (рис. 4.27).

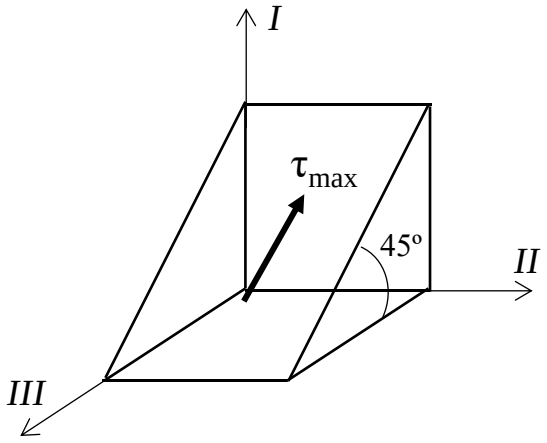


Рис. 4.27.

Четвёртая (энергетическая) теория прочности.

В этой теории критерием прочности (пластичности) считается предельное количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформируемым элементом.

Вначале причину наступления опасного состояния связывали с полной удельной потенциальной энергией деформации. Но результаты опытов показали, что при гидростатическом сжатии-растяжении, когда меняется только объем элемента, деформации остаются упругими даже при весьма высоких напряжениях. Это послужило основанием считать, что опасное состояние материала связано лишь с величиной удельной потенциальной энергии изменения формы. Таким образом возникла теория потенциальной энергии формоизменения, которую можно сформулировать так:

Предельное состояние материала наступает, если удельная потенциальная энергия формоизменения достигает предельного её значения для линейно-напряжённого элемента из того же материала.

$$u_ф = \frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_1-\sigma_3\right)^2\right] \le u_{фо} = \frac{1+\mu}{6E}\cdot 2\sigma_т^2. \tag{4.86}$$

Принимая, как и ранее, $\sigma_т = R$, получим условие прочности

$$\sigma_{экв} = \sqrt{0{,}5\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]} \le R. \tag{4.87}$$

Энергетическая теория прочности применяется для элементов конструкций из пластичных материалов. Она дает хорошие результаты для разных видов напряженного состояния и используется в расчетах наряду с 3 теорией.

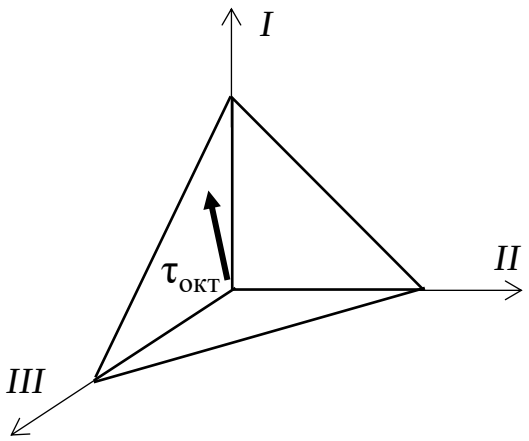


Рис. 4.28.

Четвертая теория прочности имеет и другую трактовку, связанную с так называемыми октаэдрическими касательными напряжениями. Это касательные напряжения, действующие по площадкам, одинаково наклоненным ко всем главным площадкам. Их величина равна

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,. \qquad (4.88)$$

Видно, что эта величина пропорциональна эквивалентным напряжениям, полученным на основании энергетического критерия. Поэтому на ее основе получается то же самое условие пластичности. Условие пластичности через октаэдрические касательные напряжения предложено Р. Мизесом в 1913 г., а в 1924 г. это же условие было обосновано через энергию формоизменения Г. Генки.

Опасной площадкой в окрестности элемента согласно 4 теории прочности считается площадка с октаэдрическими касательными напряжениями (рис. 4.28).

Пятая теория. Теория прочности Мора.

Эта теория не устанавливает единого критерия прочности для всех видов напряжённых состояний, в отличие от четырех классических теорий. Она основана на системе так называемых предельных кругов напряжений.

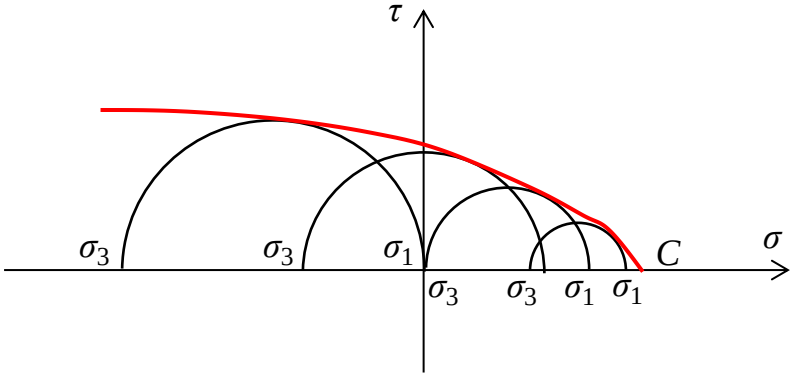


Рис. 4.29.

Если напряженное состояние является предельным для данного материала, то ему соответствует круг Мора, построенный по предельным значениям главных напряжений σ_1 и σ_3. Будем называть такой круг предельным кругом напряжений (кругом Мора).

Пусть проведено большое число испытаний при различных соотношениях главных напряжений, и для каждого из них установлено предельное состояние, описываемое своим предельным кругом

Мора. В результате получена совокупность предельных кругов напряжений (рис. 4.29).

Если теперь построить кривую, касающуюся всех предельных кругов (она называется огибающей), то каждая ее точка определяет для данного напряженного состояния нормальное и касательное напряжение, при котором наступает предельное состояние материала. Предполагается, что эта огибающая единственна.

Критерий предельного состояния в этом случае может быть сформулирован так:

Если большой круг Мора для данного напряженного состояния касается огибающей к предельным кругам, то это напряженное состояние является предельным.

Практическая реализация испытаний при разных напряженных состояниях часто сталкивается с затруднениями. В частности, не удается осуществить на опыте напряженное состояние, когда все три главных напряжения положительны. В том числе не удастся получить точку C на пересечении огибающей с осью абсцисс, которая соответствует всестороннему равномерному растяжению (круг Мора вырождается в точку).

Иными словами, практически не получается построение предельных кругов Мора, расположенных правее круга для простого растяжения. Поэтому ограничиваются минимумом испытаний при простых видах напряженного состояния: осевое растяжение и сжатие. По результатам этих испытаний строятся два предельных круга: для растяжения и для сжатия. Огибающая в этом случае превращается в прямую, касательную к обоим кругам Мора (рис. 4.30).

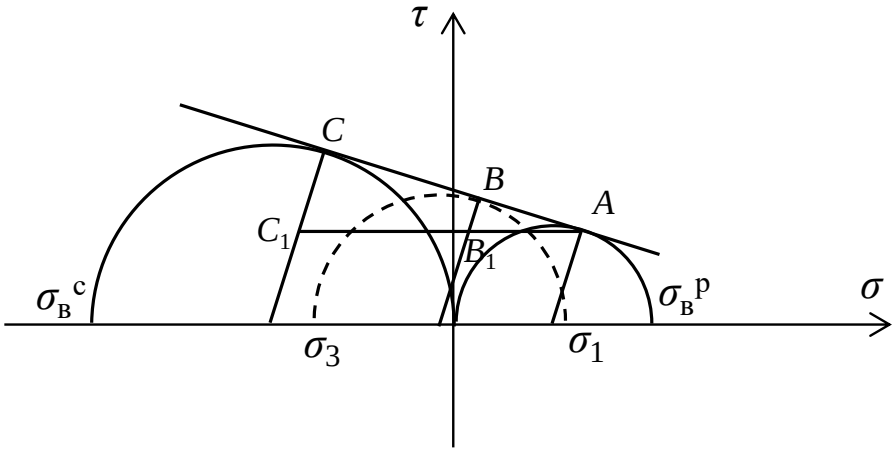


Рис. 4.30.

Для формулировки условия наступления предельного состояния при напряженном состоянии с напряжениями σ_1 и σ_3 надо

сопоставить его с равно-опасным линейным напряженным состоянием (простым растяжением).

На рисунке 4.30 показаны два предельных круга: для растяжения с диаметром, равным временному сопротивлению $\sigma_{\text{в}}^{p}$, и для сжатия с диаметром $\sigma_{\text{в}}^{c}$. Круг, показанный пунктиром, является предельным для заданного напряженного состояния с напряжениями σ_1 и σ_3.

Проведем из центров всех трех кругов радиусы в точки касания кругов с огибающей A, B и C. Эти радиусы будут перпендикулярны огибающей. Через точку A проведем горизонтальную прямую.

Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 следует, что

$$\frac{CC_1}{AC_1} = \frac{BB_1}{AB_1}. \tag{4.89}$$

Из рисунка видно, что

$$CC_1 = \frac{\sigma_{\text{в}}^{c} - \sigma_{\text{в}}^{p}}{2};\ BB_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_{\text{в}}^{p}}{2} = \frac{\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) - \sigma_{\text{в}}^{p}}{2}. \tag{4.90}$$

$$AC_1 = \frac{\sigma_{\text{в}}^{c} + \sigma_{\text{в}}^{p}}{2};\ AB_1 = \frac{\sigma_{\text{в}}^{p}}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\text{в}}^{p} - \left(\sigma_1 + \sigma_3\right)}{2}. \tag{4.91}$$

Подставим эти выражения в пропорцию (4.89):

$$\frac{\sigma_{\text{в}}^{c} - \sigma_{\text{в}}^{p}}{\sigma_{\text{в}}^{c} + \sigma_{\text{в}}^{p}} = \frac{\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) - \sigma_{\text{в}}^{p}}{\sigma_{\text{в}}^{p} - \left(\sigma_1 + \sigma_3\right)}. \tag{4.92}$$

После решения этой пропорции, приведения подобных членов и деления обеих частей равенства на $2\sigma_{\text{в}}^{c}$ получим следующее условие наступления предельного состояния:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{в}}^{p}}{\sigma_{\text{в}}^{c}}\sigma_3 = \sigma_{\text{в}}^{p}. \tag{4.93}$$

Этот простейший вариант теории имеет название вариант Кулона-Мора. Он предполагает использование двух пределов прочности материала – при растяжении и при сжатии. При любых видах напряженного состояния эквивалентные напряжения линейно зависят от главных напряжений σ_1 и σ_3 с коэффициентом пропорциональности, равным отношению двух пределов прочности:

$$k = \frac{\sigma_{\text{в}}^{p}}{\sigma_{\text{в}}^{c}} = \frac{R_{\text{р}}}{R_{\text{с}}}. \tag{4.95}$$

С учетом этого обозначения условие прочности по теории Мора приобретает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \le R_{\text{р}}, \qquad (4.96)$$

где

$R_{\text{р}}$ − расчетное сопротивление на растяжение;

$R_{\text{с}}$ − расчетное сопротивление на сжатие.

Если материал **пластичный** (имеет одинаковый предел текучести при растяжении и сжатии), то $k = 1$, и условие прочности будет иметь такой же вид, как и для третьей теории прочности.

Теорию прочности Мора применяют для расчётов элементов из **хрупких** материалов.

В заключение отметим, что в настоящее время в инженерных расчётах применяют: для пластичных материалов − третью или четвёртую теории прочности, для хрупких материалов − теорию прочности Мора.

Тема 5. Чистый сдвиг. Кручение

5.1. Чистый сдвиг

Чистым сдвигом называется плоское напряженное состояние, при котором по двум взаимно перпендикулярным площадкам действуют только касательные напряжения (рис. 5.1).

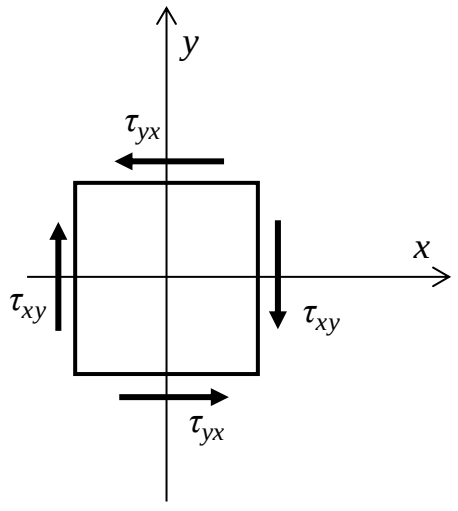


Рис. 5.1.

Обозначим эти касательные напряжения через $\tau_{xy} = \tau$. Определим главные напряжения при чистом сдвиге:

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\tau_{xy} = \pm\tau. \qquad (5.1)$$

$$\sigma_1 = \tau\,.\ \sigma_3 = -\tau\,.\ \sigma_2 = 0. \qquad (5.2)$$

Положение главных площадок:

$$\tan 2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\tau}{0} \to \infty\,.$$ Следовательно, $2\alpha = \pm 90^\circ;\ \alpha = \pm 45^\circ$

. (5.3)

Итак, при чистом сдвиге главные напряжения численно равны касательным напряжениям чистого сдвига. Главные площадки расположены под углом 45° к площадкам чистого сдвига (рис. 5.2). Следовательно, касательные напряжения τ — это максимальные касательные напряжения.

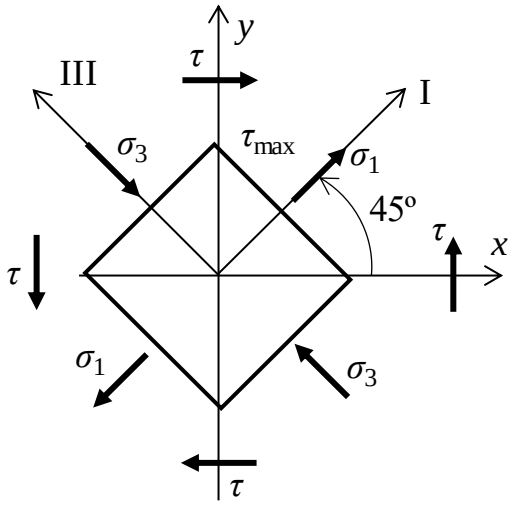


Рис. 5.2.

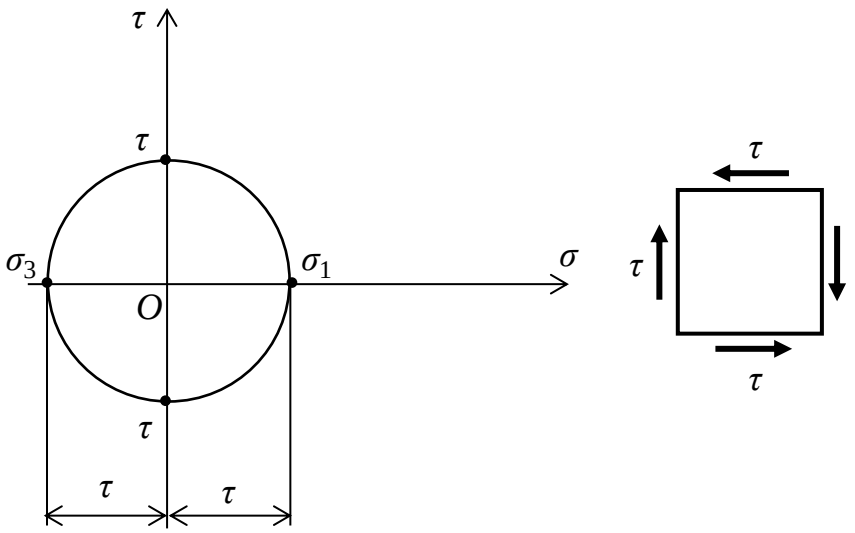


Рис. 5.3.

Круг Мора при чистом сдвиге получается симметричным относительно оси касательных напряжений, поскольку $\sigma_3 = -\sigma_1$ (рис. 5.3).

Определим относительные деформации при чистом сдвиге. По формулам обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\sigma_3\right) = \frac{1}{E}\left[\tau - \mu\left(-\tau\right)\right] = \frac{\left(1+\mu\right)\tau}{E}. \qquad (5.4)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \mu\sigma_1\right) = \frac{1}{E}\left[-\tau - \mu\tau\right] = -\frac{\left(1+\mu\right)\tau}{E}. \qquad (5.5)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_3\right) = -\frac{\mu}{E}\left(\tau - \tau\right) = 0. \qquad (5.6)$$

Объемная деформация:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{\left(1+\mu\right)}{E}\left(\tau - \tau\right) + 0 = 0. \qquad (5.7)$$

Иными словами, при чистом сдвиге отсутствует изменение объема элемента (объемная деформация равна нулю). Происходит лишь изменение формы элемента. Оно сводится к сдвигам между гранями элемента, которые вызваны действием касательных сил по этим граням.

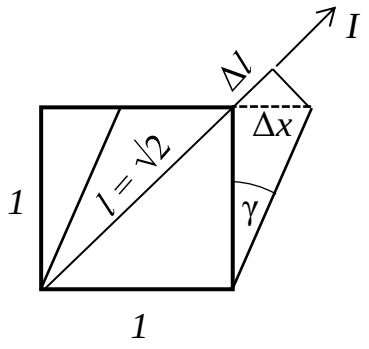


Рис. 5.4.

Установим связь между деформациями сдвига и продольной деформацией ε_1 вдоль диагонали элемента, ограниченного площадками с максимальными касательными напряжениями τ. Пусть размеры ребер кубика равны 1 (рис. 5.4). Величину абсолютного сдвига между параллельными гранями кубика обозначим Δx. Тогда относительный сдвиг равен отношению абсолютного сдвига к размеру грани, перпендикулярной сдвигу:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{1} = \Delta x. \qquad (5.8)$$

Длина диагонали грани кубика при единичных размерах ребер составляет $l = \sqrt{2}$. Абсолютное удлинение диагонали выражается через абсолютный сдвиг исходя из перемещения угловой точки грани при малых деформациях:

$$\Delta l = \frac{\Delta x}{\sqrt{2}}. \qquad (5.9)$$

Тогда относительная линейная деформация в направлении диагонали равна

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\Delta x}{2} = \frac{\gamma}{2}. \qquad (5.10)$$

Таким образом, главная относительная деформация ε_1 численно равна половине угла сдвига (относительного сдвига).

Получим теперь связь между касательными напряжениями и относительным сдвигом. Для этого используем выражение (5.4) для ε_1 через касательные напряжения τ и приравняем его к выражению (5.10) той же величины через относительный сдвиг γ:

$\frac{(1+\mu)\tau}{E} = \frac{\gamma}{2}$. Выразим отсюда касательные напряжения:

$$\tau = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma. \qquad (5.11)$$

Введем обозначение: $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$. Эта величина называется модулем сдвига и выражается через две другие упругие константы материала: модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ. Таким образом, для изотропного материала введены три упругие характеристики, из которых только две являются независимыми.

С учетом принятого обозначения для модуля сдвига, соотношение между касательными напряжениями и относительным сдвигом принимает вид

$$\tau = G\gamma. \qquad (5.12)$$

Это физическое соотношение называется законом Гука при чистом сдвиге. Оно выражает линейную зависимость между напряжениями и деформациями в случае этого напряженного состояния.

Получим теперь формулы для удельной потенциальной энергии деформации при чистом сдвиге.

Полная удельная потенциальная энергия:

$$u = \frac{1}{2}\tau\gamma, \tag{5.13}$$

или через главные напряжения:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3\right] = \frac{1}{2E}\left(\tau^2 + \tau^2 + 2\mu\tau^2\right) = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 = \frac{\tau^2}{2G}.$$

Этот же результат можно получить, подставив в первую формулу для энергии(5.13) величину $\gamma = \frac{\tau}{G}$.

Итак, удельная потенциальная энергия деформации при чистом сдвиге выражается формулой

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{5.14}$$

Поскольку при чистом сдвиге отсутствует изменение объема, то вся энергия деформации накапливается за счет изменения формы элемента:

$$u = u_\phi. \tag{5.15}$$

Условия прочности при чистом сдвиге по различным теориям прочности выглядят следующим образом.

Вторая теория прочности:

$$\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) = \tau - \mu\left(-\tau\right) = \left(1+\mu\right)\tau \le R_p.$$

Отсюда

$$\tau_{\max} \le \frac{R_p}{1+\mu}. \tag{5.16}$$

Третья теория прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau - \left(-\tau\right) = 2\tau \le R.$$

$$\tau_{\max} \le \frac{R}{2}. \tag{5.17}$$

Четвертая теория прочности:

$$\sqrt{0{,}5\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]} = \sqrt{0{,}5\left(\tau^2+\tau^2+4\tau^2\right)} =$$

$$= \sqrt{3}\tau \le R.$$

$$\tau_{\max} \le \frac{R}{\sqrt{3}}. \tag{5.18}$$

Теория прочности Мора:

$$\sigma_1 - k\sigma_3 = \tau - k\left(-\tau\right) = \left(1+k\right)\tau \le R_{\text{р}}.$$

$$\tau_{\max} \le \frac{R_p}{1+k}. \qquad (5.19)$$

Выражения, стоящие в правой части условий прочности, можно считать расчетными сопротивлениями материала на срез.

5.2. Расчеты на сдвиг (срез)

Рассмотрим деформацию сдвига на примере короткого стержня, для которого можно пренебречь деформацией изгиба (рис. 5.5).

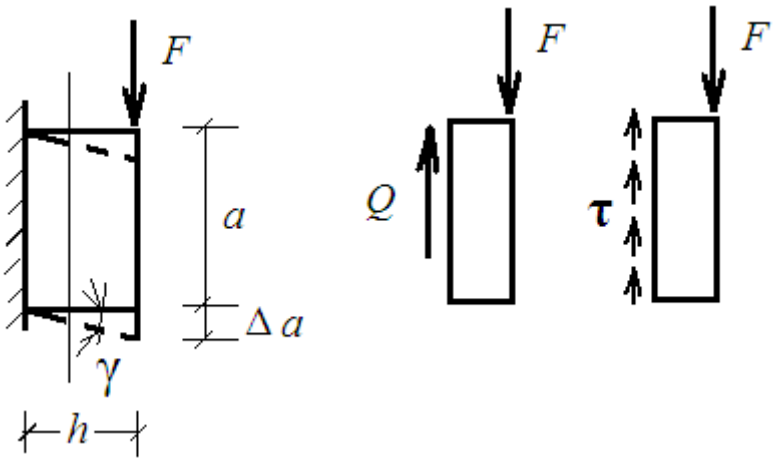


Рис. 5.5.

Под действием внешней нагрузки F в поперечном сечении возникает численно равная этой нагрузке поперечная сила Q. Интенсивность этой силы выражается касательными напряжениями τ.

Величина вертикального перемещения правого торца стержня относительно защемленного края представляет собой абсолютный сдвиг Δa.

Отношение $\frac{\Delta a}{h} = \tan\gamma$ – это относительный сдвиг.

Для упрощения расчётов на сдвиг предполагают, что касательные напряжения τ распределены по поперечному сечению равномерно. Тогда их величина определяется по формуле

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \qquad (5.20)$$

Практические расчёты на срез носят весьма условный характер и базируются на следующих допущениях:

в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, которые распределяются равномерно по сечению;

разрушение происходит сразу во всех соединительных элементах.

На сдвиг (срез) рассчитывают соединения отдельных элементов между собой, например, сварные, заклёпочные, болтовые соединения, а также составные балки на клеевых, шпоночных соединениях и т.д.

Условие прочности на срез в общем случае выглядит так:

$$\tau_{ср} = \frac{Q}{A_{ср}} \le R_s, \qquad (5.21)$$

где $A_{ср}$ – площадь поперечного сечения, работающая на срез;

R_s – расчетное сопротивление материала срезу.

При соединении элементов конструкций срезу иногда сопутствует смятие материала под соединительными элементами. **Смятие** – это местное сжатие (на ограниченной поверхности).

Условие прочности на смятие выглядит так:

$$\sigma_{см} = \frac{N}{A_{см}} \le R_{см}, \qquad (5.22)$$

где $A_{см}$ – площадь поперечного сечения, работающая на смятие,

$R_{см}$ – расчетное сопротивление материала смятию.

Для пластичных материалов $R_s \approx 0{,}56R$, $R_{см} \approx 2R$. Для хрупких материалов $R_s \approx 0{,}9R_c$.

5.3. Кручение стержней круглого сечения

5.3.1. Усилия при кручении стержня

Кручение – вид деформации, при которой в поперечных сечениях стержня возникает крутящий момент.

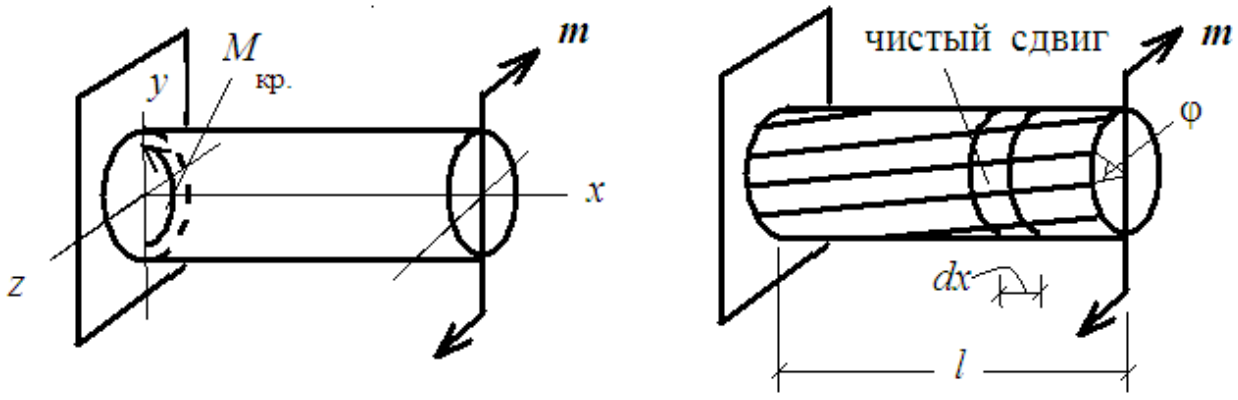


Рис. 5.6.

Нагрузка, вызывающая кручение стержня – это пара сил, действующая в плоскости поперечного сечения с моментом ***m***, который называется **скручивающим моментом** (рис. 5.6).

Применив метод сечений, можно определить, что эта нагрузка вызывает в поперечных сечениях внутреннюю пару, которая называется **крутящим моментом** $M_{кр}$ (усилие при кручении).

По аналогии с построением эпюры продольных сил нетрудно построить и эпюру крутящих моментов (рис. 5.7).

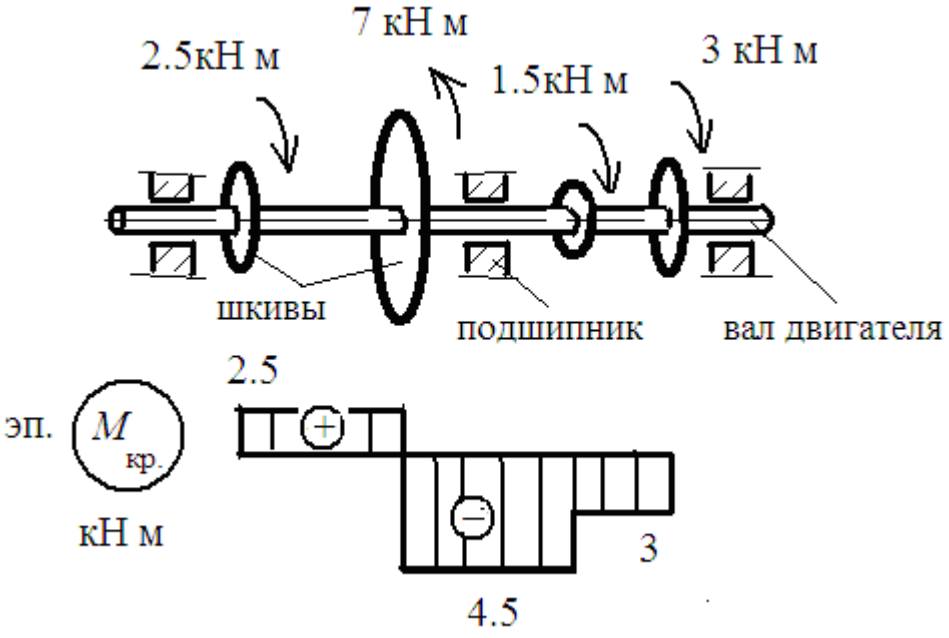


Рис. 5.7.

Крутящий момент численно равен алгебраической сумме скручивающих моментов, действующих на стержень по одну сторону от рассматриваемого сечения.

При этом знаки крутящих моментов принимаются условно. Например, условимся, что при направлении взгляда вдоль оси стержня, **положительным** будет направление $M_{кр}$ **по часовой стрелке.** Тогда эпюра $M_{кр}$ будет выглядеть, как показано на рисунке.

5.3.2. Напряжения и деформации при кручении стержней круглого сечения

Нетрудно заметить, что каждое сечение стержня при кручении совершает поворот вокруг оси стержня. Угол φ, на который поворачивается вокруг оси одно сечение относительно другого, называется

углом закручивания. Его величина пропорциональна расстоянию между сечениями.

Опыт показывает, что при деформации кручения круглого стержня ось стержня остаётся прямой, а торцевое сечение − плоским, радиусы на торцевом сечении остаются прямыми (рис. 5.6). Окружности, нанесённые на поверхности стержня до деформации, не изменяются после деформации. Из этих наблюдений можно сделать вывод, что произвольное поперечное сечение стержня остается плоским и не деформируется.

Квадраты на поверхности стержня между образующими прямыми и направляющими окружностями, расположенными на малых расстояниях друг от друга, после кручения, становятся ромбами (рис. 5.6). Соответственно, первоначально прямые углы между двумя направлениями изменяют свою величину, а линейные размеры малого элемента остаются постоянными.

На основании сказанного можно предположить, что каждый элемент на поверхности и внутри стержня испытывает **чистый сдвиг** и, следовательно, в поперечных сечениях стержня возникают только касательные напряжения. Направление этих касательных напряжений перпендикулярно радиусам точек, в которых они действуют.

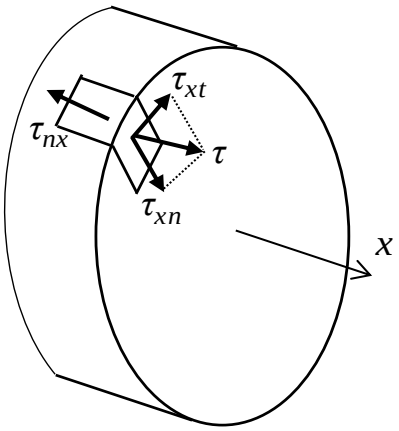


Рис. 5.8.

Рассмотрим точку, расположенную на контуре сечения, на границе с боковой поверхностью стержня. Пусть на грани элемента в плоскости сечения действуют напряжения τ, направление которых произвольно (рис. 5.8). Разложим это напряжение на составляющие τ_{xt}, направленное по касательной к контуру, и τ_{xn}, направленное по нормали к контуру (вдоль радиуса). На грани элемента, расположенной на боковой поверхности стержня, согласно закону парности

должны действовать касательные напряжения $\tau_{nx} = -\tau_{xn}$. Но, поскольку на боковой поверхности стержня отсутствуют нагрузки, эти напряжения равны 0. Значит, равны нулю и напряжения τ_{xn}:

$$\tau_{xn} = -\tau_{nx} = 0.$$

Следовательно, действовать будет только составляющая τ_{xt}, направленная по касательной к контуру: $\tau = \tau_{xt}$. Тем самым, доказано, что касательные напряжения в точках контура сечения направлены по касательной к контуру. Для круглого сечения это означает, что касательные напряжения перпендикулярны радиусам точек.

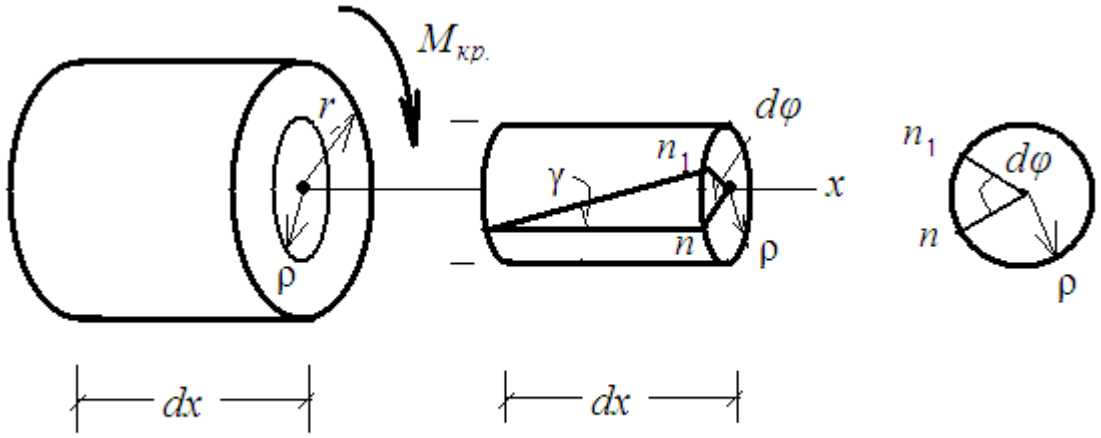


Рис. 5.9.

Для определения касательных напряжений применим метод сечений. Из круглого стержня вырежем элемент радиусом r и длиной dx. Из этого элемента вырежем внутренний элемент с произвольным радиусом ρ (рис. 5.9).

При кручении элемента длиной dx величина nn_1 представляет собой абсолютный сдвиг между двумя его крайними сечениями. Относительный сдвиг определяется по формуле

$$\gamma = \frac{nn_1}{dx}. \qquad (5.23)$$

Если обозначить весьма малую разность углов закручивания на длине dx через $d\varphi$, то $nn_1 = \rho d\varphi$, и выражение для относительного сдвига примет вид:

$$\gamma = \frac{nn_1}{dx} = \frac{\rho d\varphi}{dx} = \rho\varphi'. \qquad (5.24)$$

Касательные напряжения вычислим, используя закон Гука при чистом сдвиге:

$$\tau = G\gamma = G\rho\varphi'. \qquad (5.25)$$

Величина элементарной внутренней касательной силы в произвольной точке сечения равна τdA.

Момент этой силы относительно оси стержня равен

$$dM = \tau dA \cdot \rho \qquad (5.26)$$

Полный момент внутренних касательных сил относительно оси стержня получим интегрированием (5.26):

$$M_{\text{кр}} = \int_A dM = \int_A \tau\rho dA. \qquad (5.27)$$

Подставив в (5.27) выражение для касательных напряжений, получим

$$M_{\text{кр}} = \int_A G\rho\varphi'\rho dA = G\varphi' \int_A \rho^2 dA. \qquad (5.28)$$

Интеграл $\int_A \rho^2 dA = I_p$ представляет собой полярный момент инерции сечения. Тогда

$$M_{\text{кр}} = G\varphi' I_p = GI_p\varphi'. \qquad (5.29)$$

Выразим отсюда угол закручивания на единицу длины стержня (погонный угол закручивания):

$$\varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p}, \qquad (5.30)$$

где произведение GI_p называется жесткостью сечения при кручении (крутильной жесткостью).

Полный угол закручивания на длине стержня l будет равен:

$$\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \varphi' dx = \int_0^l \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} dx = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \int_0^l dx = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_p}. \qquad (5.31)$$

В общем случае действия на стержень системы скручивающих пар угол закручивания на участке стержня длиною l с постоянным крутящим моментом определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_p}. \qquad (5.32)$$

Из полученной формулы следует, что величина угла закручивания прямо пропорциональна крутящему моменту и длине стержня

(участка стержня) и обратно пропорциональна крутильной жёсткости сечения.

Величина угла закручивания измеряется в радианах. Чтобы получить φ в градусах, надо применить формулу

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_{кр} l}{G I_p}, \text{ град.} \qquad (5.33)$$

Подставив в выражение (5.25) значение погонного угла закручивания (5.30), получим формулу для определения касательных напряжений в произвольной точке K на расстоянии ρ от оси стержня:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{I_p} \rho. \qquad (5.34)$$

Так как величина $\frac{M_{кр}}{I_p}$ постоянна для данного сечения, то можно сделать вывод о том, что касательные напряжения прямо пропорциональны расстоянию ρ точки от оси стержня, и построить эпюру касательных напряжений (рис. 5.10).

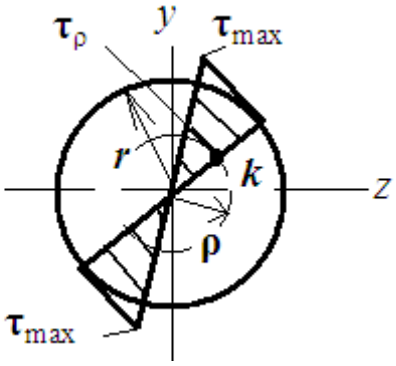


Рис. 5.10.

Максимальные напряжения будут действовать в точках на контуре сечения, где $\rho = r$:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{I_p} r = \frac{M_{кр}}{W_p}. \qquad (5.35)$$

Учитывая, что $\frac{I_p}{r} = W_p$ является полярным моментом сопротивления круглого сечения, формула (5.35) записывается в виде

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_p}. \qquad (5.36)$$

При выводе формул для касательных напряжений и угла закручивания при кручении были использованы три соотношения различной природы: условие совместности деформаций (5.24) – это связь между относительным сдвигом и погонным углом закручивания; при записи соотношения (5.25) между касательными напряжениями и углом сдвига использован закон Гука, а связь между усилиями (крутящим моментом) и касательными напряжениями (5.27) представляет собой уравнение равновесия в интегральной форме. Таким образом получено решение статически неопределимой задачи о распределении касательных напряжений по плоскости сечения.

5.3.3. Кручение стержней кольцевого сечения

При кручении стержней кольцевого сечения остаются справедливыми все выкладки, сделанные для кручения стержней круглого сечения. Разница состоит в геометрических характеристиках этих двух сечений.

В формуле для касательных напряжений (5.34)

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{I_p}\rho$$

величина полярного момента инерции определяется по формуле

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right), \qquad (5.37)$$

где $\alpha = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}$ – отношение внутреннего радиуса (диаметра) кольца к его внешнему радиусу (диаметру).

Касательные напряжения при этом вычисляются только в пределах толщины кольца (от r до R). Максимальные касательные напряжения равны

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_p}R = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p}, \qquad (5.38)$$

где $W_p = \frac{\pi R^3}{2}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{\pi D^3}{16}\left(1-\alpha^4\right).$ (5.39)

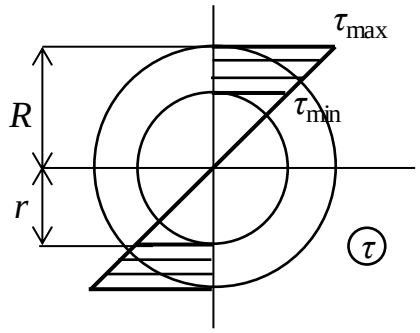


Рис. 5.11.

Минимальные напряжения в точках на контуре внутреннего радиуса составляют

$$\tau_{\min} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_p} r = \frac{M_{\text{кр}}}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \alpha \tau_{\max}. \qquad (5.40)$$

Эпюра касательных напряжений в кольцевом сечении показана на рисунке 5.11.

Если кольцо имеет малую толщину по сравнению с диаметром, то касательные напряжения можно условно считать равномерно распределенными по толщине кольца δ (рис. 5.12), а полярный момент инерции рассчитывать по приближенной формуле

$$I_p \approx \int_0^{2\pi} \delta R d\varphi \cdot R^2 = R^3 \delta \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R^3 \delta. \qquad (5.41)$$

Касательные напряжения будут равны

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_p} R = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi R^3 \delta} R = \frac{M_{\text{кр}}}{2\pi R^2 \delta}. \qquad (5.42)$$

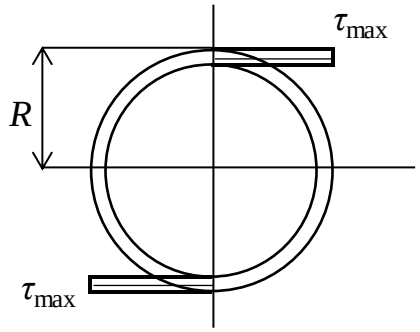


Рис. 5.12.

5.3.4. Условие прочности и жёсткости при кручении

Поскольку при кручении в опасных точках сечения возникает чистый сдвиг, то и условие прочности составляется для этого вида напряженного состояния. Условие прочности при чистом сдвиге состоит в сравнении максимальных касательных напряжений с расчетным сопротивлением срезу:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \le R_s . \qquad (5.43)$$

Расчетное сопротивление срезу может быть принято по расчетным нормам исходя из результатов испытаний. Оно также может быть принято по соответствующей материалу теории прочности на основе известного расчетного сопротивления растяжению.

Величины расчетных сопротивлений срезу по различным теориям прочности выглядят так:

$$R_s^{II} = \frac{R_p}{1+\mu};\ R_s^{III} = \frac{R}{2};\ R_s^{IV} = \frac{R}{\sqrt{3}};\ R_s^{M} = \frac{R_p}{1+k}. \qquad (5.44)$$

Первые три значения получены по 2, 3 и 4 теориям прочности соответственно, четвертое – по теории Мора.

Условие жёсткости ограничивает величину погонного угла закручивания:

$$\varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \le \left[\varphi'\right], \qquad (5.45)$$

где $\left[\varphi'\right]$ − допускаемый погонный угол закручивания, задаваемый техническими условиями (нормами).

Полярный момент инерции и полярный момент сопротивления принимаются в зависимости от типа сечения: круглое или кольцевое.

При расчётах на прочность и жесткость при кручении рассматривается три типа задач:

1. Проверка прочности или жёсткости,
2. Определение несущей способности,
3. Проектный расчёт (подбор сечения).

При проверке прочности проверяется исходное условие простой подстановкой всех значений.

При определении несущей способности вычисляется максимальный крутящий момент по двум условиям:

$$M_{\text{кр}} \le R_s W_p;\ M_{\text{кр}} \le GI_p\left[\varphi'\right]. \qquad (5.46)$$

Из двух результатов принимают наименьшее значение.

При подборе сечения определяют требуемые величины полярных момента сопротивления и момента инерции:

$$W_p \geq \frac{M_{кр}}{R_s};\ I_p \geq \frac{M_{кр}}{G[\varphi']}. \qquad (5.47)$$

Затем определяют радиус (диаметр) вала из двух условий. Например, для круглого сечения:

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2W_p}{\pi}};\ R \geq \sqrt[4]{\frac{2I_p}{\pi}}. \qquad (5.48)$$

Для кольца:

$$R \geq \sqrt[3]{\frac{2W_p}{\pi\left(1-\alpha^4\right)}};\ R \geq \sqrt[4]{\frac{2I_p}{\pi\left(1-\alpha^4\right)}}. \qquad (5.49)$$

Из полученный результатов принимают наибольший.

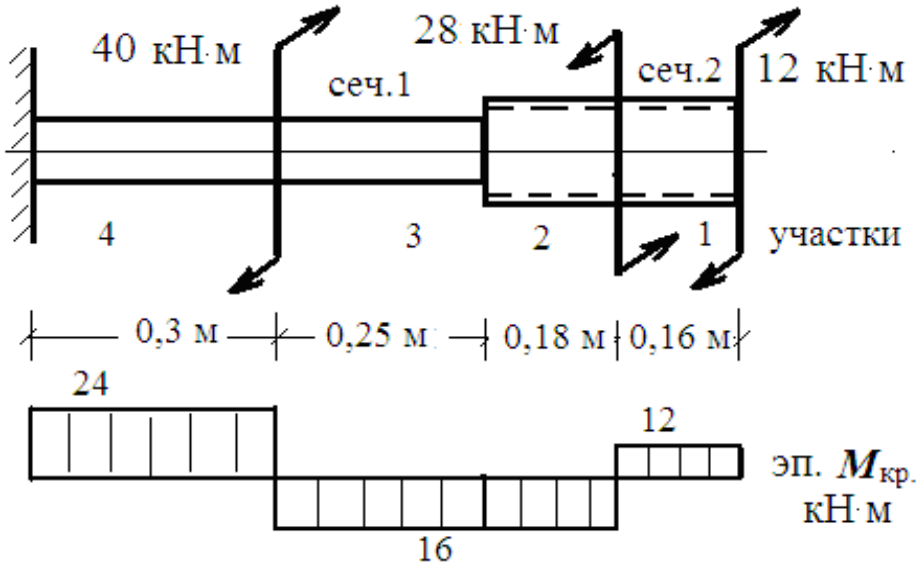
Для вала круглого сечения диаметр вала из условия прочности можно подобрать сразу через крутящий момент и расчетное сопротивление срезу следующим образом:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{кр}}{\pi R_s}} = 1{,}72\sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{R_s}}, \qquad (5.50)$$

а из условия жесткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{кр}}{\pi G[\theta']}} = 1{,}79\sqrt[4]{\frac{M_{кр}}{G[\theta']}}. \qquad (5.51)$$

Пример 5.1.



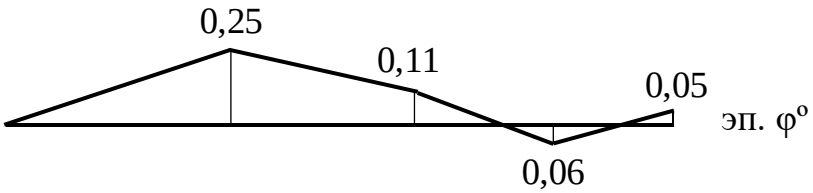


Рис. 5.13.

Стальной стержень (вал) переменного поперечного сечения работает на кручение (рис. 5.13). Подобрать из условий прочности и жесткости поперечное сечение обеих частей вала: сеч.1 – круглое сплошное сечение диаметром *d*; сеч.2 – кольцевое сечение с соотношением диаметров $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}8$. Допустимый погонный угол закручивания $[\varphi'] = 1{,}7$ град/м. Построить эпюру углов закручивания. Расчётное сопротивление стали срезу: $R_s = 80$ МПа, модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение

1. Определяем величину крутящего момента на каждом участке вала. Строим эпюру крутящих моментов.

2. Определяем «опасное сечение» для каждого вида поперечного сечения:

для сеч.1: $M_{\text{кр}}^{\max} = 24$ кНм = 2400 кНсм,

для сеч.2: $M_{\text{кр}}^{\max} = 16$ кНм = 1600 кНсм.

3. Подбор сечения 1 сплошного вала (круглое сечение).

3.1. Условие прочности: $\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} \le R_s$.

Определяем необходимую величину полярного момента сопротивления: $W_p \ge \frac{M_{\text{кр}}}{R_s} = \frac{2400}{8} = 300$ см^3.

Определяем необходимый диаметр сплошного вала из условия прочности:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16};\ d \ge \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300}{3{,}14}} = 11{,}5 \text{ см}.$$

3.2. Условие жесткости:

$$\varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \le [\varphi'], \text{ где } [\varphi'] = 1,7 \cdot \frac{3,14}{180} = 0,05 \text{ рад/м.}$$

Определяем необходимую величину полярного момента инерции:

$$I_p \ge \frac{M_{\text{кр}}}{G[\varphi']} = \frac{2400}{8 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 10^{-2}} = 600 \text{ см}^4.$$

Определяем необходимый диаметр сплошного вала из условия жесткости:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32};\ d \ge \sqrt[4]{\frac{32 I_p}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 600}{3,14}} = 8,84 \text{ см.}$$

Из двух результатов расчета выбираем максимальный диаметр 11,5 см (по прочности) и округляем его до 12 см. Вычисляем фактический полярный момент инерции:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 12^4}{32} = 2035 \text{ см.}$$

4. Подбор сечения 2 полого вала (кольцевое сечение).

4.1. Условие прочности.

Определяем необходимую величину полярного момента сопротивления: $W_p \ge \frac{M_{\text{кр}}}{R_s} = \frac{1600}{8} = 200 \text{ см}^3$.

Определяем наружный диаметр полого вала:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \alpha^4\right).\ D \ge \sqrt[3]{\frac{16 W_p}{\pi\left(1 - \alpha^4\right)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200}{3,14 \cdot \left(1 - 0,8^4\right)}} = 12,0 \text{ см.}$$

Внутренний диаметр $d = 0,8D = 0,8 \cdot 12 = 9,6$ см.

4.2. Условие жесткости:

Определяем необходимую величину полярного момента инерции:

$$I_p \ge \frac{M_{\text{кр}}}{G[\varphi']} = \frac{1600}{8 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 10^{-2}} = 400 \text{ см}^4.$$

Определяем наружный диаметр полого вала из условия жесткости:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right).\ D \ge \sqrt[4]{\frac{32 I_p}{\pi\left(1 - \alpha^4\right)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 400}{3,14 \cdot \left(1 - 0,8^4\right)}} = 9,11 \text{ см.}$$

Из двух результатов расчета выбираем максимальный диаметр 12,0 см (по прочности). Вычисляем фактический полярный момент инерции:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1-\alpha^4\right) = \frac{3{,}14\cdot 12^4}{32}\cdot\left(1-0{,}8^4\right) = 1201 \text{ см}^4.$$

5. Построение эпюры углов закручивания.

Определяем угол закручивания стержня на каждом участке по формуле $\varphi = \dfrac{M_{\text{кр}} l}{GI_p}$.

$$\varphi_1 = \frac{12\cdot 0{,}16}{8\cdot 10^7\cdot 1201\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3{,}14} = 0{,}11^\circ;$$

$$\varphi_2 = \frac{-16\cdot 0{,}18}{8\cdot 10^7\cdot 1201\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3{,}14} = -0{,}17^\circ;$$

$$\varphi_3 = \frac{-16\cdot 0{,}25}{8\cdot 10^7\cdot 2035\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3{,}14} = -0{,}14^\circ;$$

$$\varphi_4 = \frac{24\cdot 0{,}3}{8\cdot 10^7\cdot 2035\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3{,}14} = 0{,}25^\circ.$$

Строим эпюру изменения угла закручивания по оси стержня. Для этого определяем значения угла закручивания на границах участков. Построение эпюры начинаем с заделанного конца:

$$\varphi_4 + \varphi_3 = 0{,}25 - 0{,}14 = 0{,}11^\circ.$$

$$\varphi_4 + \varphi_3 + \varphi_2 = 0{,}11 - 0{,}17 = -0{,}06^\circ.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -0{,}06 + 0{,}11 = 0{,}05^\circ.$$

5.3.5. Потенциальная энергия деформации при кручении

Рассмотрим отрезок стержня круглого сечения длиной dx, в пределах которого крутящий момент равен $M_{\text{кр}}$. Этот момент на длине отрезка вызвал поворот поперечного сечения на угол $d\varphi$. Крутящий момент при нагружении статически возрастает от 0 до конечного значения прямо пропорционально углу закручивания. Тогда, аналогично случаю растяжения-сжатия, работа момента на вызванном им угловом перемещении равна

$$dA = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} d\varphi. \qquad (5.52)$$

Потенциальная энергия, накопленная элементом при упругих деформациях, численно равна работе крутящего момента:

$$dU = dA = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} d\varphi . \qquad (5.53)$$

Сделаем замену угла закручивания его выражением через крутящий момент:

$$d\varphi = \frac{M_{\text{кр}} dx}{GI_p} \qquad (5.54)$$

и подставим это выражение в формулу (5.53) для потенциальной энергии элемента:

$$dU = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} \frac{M_{\text{кр}} dx}{GI_p} = \frac{1}{2} \frac{M_{\text{кр}}^2 dx}{GI_p} . \qquad (5.55)$$

Полную энергию получим интегрированием по всей длине стержня или его участка, где определена зависимость для крутящего момента от координаты оси.

$$U = \int_0^l dU = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_{\text{кр}}^2}{GI_p} dx . \qquad (5.56)$$

Если, в частности, крутящий момент постоянен на участке, то интеграл энергии превращается в алгебраическую формулу

$$U = \frac{M_{\text{кр}}^2 l}{2GI_p} . \qquad (5.57)$$

5.4. Кручение стержней некруглого сечения

5.4.1. Кручение стержней прямоугольного сечения

Определение напряжений при кручении в стержнях с некруглым поперечным сечением – довольно сложная задача, которая не может быть решена обычными методами сопротивления материалов. Так, прямоугольные сечения, в отличие от круглых, при кручении не остаются плоскими. Точки этих сечений получают перемещения вдоль оси стержня, которые называются депланациями. Плоскость сечения при этом превращается в криволинейную поверхность (депланирует, рис 5.14).

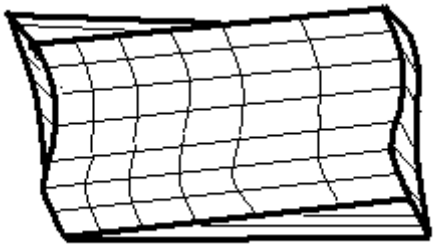


Рис. 5.14.

В результате закон распределения касательных напряжений по сечению является более сложным, чем для стержней круглого сечения. Решение для касательных напряжений было получено методами теории упругости.

В точках контура поперечных сечений касательные напряжения τ направлены по касательной к дуге контура. Это было доказано для стержней круглого сечения и справедливо для других типов сечений. Аналогично можно доказать, что касательные напряжения в угловых точках прямоугольного сечения равны нулю.

Касательные напряжения на площадках угловой точки, совпадающих с боковой поверхностью стержня, равны 0: $\tau_{nx} = 0$ и $\tau_{tx} = 0$. Но по закону парности касательных напряжений равны нулю и напряжения в плоскости сечения: $\tau_{xn} = \tau_{nx} = 0$; $\tau_{xt} = \tau_{tx} = 0$. Поскольку составляющие равны нулю, то равно нулю и полное касательное напряжение в угловой точке (рис. 5.15).

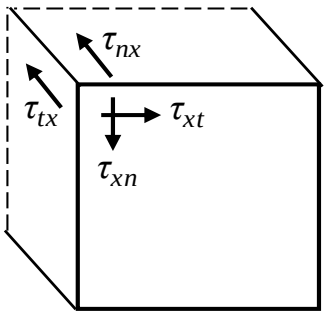


Рис. 5.15.

На рисунке 5.16 приведена эпюра τ для **прямоугольного сечения**, полученная методами теории упругости. Наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max}$ возникают в точке *A* посередине длинной стороны сечения.

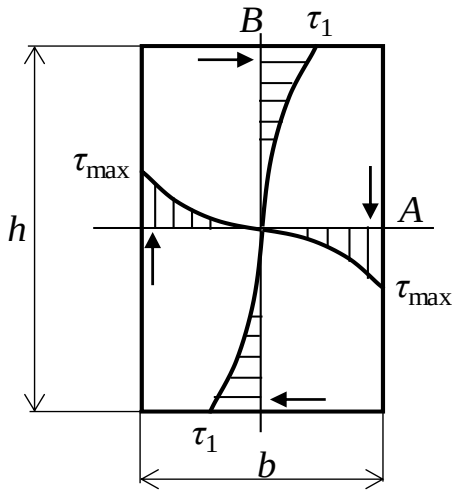


Рис. 5.16.

Расчетные формулы для касательных напряжений и погонного угла закручивания имеют следующий вид:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{кр}}};\ \tau_B = \tau_1 = \gamma\tau_{\max};\ \varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\text{кр}}}. \qquad (5.58)$$

Величины, стоящие в знаменателях формул, имеют смысл геометрических характеристик:

$W_{\text{кр}} = f_2 hb^2$ – момент сопротивления кручению;

$I_{\text{кр}} = f_1 hb^3$ – геометрическая характеристика жесткости при кручении, имеющая размерность момента инерции.

В этих формулах h – большая сторона прямоугольника, b – его меньшая сторона, $M_{\text{кр}}$ – крутящий момент, G – модуль сдвига.

Коэффициенты f_1, f_2 и γ зависят от соотношения сторон прямоугольника h/b. Их значения представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1.

h/b	1	1,5	2	3	6	10	∞
f_1	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,313	0,333
f_2	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,313	0,333
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,743	0,742	0,742

Из таблицы видно, что коэффициенты f_1 и f_2 с увеличением отношения h/b достаточно быстро выравниваются и асимптотически стремятся к одному числу 0,333 = 1/3. Коэффициент γ от значения 1 для квадратного сечения стремится к асимптотическому значению 0,742.

Иногда удобно (при подборе сечения) представить формулы для $W_{кр}$ и $I_{кр}$ в следующем виде:

$$W_{кр} = \beta b^3 \text{ и } I_{кр} = \alpha b^4. \qquad (5.59)$$

Здесь коэффициенты α и β равны $\alpha = f_1 \dfrac{h}{b}$ и $\beta = f_2 \dfrac{h}{b}$. Их значения для небольших значений h/b от 0 до 3 показаны в табл. 5.2.

Таблица 5.2

h/b	1	1,5	2	3
α	0,141	0,294	0,458	0,789
β	0,208	0,347	0,492	0,801

Условия прочности и жесткости для стержня прямоугольного сечения аналогичны тем же условиям для круглого сечения, но с поправкой на иные геометрические характеристики:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}} \le R_s. \quad \varphi' = \frac{M_{кр}}{GI_{кр}} \le [\varphi']. \qquad (5.60)$$

5.4.2. Свободное кручение тонкостенных стержней открытого профиля

Тонкостенными стержнями будем считать такие стержни, толщина которых существенно меньше других размеров. В практике строительства и машиностроения иногда возникает необходимость расчёта на кручение таких стержней.

Профиль (форма сечения) тонкостенных стержней может быть замкнутым или открытым. Некоторые формы открытых профилей показаны на рис. 5.17.

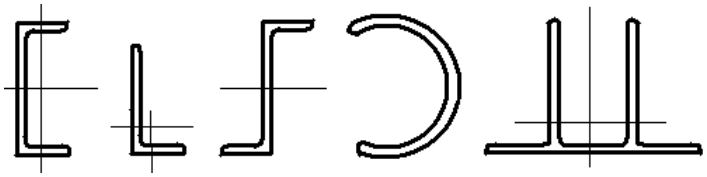


Рис. 5.17.

Свободным кручением в отличие от стесненного называется такой его случай, когда депланации не стеснены и происходят при постоянном по длине погонном угле закручивания.

Рассмотрим вначале кручение узкой прямоугольной полосы. В этом случае можно использовать результаты, полученные для кручения стержня прямоугольного сечения при больших отношениях сторон h/b. Обозначим размеры сечения через s (ширина полосы)

вместо h и δ (толщина полосы) вместо b. Величины геометрических характеристик при $s/\delta \to \infty$ ($f_1 = f_2 = 0{,}333$) будут равны

$$W_{\text{кр}} = \frac{s\delta^2}{3};\ I_{\text{кр}} = \frac{s\delta^3}{3}. \tag{5.61}$$

Касательные напряжения вдоль короткого размера (толщины) полосы можно считать распределенными по одинаковому линейному закону на всей длине полосы за исключением ее концевых зон. Эти напряжения будут принимать максимальные значения на контуре длинной стороны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{кр}}} = \frac{3M_{\text{кр}}}{s\delta^2}. \tag{5.62}$$

Погонный угол закручивания в свою очередь равен

$$\varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\text{кр}}} = \frac{3M_{\text{кр}}}{Gs\delta^3}. \tag{5.63}$$

Касательные напряжения в узкой полосе вдоль ее толщины можно считать меняющимися по линейному закону ввиду малости толщины. На срединной линии контура напряжения равны 0 (рис. 5.18).

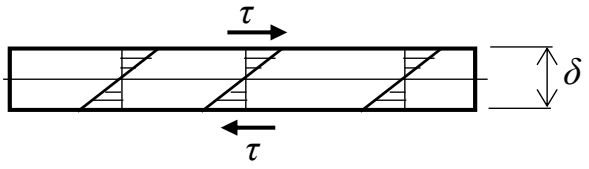


Рис. 5.18.

Достаточно очевидно, что напряжения в стержне (за исключением угловых точек) сильно не изменятся, если профиль сечения распрямить. Значит, напряжения в криволинейном или ломаном открытом профиле будут примерно такими же, как и в прямом, то есть в узкой полосе.

Формулы для касательных напряжений и перемещений не будут зависеть от формы профиля, если только последний может быть развёрнут в прямоугольник (рис. 5.19).

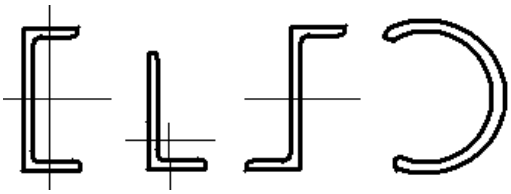


Рис. 5.19.

Если профиль имеет криволинейное очертание, то геометрическая характеристика жесткости определяется также, как и для узкой полосы. Если же сечение состоит из i отдельных узких прямоугольников, то эта характеристика $I_{кр}$ определяется по формуле

$$I_{кр} = \beta \sum \frac{s_i \delta_i^3}{3}, \qquad (5.64)$$

где коэффициент β зависит от формы сечения и учитывает повышение его жесткости за счет переходных областей при пересечении прямолинейных участков контура. Для прокатных уголков принимают $\beta = 1$, для швеллеров $\beta = 1{,}12$, для двутавров $\beta = 1{,}2$. Если скругление контура в углах контура незначительно, можно считать $\beta = 1$.

Погонный угол закручивания тонкостенного открытого профиля определяется по формуле

$$\varphi' = \frac{M_{кр}}{GI_{кр}}. \qquad (5.65)$$

Если тонкостенный незамкнутый профиль является составным и не может быть развёрнут в вытянутый прямоугольник, (рис 5.20), то прибегают к способу, изложенному ниже.

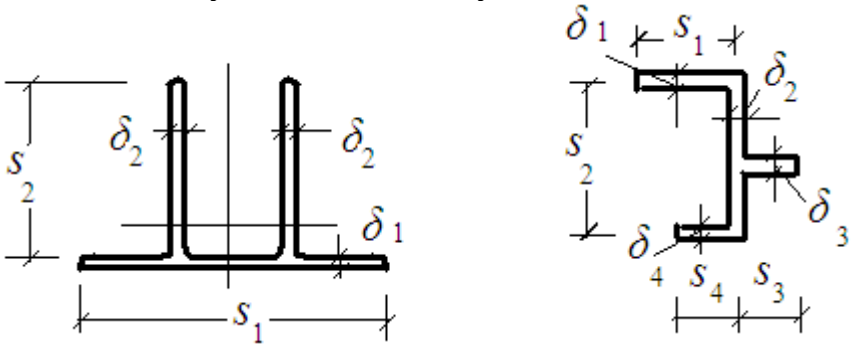


Рис. 5.20.

Полный крутящий момент $M_{кр}$ в сечении можно рассматривать как сумму моментов, воспринимаемых его отдельными прямолинейными или криволинейными участками с постоянной толщиной.

$$M_{\text{кр}} = \sum_{i=1}^{n} M_i \,. \tag{5.66}$$

При этом, поскольку угол закручивания является общим для всех участков сечения, то каждый из моментов записывается в виде

$$M_i = GI_{\text{кр}i}\varphi', \tag{5.67}$$

где $I_{\text{кр}i} = \dfrac{s_i\delta_i^3}{3}$. (5.68)

Поскольку $\varphi' = \dfrac{M_{\text{кр}}}{GI_{\text{кр}}}$, то из (5.67) следует:

$$M_i = \frac{I_{\text{кр}i}}{I_{\text{кр}}} M_{\text{кр}}. \tag{5.69}$$

Таким образом определяется доля крутящего момента, приходящаяся на каждый участок сечения.

Для каждого отдельного участка касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau_i = \frac{M_i}{W_{\text{кр}i}} = \frac{3M_i}{s_i\delta_i^2}. \tag{5.70}$$

Подставим в формулу (5.70) выражение (5.69) с учетом (5.68).

$$\tau_i = \frac{3M_{\text{кр}}}{s_i\delta_i^2}\frac{s_i\delta_i^3}{3I_{\text{кр}}} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}}\delta. \tag{5.71}$$

Наибольшие напряжения возникают в участке с наибольшей толщиной $\delta_{\max}$. Их величина равна

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{I_{\text{кр}}}\delta_{\max}, \tag{5.72}$$

где $I_{\text{кр}}$ определяется по формуле (5.64).

Обозначив $\dfrac{I_{\text{кр}}}{\delta_{\max}} = W_{\text{кр}}$, формулу (5.72) можно записать в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{кр}}}. \tag{5.73}$$

Приведенный способ определения напряжений в стержне незамкнутого контура является приближённым, так как не учитывает местные напряжения во внутренних углах ломаного профиля.

5.4.3. Свободное кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля

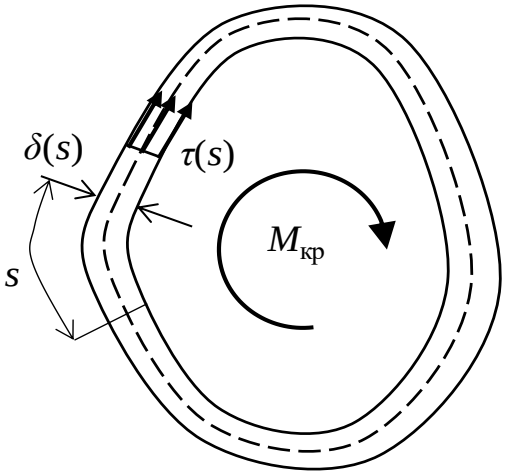


Рис. 5.21.

Рассмотрим стержень с произвольным замкнутым контуром поперечного сечения при малой толщине контура (рис. 5.21). При кручении такого стержня в сечении возникают касательные напряжения. Характер их распределения по толщине аналогичен случаю тонкостенной трубы кольцевого сечения. Ввиду малости толщины δ по сравнением с характерным размером сечения касательные напряжения считаются равномерно распределенными по толщине. Эти напряжения направлены по касательной к срединной линии контура – линии, делящей надвое толщину стенки профиля.

В общем случае толщину контура будем считать переменной по длине контура: $\delta = \delta(s)$.

Произведение касательных напряжений на толщину в каждой точке срединной линии называется ***потоком касательных напряжений*** $t = \tau\delta$.

Установим важное свойство потока касательных напряжений. Для этого выделим элемент стержня малой длины dx и из него вырежем часть, ограниченную продольным сечением.

По закону парности касательных напряжений в продольных сечениях возникают такие же по величине касательные напряжения τ_1 и τ_2, что и в поперечном сечении. Составим уравнение равновесия

отсеченного элемента в виде суммы проекций всех действующих на него сил на ось x (рис. 5.22):

$$\sum X = 0.\ \tau_1\delta_1 dx - \tau_2\delta_2 dx = 0. \qquad (5.74)$$

Отсюда после деления на dx:

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2 = \tau\delta = t = const. \qquad (5.75)$$

Поток касательных напряжений вдоль замкнутого контура сечения является постоянным на всей длине контура.

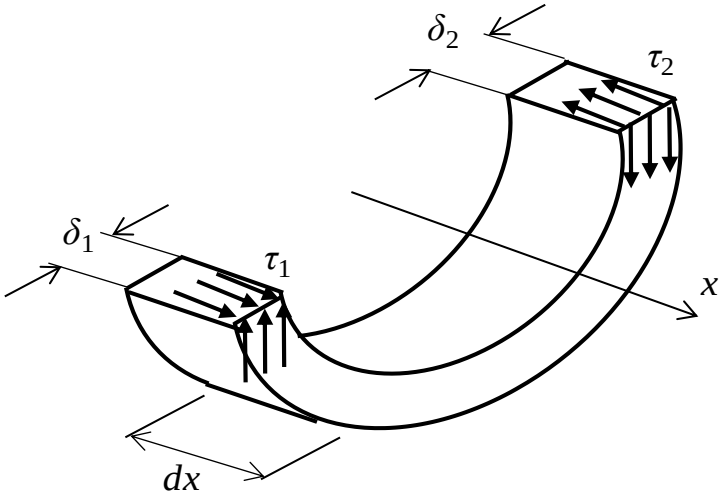


Рис. 5.22.

Установим связь касательных напряжений с крутящим моментом в сечении. Для этого вычислим суммарный момент относительно оси стержня, создаваемый потоком касательных напряжений, равный крутящему моменту в сечении (рис. 5.23). При этом учитываем, что поток касательных напряжений постоянен: $t = const$:

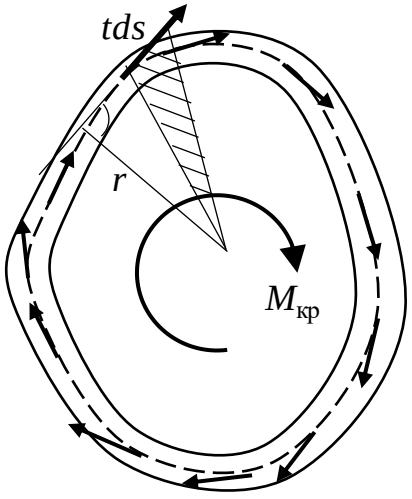


Рис. 5.23.

$$\sum M_x = M_{\text{кр}}.\ M_{\text{кр}} = \oint t ds \cdot r = t \oint r ds = t \oint d\Omega = t\Omega. \qquad (5.76)$$

Здесь $d\Omega = rds$ – это удвоенная площадь сектора, ограниченного элементом дуги ds и двумя радиусами точек на срединной линии, ограничивающими этот элемент. Площадь сектора вычисляется как площадь заштрихованного на рис. 5.23 треугольника с высотой r и с основанием ds. Ω – это удвоенная площадь внутри контура срединной линии сечения.

Поток касательных напряжений будет равен

$$t = \tau\delta = \frac{M_{\text{кр}}}{\Omega}. \qquad (5.77)$$

Отсюда получается формула для касательных напряжений. Она называется формулой Бредта:

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{\Omega\delta}. \qquad (5.78)$$

Обозначив $\Omega\delta = W_{\text{кр}}$, формулу (5.78) можно записать в виде

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\text{кр}}}. \qquad (5.79)$$

Жесткость сечения тонкостенного стержня замкнутого профиля определим из условия равенства потенциальной энергии деформации элемента стержня длиной dx и работы крутящего момента, вызвавшего деформацию этого элемента.

$$U = A. \qquad (5.80)$$

В каждой точке элемента возникает деформация чистого сдвига с напряжениями τ. Удельная потенциальная энергия при чистом сдвиге равна

$$u = \frac{\tau^2}{2G}. \qquad (5.81)$$

Рассмотрим часть элемента стержня с размерами $\delta \times ds \times dx$. Энергия, заключенная в его объеме, с учетом формулы Бредта равна

$$dU = u\delta ds dx = \frac{\tau^2}{2G}\delta ds dx = \frac{M_{\text{кр}}^2}{2G\Omega^2\delta} ds dx. \qquad (5.82)$$

Энергию элемента dx находим интегрированием по замкнутому контуру с учетом постоянства в пределах элемента величин $M_{\text{кр}}$, Ω и dx:

$$U = \oint dU = \frac{M_{\text{кр}}^2 dx}{2G\Omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \qquad (5.83)$$

Работа крутящего момента вычисляется на соответствующем угловом перемещении $d\varphi$ с учетом линейной зависимости между этими величинами:

$$A = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} d\varphi. \qquad (5.84)$$

Приравняв выражения для работы и энергии, получим соотношение между крутящим моментом и погонным углом закручивания.

$$\frac{M_{\text{кр}}^2 dx}{2G\Omega^2} \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} d\varphi; \text{ откуда} \qquad (5.85)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\text{кр}}}. \qquad (5.86)$$

В формуле (5.85) величина

$$I_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} \qquad (5.87)$$

является геометрической характеристикой жесткости сечения замкнутого профиля при свободном кручении.

Сравним для наглядности жесткости на кручение двух сечений квадратного коробчатого профиля при одинаковых параметрах a и δ. Пусть для определенности $\delta = 0{,}1a$ (рис. 5.24).

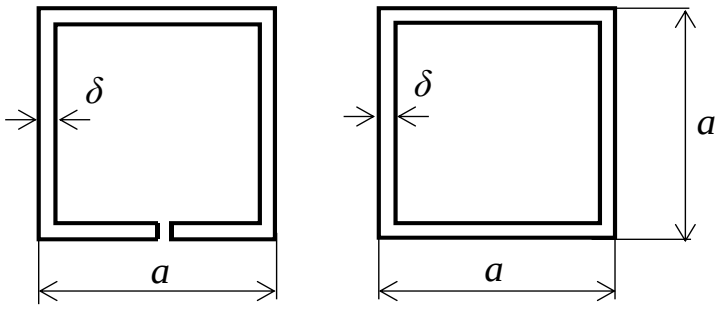


Рис. 5.24.

1. Открытый профиль.

$$I'_{\text{кр}} = \frac{1}{3} \sum s_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} a\delta^3 \cdot 4 = \frac{4}{3} a\delta^3.$$

При $\delta = 0{,}1a$ $I'_{\text{кр}} = \frac{4}{3} a\left(0{,}1a\right)^3 = 0{,}00133a^4.$

2. Замкнутый профиль.

$$I''_{\text{кр}} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}};\ \Omega = 2a^2;\ \Omega^2 = 4a^4;\ \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{1}{\delta} s = \frac{4a}{\delta}.$$

$$I''_{\text{кр}} = \frac{4a^4}{4a}\delta = a^3\delta.$$ При $\delta = 0{,}1a$ $I''_{\text{кр}} = a^3 \cdot 0{,}1a = 0{,}1a^4.$

Отношение крутильных жесткостей составит

$$\frac{I''_{\text{кр}}}{I'_{\text{кр}}} = \frac{0{,}1a^4}{0{,}00133a^4} = 75.$$

Сравним теперь максимальные касательные напряжения.

Моменты сопротивления кручению:

1. Открытый профиль.

$$W'_{\text{кр}} = \frac{I'_{\text{кр}}}{\delta} = \frac{4}{3}a\delta^2 = \frac{4}{3}a\left(0{,}1a\right)^2 = 0{,}0133a^3.$$

2. Замкнутый профиль.

$$W''_{\text{кр}} = \Omega\delta = 2a^2\delta = 2a^2 \cdot 0{,}1a = 0{,}2a^3.$$

Отношение моментов сопротивления кручению:

$$\frac{W''_{\text{кр}}}{W'_{\text{кр}}} = \frac{0{,}2a^3}{0{,}0133a^3} = 15.$$

Итак, стержень замкнутого профиля оказался в 75 раз более жестким и в 15 раз более прочным, чем стержень открытого профиля.

Тема 6. Плоский изгиб

Изгибом называется вид деформации стержня, который сопровождается искривлением его продольной оси.

Изгиб называется **чистым,** если в поперечных сечениях элемента конструкции возникает только изгибающий момент. Если в сечении, кроме момента, есть и поперечная сила – изгиб называется. **поперечным**.

Плоскости, в которых лежат главные центральные оси инерции сечения и ось стержня, называются. **главными плоскостями.**

Если силовая плоскость (плоскость действия сил) совпадает с одной из главных плоскостей стержня, изгиб называется **плоским**.

Линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения стержня называется **силовой линией.**

6.1. Усилия при изгибе

Пусть имеется балка, нагруженная силами, перпендикулярными ее оси (рис. 6.1). В произвольном сечении определим внутренние усилия. Применим для этого метод сечений: (РОЗУ). В поперечном сечении балки возникают сила Q и пара сил с моментом M (рис. 6.2).

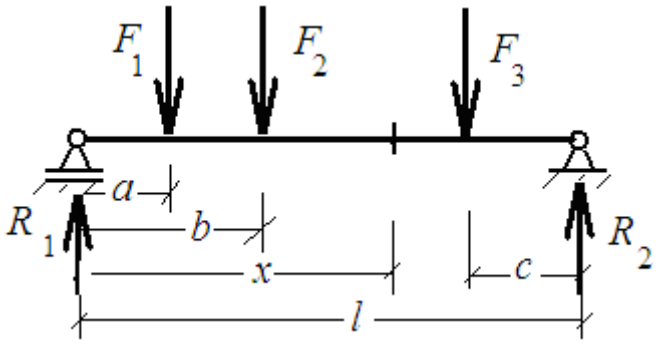


Рис. 6.1.

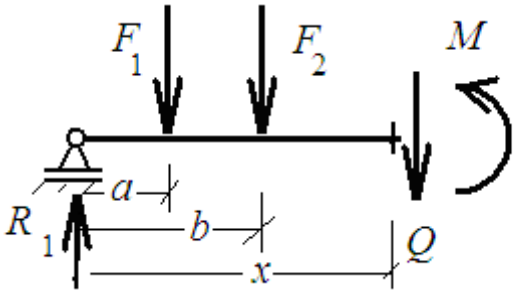


Рис. 6.2.

Составим условия равновесия отсеченной части балки:

$\sum Y = 0$. $R_1 - F_1 - F_2 - Q = 0$. Отсюда $Q = \sum F_i^{\text{лев}}$.

$\sum M = 0$. $R_1 x - F_1(x-a) - F_2(x-b) - M = 0$. $M = \sum M_i^{\text{лев}}$.

Из этих условий следуют правила для вычисления поперечной силы и изгибающего момента:

Поперечная сила Q в сечении равна *алгебраической сумме проекций всех внешних сил, рассматриваемых по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную оси стержня*.

При этом соблюдается следующее *правило знаков*. Поперечная сила считается **положительной**, если она стремится вращать отсечённую часть по часовой стрелке. Поперечная сила считается **отрицательной**, если стремиться вращать отсечённую часть против часовой стрелки.

Изгибающий момент M в сечении равен *алгебраической сумме моментов всех внешних сил, рассматриваемых по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести сечения*.

При вычислениях знаки слагаемых изгибающего момента можно принимать в зависимости от направления этих моментов по произвольно установленному правилу. Например, если момент вызывает растяжение в волокнах стержня, которые находятся в положительной области главной оси сечения y, то такой момент считается положительным. При построении эпюры изгибающих моментов ее ординаты откладывают со стороны растянутых волокон стержня, а знак на эпюре не показывают.

Пример 6.1. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента в балке на двух шарнирных опорах (рис. 6.3).

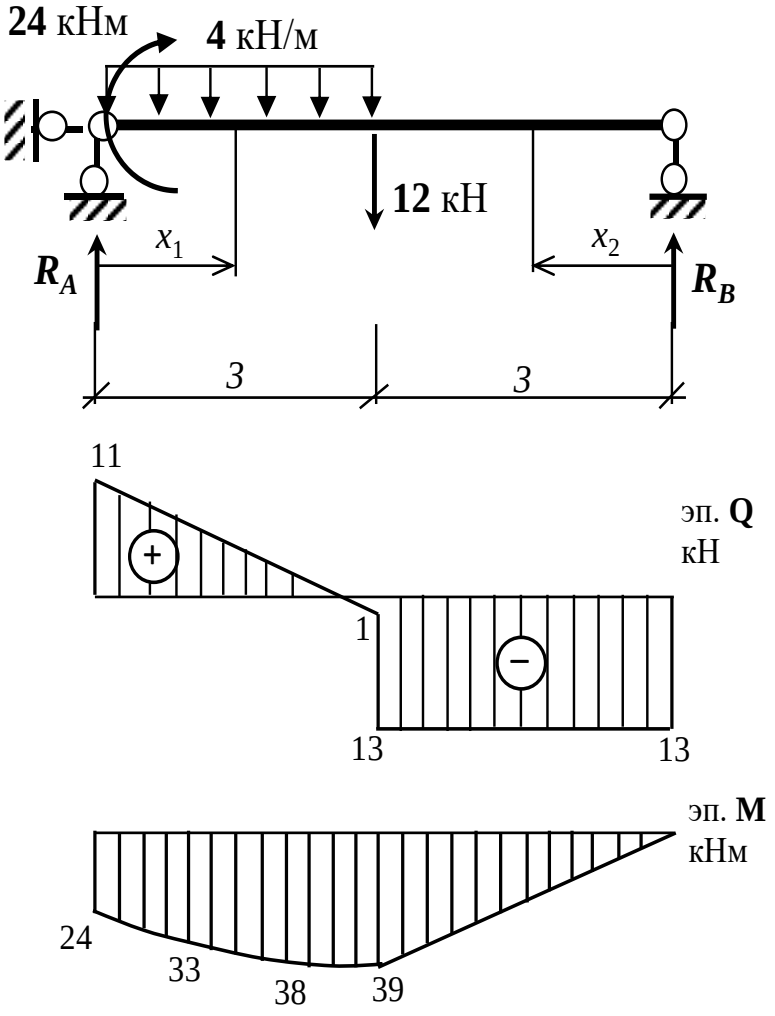


Рис. 6.3.

1. Составляем расчетную схему. Отбрасываем мысленно опоры балки, заменяя их опорными реакциями. Реакции балки находим из уравнений равновесия.

$$\sum M_A = 0.\ 4\cdot 3\cdot 1{,}5 + 12\cdot 3 + 24 - R_B\cdot 6 = 0.\ R_B = 13 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0.\ R_A\cdot 6 - 4\cdot 3\cdot 4{,}5 - 12\cdot 3 + 24 = 0.\ R_A = 11 \text{ кН}.$$

Проверка равновесия балки:

$$\sum Y = 0.\ 11 + 13 - 4\cdot 3 - 12 = 24 - 24 = 0.$$

2. Разбиваем балку на два участка с различным характером нагрузки. Произвольные сечения на каждом участке отмечаем их координатами на оси балки x_1 и x_2.

Для определения усилий используем метод сечений. На левом участке рассматриваем внешние силы на левой отсеченной части и вычисляем усилия с учетом правила знаков:

$$Q(x_1) = 11 - 4x_1;$$

$$M(x_1) = 24 + 11x_1 - 4x_1\cdot\frac{x_1}{2} = 24 + 11x_1 - 2x_1^2.$$

Видно, что $Q(x_1)$ представляет собой линейную функцию координаты сечения, а $M(x_1)$ – функцию второй степени этой координаты. Эпюра поперечной силы легко строится по двум точкам и является отрезком прямой линии. Эпюра изгибающих моментов – это участок квадратной параболы. Для ее построения требуется несколько точек, которые мы выбираем через одну треть длины участка на оси балки. Результаты расчетов по составленным формулам для усилий сведем в таблицу 6.1.

Таблица 6.1.

x, м	0	1	2	3
Q(*x*), кН	11	7	3	–1
M(*x*), кНм	24	33	38	39

На основании данных табл. 6.1 строим эпюры Q и M (рис. 6.3). При этом для построения эпюры Q достаточно двух точек, например, в начале и в конце участка: 11 кН и –1 кН.

На правом участке рассматриваем внешние силы на правой отсеченной части:

$$Q(x_2) = const = -13 \text{ кН};$$

$$M(x_2) = 13x_2.$$

Очевидно, на участке без распределенной нагрузки поперечная сила постоянна, а изгибающий момент меняется по линейному закону. Эти утверждения и отражены на эпюрах. Для построения эпюры моментов надо получить два значения: в начале участка при $x_2 = 0$ изгибающий момент равен 0, а в конце участка при $x_2 = 3$ м

$M(3) = 13 \cdot 3 = 39$ кНм.

Значения момента, вычисленные для сечения в середине пролета балки, одинаковы при вычислениях как для первого, так и для второго участков. Значения же поперечных сил отличаются в сечениях слева и справа от точки приложения сосредоточенной силы на величину этой нагрузки: –1 и –13 кН.

Можно заметить, что очертания эпюр поперечных сил и изгибающих моментов связаны с наличием и характером распределенной нагрузки на участках. В связи с этим полезно будет установить общие зависимости между усилиями и интенсивностью нагрузки при изгибе стержня. Наличие таких зависимостей, как будет видно далее, позволит упростить построение эпюр усилий.

6.2. Дифференциальные зависимости между усилиями при изгибе

Рассмотрим консольный стержень, изгибаемый равномерно распределенной нагрузкой (рис. 6.4).

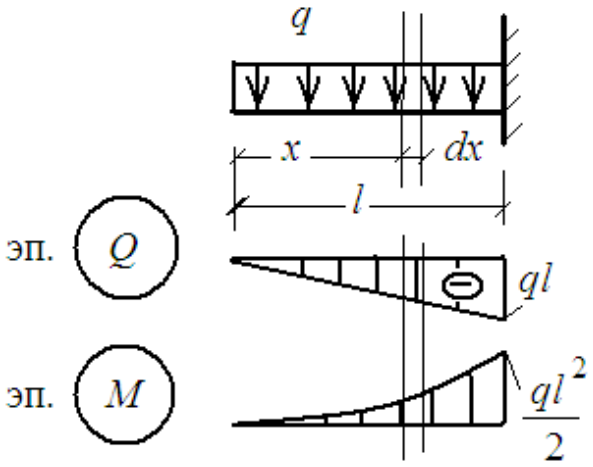


Рис. 6.4.

Построим эпюры усилий Q и M, используя их выражения для левой отсеченной части стержня:

$Q = -qx$ (уравнение прямой). При $x = 0$ $Q = 0$. При $x = l$ $Q = -ql$.

$M = -qx\frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}$ (уравнение квадратной параболы).

При $x = 0$ $M = 0$. При $x = l$ $M = -\frac{ql^2}{2}$.

В уравнении для изгибающего момента принят знак «минус», поскольку ось y считается направленной вниз, а момент вызывает растяжение верхних волокон стержня с отрицательной ординатой y .

Если теперь взять первую производную от изгибающего момента по переменной x, то можно заметить, что она равна поперечной силе:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{-q \cdot 2x}{2} = -qx = Q(x). \qquad (6.1)$$

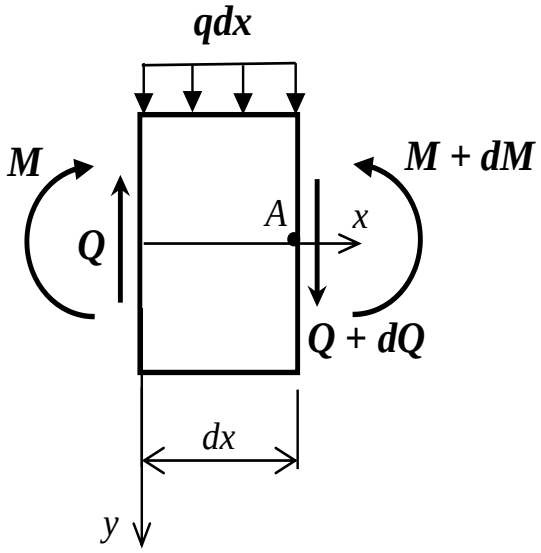


Рис. 6.5.

Чтобы убедиться в общем характере этой зависимости, вырежем бесконечно малый элемент стержня (рис. 6.5) и рассмотрим равновесие действующих на него сил.

$$\sum Y = 0.\ qdx - Q + Q + dQ = 0. \qquad (6.2)$$

$$q = -\frac{dQ}{dx}. \qquad (6.3)$$

Интенсивность распределённой нагрузки равна первой производной от поперечной силы по абсциссе сечения, взятой с противоположным знаком.

$$\sum M_A = 0.\ M - M - dM + Qdx - qdx\frac{dx}{2} = 0. \qquad (6.4)$$

Пренебрегая слагаемым высшего порядка малости, получим

$$Q = \frac{dM}{dx}. \qquad (6.5)$$

Поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения.

Из полученных двух зависимостей следует третья: между изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки. Она получается подстановкой второй дифференциальной зависимости в первую:

$$q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d}{dx}\frac{dM}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2};$$

$$q = -\frac{d^2M}{dx^2}. \qquad (6.6)$$

Интенсивность распределённой нагрузки равна второй производной от изгибающего момента по абсциссе сечения, взятой с противоположным знаком.

Надо заметить, что знаки в этих зависимостях справедливы при следующих условиях: ось x направлена вправо, ось y – вниз; положительная распределенная нагрузка направлена по оси y; положительный момент растягивает нижние волокна (с положительной координатой y).

Из курса высшей математики известно, что геометрический смысл производной есть тангенс угла наклона касательной к графику функции в данной точке по отношению к оси абсцисс. Таким образом, тангенс наклона касательной к эпюре моментов численно равен поперечной силе.

$$Q = \frac{dM}{dx} = \tan\alpha_1. \qquad (6.7)$$

Аналогично, тангенс угла наклона касательной к эпюре поперечной силы равен интенсивности распределенной нагрузки со знаком «минус».

$$q = -\frac{dQ}{dx} = -\tan\alpha_2. \qquad (6.8)$$

Основные следствия из дифференциальных зависимостей, касающиеся вида эпюр усилий при изгибе, перечислены ниже.

1) В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q имеет место «скачок», равный величине приложенной силы. На

эпюре M в этом же месте наблюдается «перелом» (мгновенное изменение угла наклона касательной к эпюре).

2) В сечении, где приложена пара сил (момент), на эпюре M наблюдается «скачок», равный величине момента приложенной пары.

3) Если распределенная нагрузка положительна (направлена вниз), то поперечная сила убывает (стремится вниз по вертикали), если нагрузка отрицательна (направлена вверх), то поперечная сила возрастает (стремится вверх).

4) На участках с положительной поперечной силой изгибающий момент «возрастает», то есть стремится вниз по вертикали. На участках с отрицательной поперечной силой – наоборот, стремится вверх.

5) Как известно из математики, при достижении функцией экстремальных значений ее первая производная равна нулю. Следовательно, в сечении, где поперечная сила, непрерывно изменяясь, меняет знак ($Q = 0$), изгибающий момент принимает экстремальное значение. На эпюре это выглядит как вершина параболы.

6) На участках действия распределенной нагрузки криволинейная эпюра моментов имеет выпуклость, направленную в сторону действия этой нагрузки. Это следует из третьей дифференциальной зависимости между изгибающим моментом и интенсивностью нагрузки. Если вторая производная отрицательна, а q соответственно положительна, то выпуклость графика функции M направлена по оси ординат y, то есть вниз. В ту же сторону направлена и положительная нагрузка q.

Перечисленные следствия из дифференциальных зависимостей позволяют строить эпюры усилий при изгибе без составления их аналитических выражений, за некоторыми исключениями.

Как правило, необходимые ординаты для построения эпюр вычисляются в характерных сечениях балки, расположенных в начале и в конце каждого ее участка. При этом на участках без распределенной нагрузки значение поперечной силы вычисляется один раз, для любого сечения. Значения момента вычисляются в любом случае в двух концевых сечениях, за исключением случая, когда поперечная сила на участке равна 0.

Обратим внимание еще на следующий факт. Если в точке между двумя сечениями, расположенными в конце предыдущего

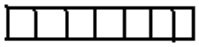
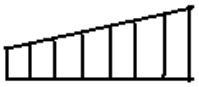
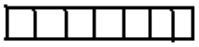
участка и в начале следующего, не приложена сосредоточенная пара, то изгибающий момент в этих сечениях одинаков, а, значит, может быть вычислен лишь один раз. Кроме того, очевидно, что в сечениях, примыкающих к шарнирным опорам, расположенным на краю балки, изгибающий момент равен 0. Также равен нулю изгибающий момент в сечении у свободного конца консоли. Последние два утверждения справедливы, если у этих сечений не приложена сосредоточенная пара сил.

После того, как вычислены необходимые ординаты эпюр, они соединяются нужным контуром, характер которого определяется по следствиям из дифференциальных зависимостей. Составление аналитических выражений на участке становится нужным только при вычислении экстремума изгибающего момента.

На основании полученных дифференциальных зависимостей можно составить таблицу свойств контуров эпюр, которая позволяет быстро строить и проверять эпюры усилий (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Свойства контуров эпюр Q и M

эп.	чистый изгиб $Q = 0$	поперечный изгиб	
		$q = 0$	$q = const$
Q		 прямая $\parallel$ оси	 наклонная прямая
M	 прямая $\parallel$ оси	 наклонная прямая	 парабола

На рис. 6.6–6.8 показаны примеры наиболее часто встречающихся случаев: нагрузки и эпюры усилий для консольной балки и для балки с шарнирными опорами.

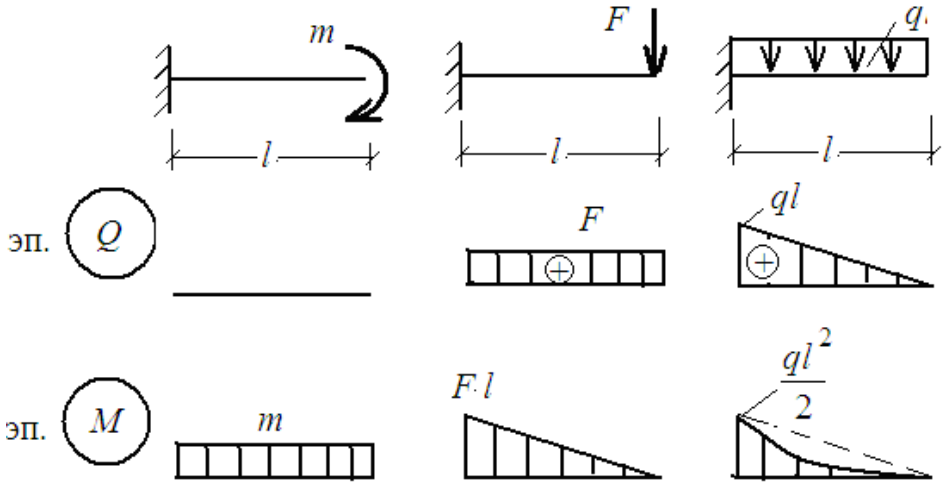


Рис. 6.6.

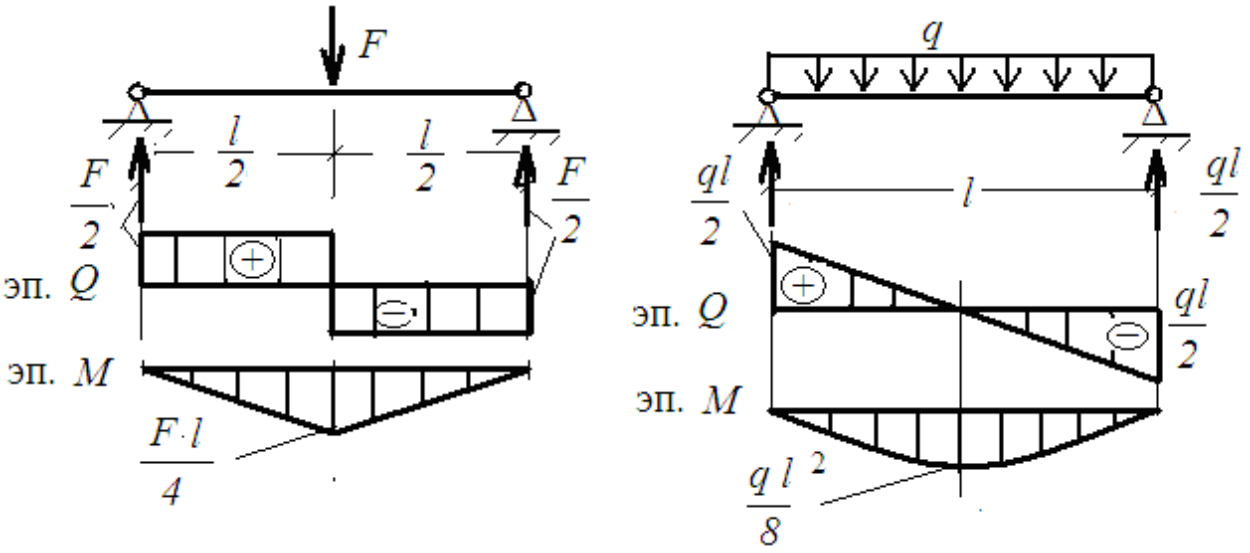


Рис. 6.7.

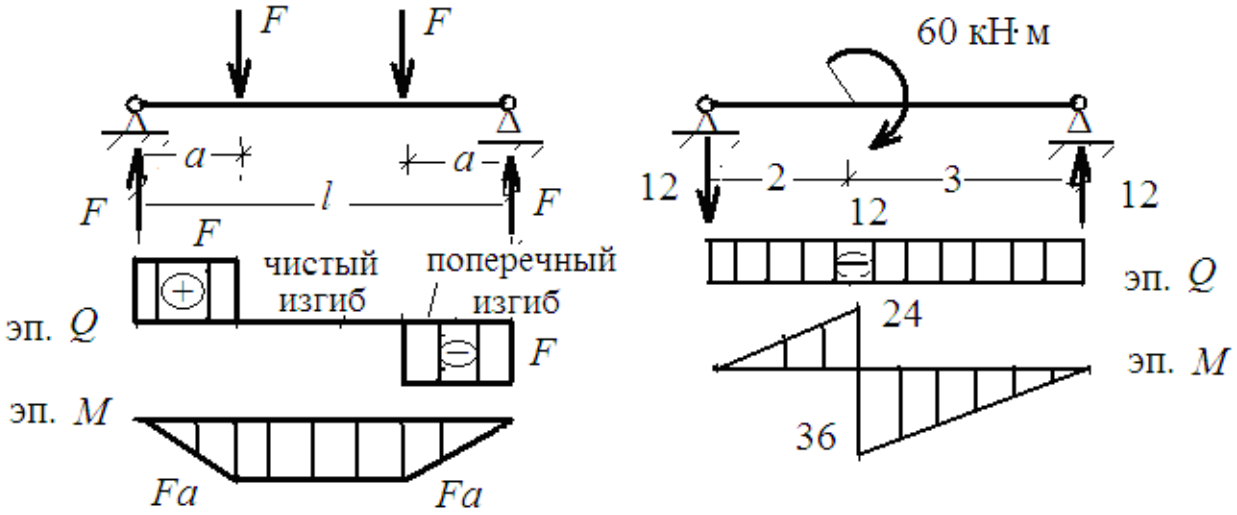


Рис. 6.8.

Пример 6.2. Построить эпюры Q и M (рис. 6.9).

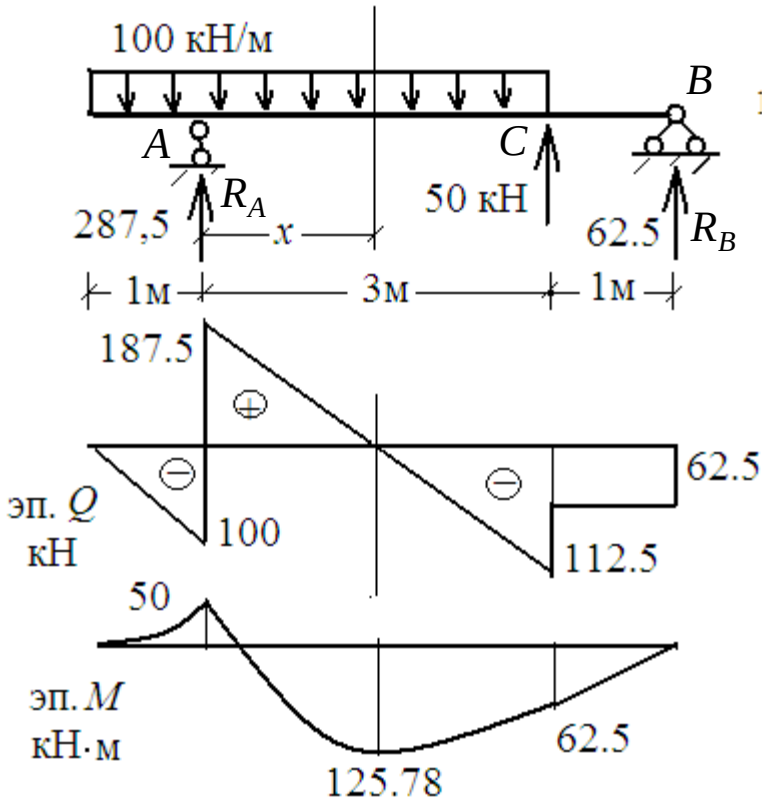


Рис. 6.9.

1) Определяем опорные реакции.

$\sum M_A = 0.\ 100 \cdot 4 \cdot 1 - 50 \cdot 3 - R_B \cdot 4 = 0.\ R_B = 62{,}5$ кН.

$\sum M_B = 0.\ R_A \cdot 4 - 100 \cdot 4 \cdot 3 + 50 \cdot 1 = 0.\ R_A = 287{,}5$ кН.

Проверка: $\sum Y = 0.\ 287{,}5 + 62{,}5 - 100 \cdot 4 + 50 = 400 - 400 = 0.$

2) Строим эпюры методом сечений.

$Q_A^{\text{лев}} = -100 \cdot 1 = -100$ кН. $Q_A^{\text{пр}} = -100 + 287{,}5 = 187{,}5$ кН.

$Q_C^{\text{лев}} = -62{,}5 - 50 = -112{,}5$ кН.

$Q_C^{\text{пр}} = Q_B = -62{,}5$ кН.

$M_A = -100 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -50$ кН·м. $M_C = 62{,}5 \cdot 1 = 62{,}5$ кН·м.

3) Определяем экстремум изгибающего момента M_{ext}.

$Q_x = 187{,}5 - 100x = 0.\ x = 1{,}875$ м.

$$M_{ext} = M_x = 287{,}5x - 100\frac{(x+1)^2}{2} = 287{,}5 \cdot 1{,}875 - 100 \cdot \frac{2{,}875^2}{2} =$$

$= 125{,}78$ кНм.

Определение поперечных сил по эпюре изгибающих моментов

На основе дифференциальных зависимостей можно определять поперечные силы по эпюре изгибающих моментов. Если эпюра изгибающих моментов линейная, то поперечная сила постоянна и численно равна тангенсу наклона контура эпюры моментов к оси стержня (рис. 6.10):

$$Q = \frac{M_j - M_i}{l}. \qquad (6.9)$$

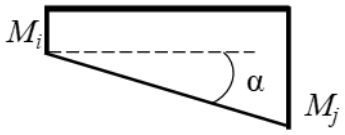


Рис. 6.10.

В случае, если участок эпюры изгибающих моментов очерчен по квадратной параболе (действие равномерно распределенной нагрузки), эпюру моментов можно разложить на составляющие (рис. 6.11). Одна из них (линейная) соответствует действию сосредоточенных пар M_i и M_j на концах участка. Поперечная сила от такой нагрузки определяется по формуле (6.9). Вторая составляющая представляет собой эпюру изгибающих моментов в балке на двух шарнирных опорах от действия равномерно распределенной нагрузки. Поперечная сила в этом случае меняется по линейному закону от значения $ql/2$ на левом конце стержня до $-ql/2$ на правом конце.

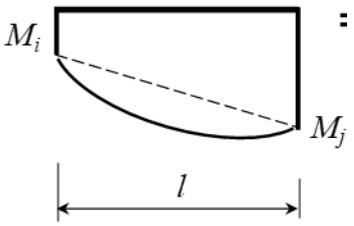


Рис. 6.11.

Таким образом, на основании принципа независимости действия сил полные значения поперечных сил на концах стержня будут равны:

$$Q_i = \frac{ql}{2} + \frac{M_j - M_i}{l}; \quad Q_j = -\frac{ql}{2} + \frac{M_j - M_i}{l}. \qquad (6.10)$$

Между этими значениями эпюра поперечных сил имеет линейный характер.

Определение изгибающих моментов по эпюре поперечных сил

Из дифференциальной зависимости между Q и M следует интегральная формула

$$M_j = M_i + \int_0^l Q dx = M_i + \omega_Q . \qquad (6.11)$$

Здесь определенный интеграл заменен площадью эпюры поперечных сил ω_Q на участке стержня длиной l. Например, если эпюра Q линейная, ее площадь вычисляется по формуле площади трапеции:

$$\omega_Q = \frac{M_i + M_j}{2} l . \qquad (6.12)$$

6.3. Чистый изгиб

6.3.1. Нормальные напряжения при чистом изгибе

Будем рассматривать прямолинейный стержень, сечение которого симметрично относительно вертикальной главной оси y. Этот стержень можно представить себе состоящим из набора горизонтальных слоев материала, а каждый такой слой – составленным из отдельных тонких волокон. Если по торцам стержня в вертикальной плоскости приложить одинаковые моменты m, то он будет находиться в условиях **чистого изгиба** (рис. 6.12). Опыт показывает, что при этом часть горизонтальных слоев материала получила укорочение, а часть – удлинение. Например, на рис. 6.12 верхние волокна укорачиваются и являются сжатыми, а нижние удлиняются и испытывают растяжение.

Между сжатыми и растянутыми волокнами, очевидно, есть слой, который остается недеформируемым. Он называется **нейтральным**. Горизонтальная линия, по которой пересекаются нейтральный слой и плоскость поперечного сечения, называется нейтральной линией (**нейтральной осью**) (рис. 6.12).

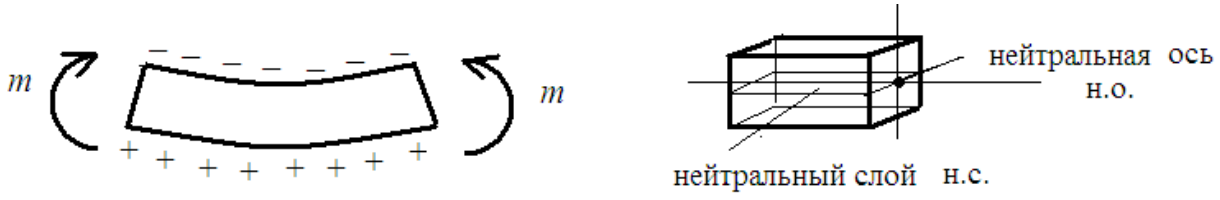


Рис. 6.12.

Из опыта также видно, что чем дальше волокно расположено от нейтрального слоя, тем оно больше деформируется.

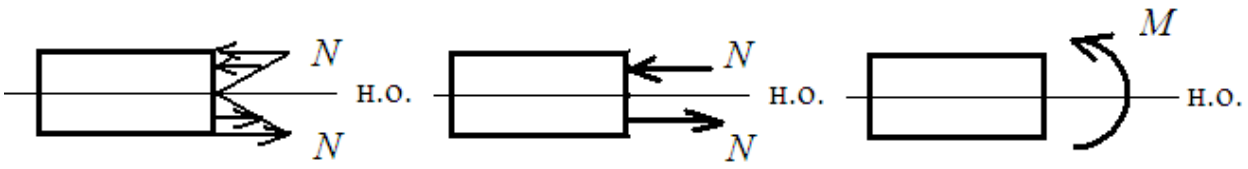


Рис. 6.13.

Поскольку внутренний изгибающий момент создает в волокнах стержня сжимающие или растягивающие осевые силы (рис. 6.13), то их действие в сечении характеризуют нормальные напряжения.

При выводе формулы нормальных напряжений делается ряд допущений (гипотез), принятых на основании опытов:

1) Поперечные сечения после деформации остаются плоскими и нормальными к оси стержня (гипотеза Бернулли).

2) Волокна соседних слоев не надавливают друг на друга, а испытывают только осевое растяжение или сжатие.

3) Напряжения по ширине сечения распределены равномерно.

Материал стержня, как и ранее, считается упругим и работает в зоне действия закона Гука.

Определение напряжений в сечении стержня является статически неопределимой задачей. Для ее решения необходимо совместно рассмотреть три группы условий: геометрические соотношения, уравнения равновесия и физический закон связи напряжений с деформациями.

Выделим из стержня участок его длины dx, испытывающий чистый изгиб (рис. 6.14). Торцы его при изгибе повернутся, оставаясь плоскими, образуя между собой угол $d\varphi$. Волокна нейтрального слоя искривятся по дуге окружности с радиусом кривизны ρ.

Обозначим через mn длину одного из продольных волокон, лежащих в нейтральном слое. Эта длина не изменится при изгибе, поэтому

$$mn = dx = \rho d\varphi. \qquad (6.13)$$

Любое другое волокно, лежащее выше или ниже нейтрального слоя, изменит свою длину. Так, волокно m_1n_1, лежащее в растянутой зоне на расстоянии y от нейтрального слоя, будет иметь новую длину

$$m_1n_2 = (\rho + y)d\varphi \qquad (6.14)$$

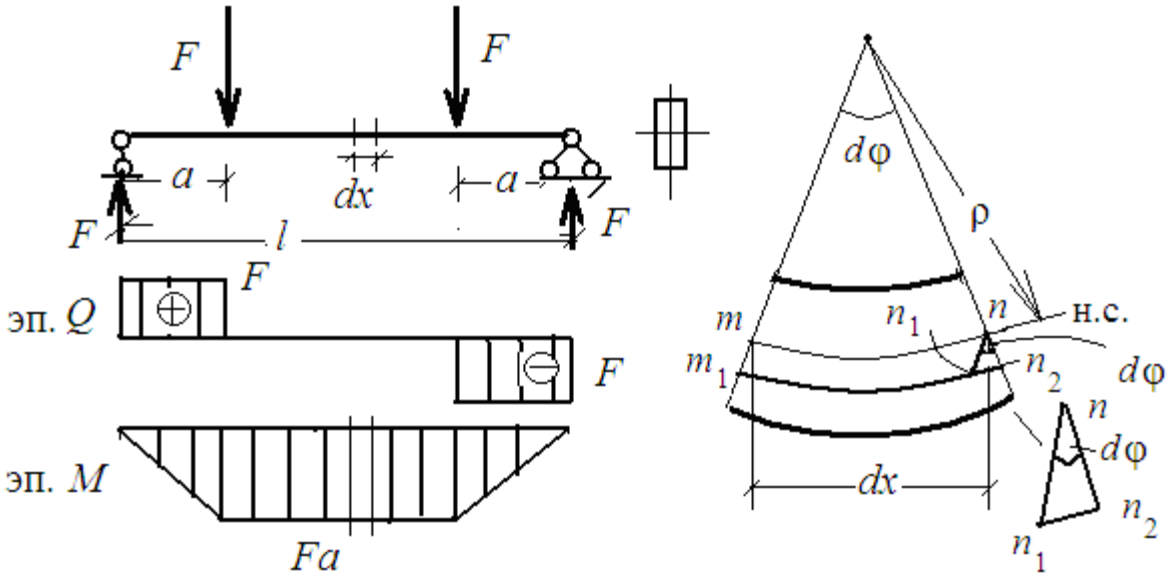


Рис. 6.14.

Абсолютное удлинение волокна составит

$$n_1n_2 = m_1n_2 - m_1n_1 = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi = yd\varphi. \qquad (6.15)$$

Относительное удлинение этого волокна будет равно

$$\varepsilon_x = \frac{n_1n_2}{mn} = \frac{yd\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \qquad (6.16)$$

Выражение (6.16) $\varepsilon_x = \dfrac{y}{\rho}$ является геометрическим соотношением задачи, которое следует из гипотезы плоских сечений.

Относительное удлинение волокна прямо пропорционально расстоянию от этого волокна до нейтрального слоя.

Поскольку волокна испытывают только растяжение или сжатие, не оказывая взаимного давления, напряжения можно вычислить, используя закон Гука для линейного напряженного состояния:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho}. \qquad (6.17)$$

Значит, нормальные напряжения изменяются по высоте сечения прямо пропорционально координате точки сечения относительно нейтральной оси z (рис. 6.15).

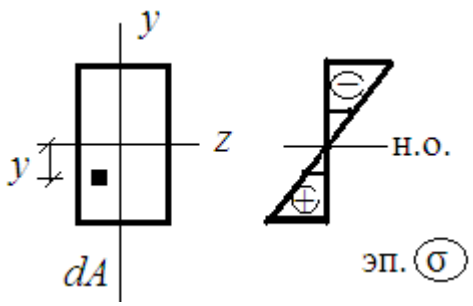


Рис. 6.15

Выделим на поперечном сечении элементарную площадку dA на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 6.15, 6.16).

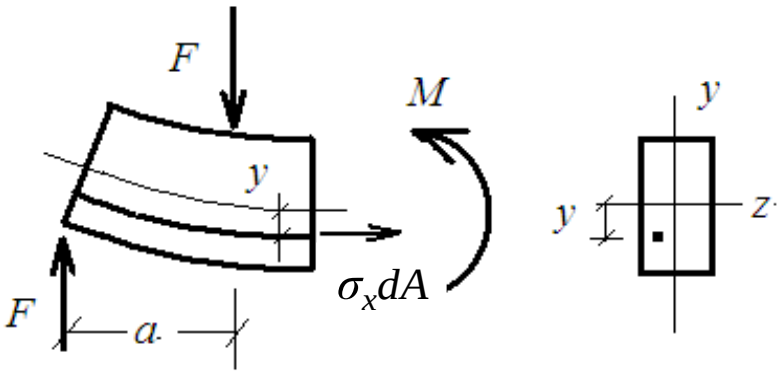


Рис. 6.16.

Тогда величина элементарной силы, действующей на ней, будет равна

$$dN = \sigma_x dA = E\frac{y}{\rho}dA. \qquad (6.18)$$

Рассмотрим теперь равновесие внутренних сил в сечении и внешних сил на левой отсечённой части балки (рис. 6.16).

Составим уравнения равновесия.

$$\sum Y = 0.\ F - F = 0. \qquad (6.19)$$

Это условие выполняется тождественно.

$$\sum X = 0.\ N = 0.\ \int_A \sigma_x dA = \frac{E}{\rho}\int_A y dA = 0. \qquad (6.20)$$

Интеграл $\int_A y dA = S_z$ есть статический момент площади сечения относительно нейтральной оси.

Так как $E \neq 0$ и $\rho \neq \infty$, то $S_z = 0$. Следовательно, ось z является центральной осью. Иначе говоря, *нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения*.

Рассмотрим условие равновесия $\sum M_{(y)} = 0.\ M_y = 0.$ (6.21)

Момент элементарной силы относительно оси y равен

$$dM_y = \sigma_x dA \cdot z = \sigma_x z dA = \frac{E}{\rho} yz dA. \quad (6.22)$$

Полный момент относительно y:

$$M_y = \int_A dM_y = \frac{E}{\rho}\int_A yz dA = \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0. \quad (6.23)$$

Величина I_{yz} равна центробежному моменту инерции. Если эта величина равна нулю, то оси y и z – главные оси инерции сечения. Так как ось y по условию задачи является осью симметрии, то она заведомо главная ось, а перпендикулярная ей нейтральная ось z также является главной осью. Но в силу последнего равенства результаты теории чистого изгиба можно обобщить на сечение любой, не только моно-симметричной формы.

Итак, нейтральная ось является одной из главных центральных осей сечения, при условии, что изгиб происходит в плоскости другой главной центральной оси.

Теперь рассмотрим условие равновесия $\sum M_{(z)} = 0.$

Момент внутренних сил в сечении численно равен сумме моментов внешних сил на отсеченной части относительно оси z, то есть изгибающему моменту M_z:

Момент элементарной силы относительно нейтральной оси z равен (см. рис. 6.16)

$$dM_z = \sigma_x dA \cdot y = \sigma_x y dA = \frac{E}{\rho} y^2 dA. \quad (6.24)$$

Полный момент относительно y:

$$M_z = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z. \quad (6.25)$$

Величина $I_z = \int_A y^2 dA$ – это осевой момент инерции сечения относительно нейтральной оси. Таким образом,

$$M_z = \frac{E}{\rho} I_z. \quad (6.26)$$

Выразим отсюда кривизну изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}, \qquad (6.27)$$

где величина EI_z называется *жесткостью сечения при изгибе* (изгибной жесткостью).

Полученная зависимость означает, что *кривизна изогнутой оси стержня прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна жёсткости сечения стержня*.

Подставим выражение (6.27) в формулу для напряжений (6.17) $\sigma_x = E\frac{y}{\rho}$:

$$\sigma_x = E\frac{M_z}{EI_z}y = \frac{M_z}{I_z}y. \qquad (6.28)$$

Тогда формула для нормальных напряжений в произвольной точке поперечного сечения будет иметь вид:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z}y. \qquad (6.29)$$

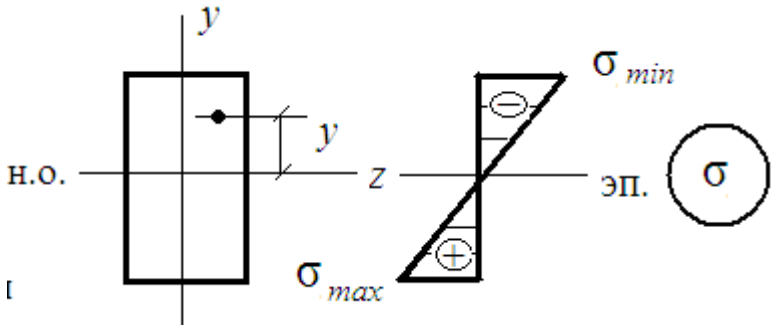


Рис. 6.17.

Эта формула справедлива для любой формы поперечного сечения и представляет собой уравнение прямой. Эпюра напряжений, построенная по данной формуле, является линейной (рис. 6.17). Наибольшие напряжения будут иметь место в наиболее удалённых от нейтрального слоя точках сечения. В точках на уровне нейтрального слоя напряжения равны нулю.

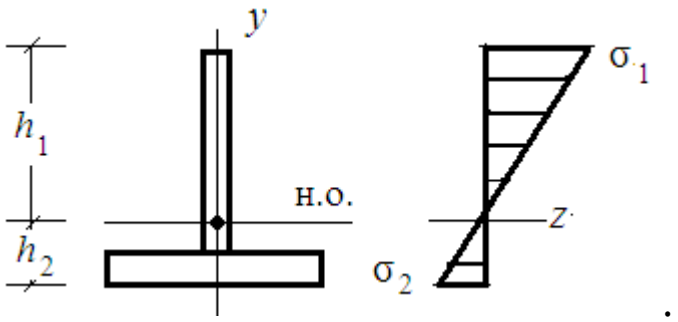


Рис. 6.18

Для несимметричных относительно нейтральной оси сечений высоты сжатой и растянутой зоны сечения h_1 и h_2 неодинаковы (рис. 6.18). Тогда максимальные значения растягивающих и сжимающих напряжений равны

$$\sigma_1 = \frac{M_z}{I_z} h_1,\ \sigma_2 = \frac{M_z}{I_z} h_2 . \qquad (6.30)$$

Если сечение симметрично относительно нейтральной оси, то величины максимальных растягивающих и сжимающих напряжений одинаковы, и их можно выразить через момент сопротивления:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \qquad (6.31)$$

где $W_z = \dfrac{I_z}{y_{\max}} = \dfrac{2I_z}{h}$, h – высота сечения.

6.3.2. Расчет на прочность при чистом изгибе

Поскольку напряженное состояние в точках поперечных сечений при чистом изгибе является линейным, опасными точками являются те, где действуют максимальные нормальные напряжения. Условие прочности в опасных точках зависит от вида материала стержня и состоит в сравнении максимального напряжения с расчетным сопротивлением (или допускаемым напряжением).

Условие прочности при изгибе:

1). Для пластичного материала, который одинаково работает на растяжение и сжатие, при симметричном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \le R . \qquad (6.32)$$

2). Для хрупкого материала, который хорошо работает на сжатие и плохо – на растяжение, при моно-симметричном сечении:

$$\sigma_{\text{р}}^{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\text{р}}^{\max} \le R_{\text{р}},\ \sigma_{\text{с}}^{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\text{с}}^{\max} \le R_{\text{с}}. \qquad (6.33)$$

Наиболее рациональным сечением при работе на изгиб будет то сечение, у которого при одинаковой площади поперечного сечения будет наибольшим осевой момент сопротивления. Чем дальше материал сечения расположен от нейтральной оси, тем лучше сечение работает на изгиб, так как при этом увеличивается момент сопротивления.

Например, рассмотрим несколько сечений с одинаковой площадью $A = 12$ см^2. Изгиб происходит относительно главной оси z. Размер b параллелен оси z.

1) Прямоугольное сечение. $b = 6$ см, $h = 2$ см.

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 2^2}{6} = 4 \text{ см}^3.$$

2) Прямоугольное сечение. $b = 2$ см, $h = 6$ см.

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{2 \cdot 6^2}{6} = 12 \text{ см}^3.$$

3) Квадратное сечение. $b = h = 3,464$ см.

$$W_z = \frac{b^3}{6} = \frac{3,464^3}{6} = 6,93 \text{ см}^3.$$

4) Круглое сечение. $r = 1,95$ см.

$$W_z = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,95^3}{4} = 5,86 \text{ см}^3.$$

5) Стальной прокатный двутавр № 10.

$W_z = 39,7$ см^3.

Очевидно, наиболее рациональным при работе на изгиб оказалось сечение из двутавра. Материал сечения двутавра максимально сконцентрирован в его полках, удаленных от нейтральной оси.

Чтобы рационально использовать материал изгибаемой балки, можно изменять размеры ее поперечного сечения по длине в соответствии с эпюрой изгибающих моментов. Например, для различных сечений стальной балки с разными изгибающими моментами моменты сопротивлений следует подбирать из условий прочности:

$$W_1 \ge \frac{M_1}{R},\ W_2 \ge \frac{M_2}{R},\ W_3 \ge \frac{M_3}{R} \text{ и т.д.}$$

Если принять основное сечение балки по минимальному из расчетных моментов сопротивления W_1, то усиление сечений 2 и 3

достигается приваркой дополнительных листов к поясам балки, как показано на рис 6.19. Моменты сопротивления сечений станут возрастать ступенчато при приближении к середине балки. Максимальные напряжения на различных участках балки будут при этом стремиться к выравниванию. Поэтому такую балку с известной степенью приближения (изгибающий момент меняется непрерывно, а момент сопротивления скачкообразно) можно назвать балкой равного сопротивления изгибу.

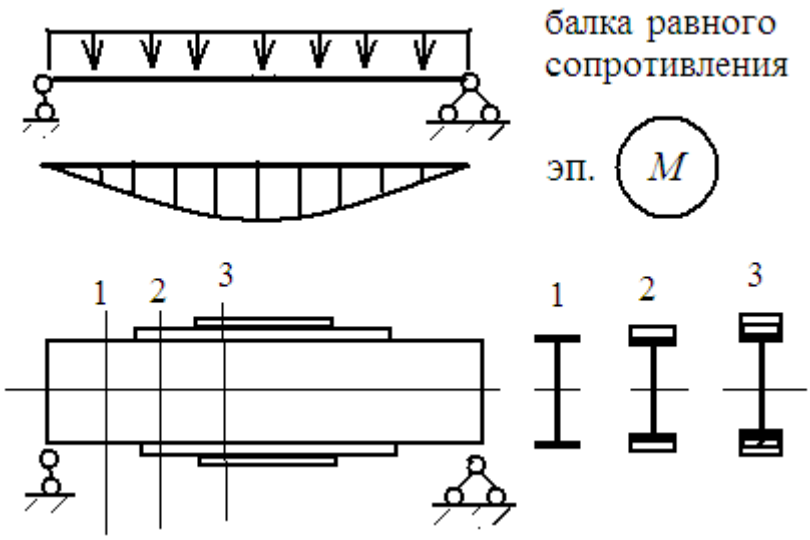


Рис. 6.19.

Три типа задач при расчётах на прочность:

На основе условия прочности при изгибе решаются три основные задачи:

1) Проверка прочности.

Дано: размеры элемента, нагрузка и расчетное сопротивление R Необходимо проверить прочность.

Для этого непосредственно проверяется выполнение условия

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \le R. \qquad (6.34)$$

2) Определение допустимой нагрузки (определение несущей способности элемента).

Дано: размеры элемента и расчетное сопротивление R. Надо определить максимально допустимую нагрузку, связанную с максимальным усилием (моментом). Из условия прочности тогда следует найти $M_z^{\max}$:

$$M_z \le W_z R. \qquad (6.35)$$

3). Определение размеров поперечного сечения: Дано: нагрузка и расчетное сопротивление R. Надо подобрать сечение элемента. Для этого из условия прочности находят требуемый момент сопротивления:

$$W_z \geq \frac{M_z}{R}. \qquad (6.36)$$

6.4. Поперечный изгиб

6.4.1. Касательные напряжения при изгибе

При изгибе с поперечной силой поперечные сечения искривляются и стремятся сдвинуться относительно друг друга. При этом и между продольными слоями стержня также происходят деформации сдвига. Вследствие искривления сечений сдвиги неравномерны по высоте сечения.

Если разрезать стержень по нейтральному слою, то каждый из получившихся отдельных стержней будет изгибаться самостоятельно, и очевидно, что в месте их соприкосновения происходит сдвиг (рис. 6.20).

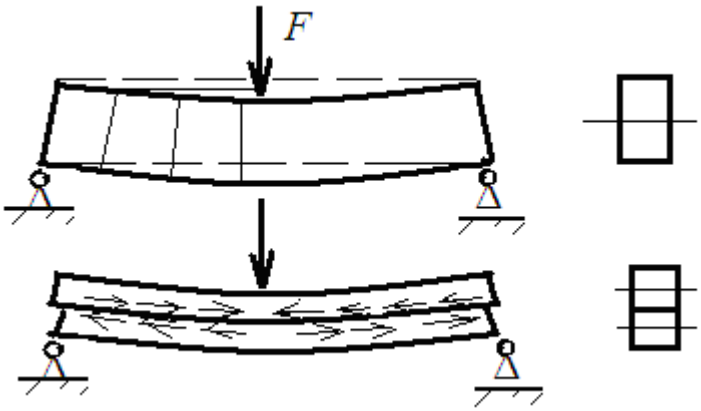


Рис. 6.20.

Значит, и в цельном стержне продольные волокна нейтрального слоя испытывают сдвиг.

Действие касательных напряжений подробно изучил Д. И. Журавский. Введя ряд простых допущений, он вывел формулу для касательных напряжений при поперечном изгибе.

Эти основные допущения сводятся к следующему:

1). Касательные напряжения в каждой точке поперечного сечения направлены параллельно поперечной силе Q.

2). Касательные напряжения распределяются равномерно по ширине поперечного сечения стержня.

3) Продольные волокна стержня не оказывают давления друг на друга.

4) Нормальные напряжения при поперечном изгибе определяются так же, как и при чистом изгибе.

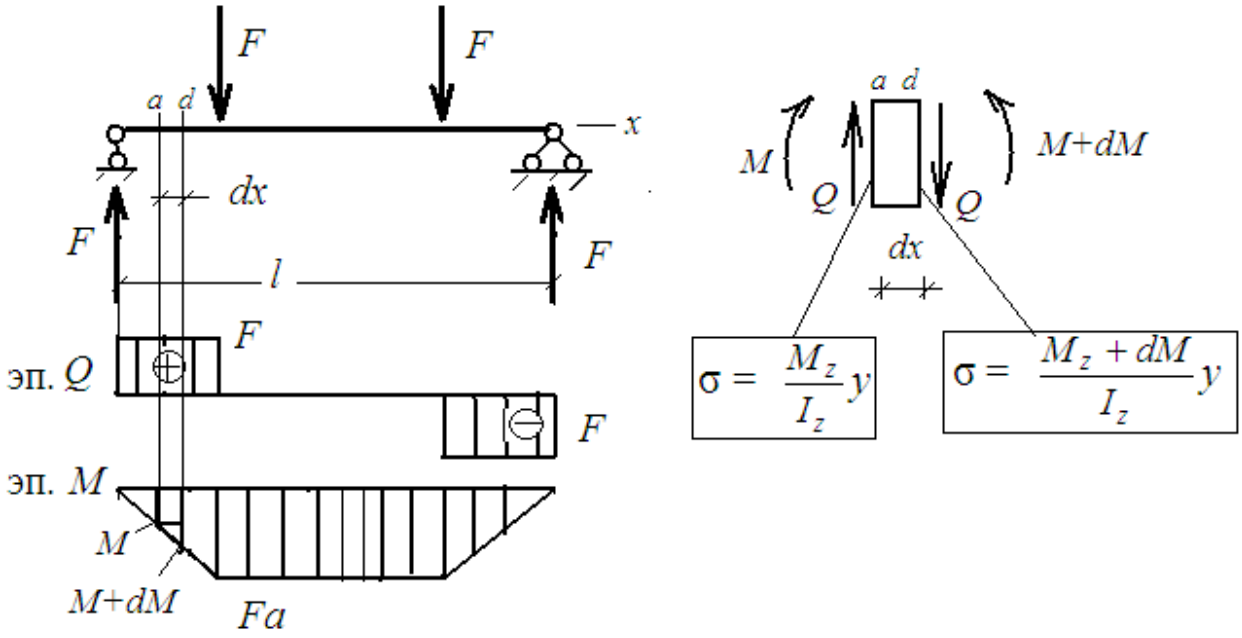


Рис. 6.21.

Для определения касательных напряжений вырежем из балки бесконечно малый элемент *dx* и определим усилия и нормальные напряжения, действующие в его поперечных сечениях (рис. 6.21).

Усилие в сечении слева равно M_z. Усилие в сечении справа получило бесконечно малое приращение dM_z и равно $M_z + dM_z$.

Нормальные напряжения в сечении слева согласно теории чистого изгиба равны

$$\sigma_1 = \frac{M_z}{I_z} y. \qquad (6.37)$$

Нормальные напряжения в сечении справа соответственно равны

$$\sigma_2 = \frac{M_z + dM_z}{I_z} y. \qquad (6.38)$$

Проведём далее сечение *bc*, параллельное нейтральному слою в выделенном элементе *dx* и рассмотрим равновесие отсеченной этим сечением верхней части элемента (рис. 6.22).

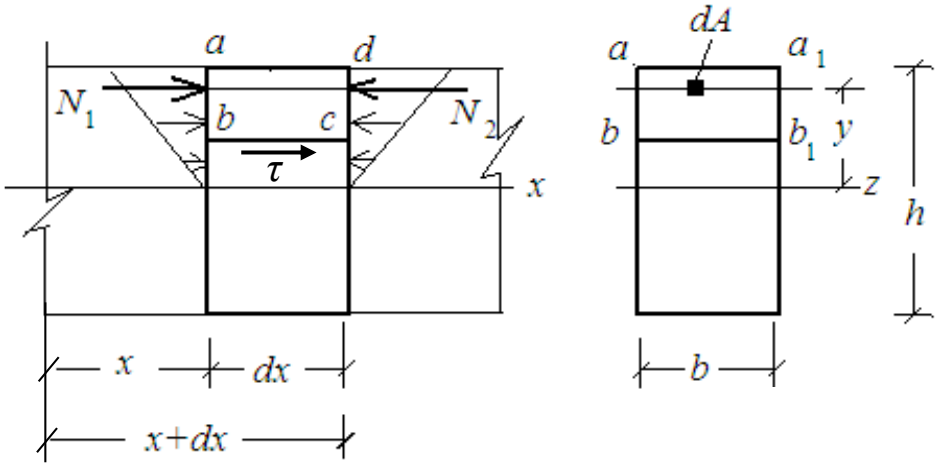


Рис. 6.22.

На элементарную площадку dA, соответствующую волокну на расстоянии y от нейтрального слоя, в сечении слева действует нормальное усилие:

$$\sigma_1 dA = \frac{M_z}{I_z} y dA. \qquad (6.39)$$

Полное усилие, действующее по площади отсечённой части aba_1b_1 слева, будет равно

$$N_1 = \int\limits_{A_{\text{отс}}} \sigma_1 dA = \frac{M_z}{I_z} \int\limits_{A_{\text{отс}}} y dA = \frac{M_z}{I_z} S_z^{\text{отс}}, \qquad (6.40)$$

где $\int\limits_{A_{\text{отс}}} y dA = S_z^{\text{отс}}$ – статический момент отсечённой площади aba_1b_1 относительно нейтральной оси.

Так же определим величину полного усилия N_2, действующего на отсеченную часть справа, в сечении $x + dx$:

$$N_2 = \int\limits_{A_{\text{отс}}} \sigma_2 dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} \int\limits_{A_{\text{отс}}} y dA = \frac{M_z + dM_z}{I_z} S_z^{\text{отс}}. \qquad (6.41)$$

Рассмотрим условие равновесие отсеченной части элемента, спроектировав все силы на ось x:

$$\sum X = N_1 - N_2 + \tau b dx = 0. \qquad (6.42)$$

После подстановки (6.40) и (6.41) в (6.42) получим

$$-\frac{S_z^{\text{отс}} dM_z}{I_z} + \tau b dx = 0,$$

откуда $\tau = \frac{dM_z}{dx} \cdot \frac{S_z^{\text{отс}}}{bI_z}$. (6.43)

С учетом того, что $\frac{dM_z}{dx} = Q$, из (6.43) получим окончательную формулу для касательных напряжений при плоском поперечном изгибе:

$$\tau = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{I_z b}. \qquad (6.44)$$

Формула (6.44) называется формулой Журавского для определения касательных напряжений при изгибе.

В этой формуле

τ − касательные напряжения в рассматриваемой точке сечения,

Q − поперечная сила в сечении,

$S_z^{\text{отс}}$ − статический момент отсечённой части, рассматриваемой выше или ниже рассматриваемой точки (по модулю),

I_z − осевой момент инерции сечения,

b − ширина сечения на уровне данной точки.

Формула Журавского выведена для определения касательных напряжений по площадкам, параллельным нейтральному слою. Но, согласно закону парности касательных напряжений, ею можно пользоваться и для определения τ в соответствующих точках поперечного сечения.

6.4.2. Касательные напряжения в прямоугольном и круглом сечениях

1. Рассмотрим распределение касательных напряжений в стержне *прямоугольного* сечения (рис. 6.23):

$$h_{\text{отс}} = \frac{h}{2} - y;$$

$$A_{\text{отс}} = bh_{\text{отс}} = b\left(\frac{h}{2} - y\right);$$

$$y_C = \frac{h}{2} - \frac{h_{\text{отс}}}{2} = \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right);$$

$$S_z^{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_C = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \qquad (6.45)$$

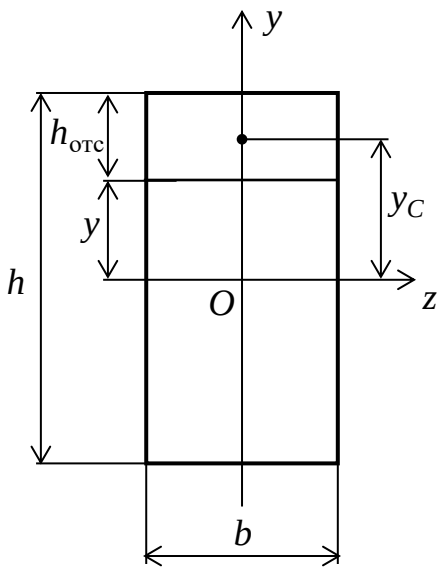


Рис. 6.23.

Из (6.45) видно, что статический момент отсеченной части сечения меняется с высотой по закону квадратной параболы. Таков же и характер зависимости для касательных напряжений, поскольку ширина прямоугольного сечения постоянна. Подставим (6.45) в формулу Журавского:

$$\tau(y)=\frac{QS_z^{\text{отс}}}{bI_z}=\frac{Q}{bI_z}\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)=\frac{Q}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right). \qquad (6.46)$$

После подстановки значения момента инерции прямоугольного сечения формула (6.46) принимает вид

$$\tau(y)=\frac{Q\cdot 12}{2bh^3}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)=\frac{3Q}{2bh}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right), \qquad (6.47)$$

или, учитывая, что $bh=A$ (площадь сечения),

$$\tau=\frac{3Q}{2A}\left(1-4\frac{y^2}{h^2}\right). \qquad (6.48)$$

Формула (6.48) показывает закон распределения касательных напряжений по высоте сечения, эпюра этих напряжений показана на рис. 6.24. Максимальные напряжения действуют в точках на нейтральной оси сечения при $y=0$:

$$\tau_{\max}=\frac{3Q}{2A}. \qquad (6.49)$$

В точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя ($y=\pm h/2$), касательные напряжения равны нулю.

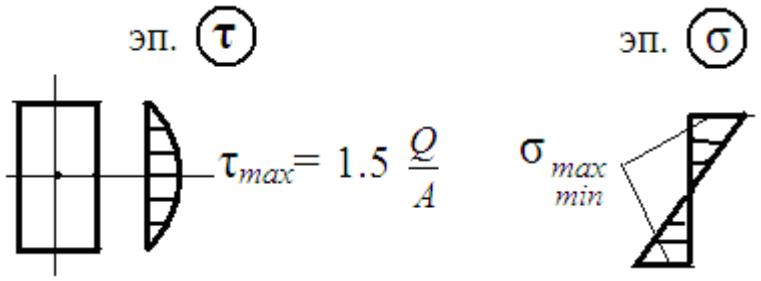


Рис. 6.24.

Сравнивая эпюры нормальных и касательных напряжений, можно заметить, что в точках нейтрального слоя $\tau = \tau_{\max}$, а $\sigma = 0$. В крайних волокнах наоборот, $\tau = 0$, а $\sigma = \sigma_{\max}$.

2. Изучим теперь касательные напряжения изгиба в балке круглого сечения. Прежде всего отметим, что в произвольной точке у контура сечения касательные напряжения направлены по касательной к этому контуру. Это было доказано для случая кручения стержня и также справедливо для изгиба, раз на боковой поверхности отсутствуют нагрузки. Поэтому в произвольной точке контура касательные напряжения в круглом сечении не совпадают с направлением поперечной силы. Это значит, что по формуле Журавского можно определить только ту составляющую касательных напряжений, которая параллельна поперечной силе. Покажем вывод формулы для этой составляющей в круглом сечении (рис. 6.25).

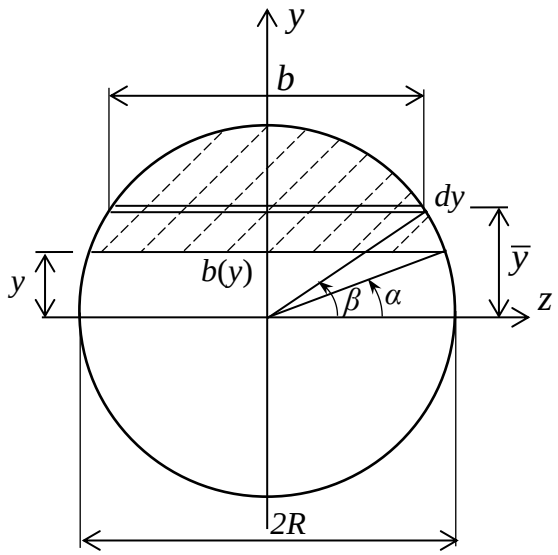


Рис. 6.25.

Пусть изгиб происходит в главной плоскости xy. Тогда вертикальная составляющая касательных напряжений от поперечной силы предполагается равномерно распределенной вдоль направления z. Рассмотрим касательные напряжения на уровне y при ширине сечения $b(y)$. Для применения формулы Журавского надо получить выражение для переменной ширины сечения и для статического момента отсеченной части сечения. Отсеченной частью сечения будет сегмент круга, расположенный по одну сторону от секущей $b(y)$ и заштрихованный на рис. 6.25.

Для вычисления статического момента отсеченной части выделим вначале в пределах этой части тонкую полоску толщиной dy, параллельную оси z. Положение полоски будем описывать центральным углом β. Ширина сечения на уровне этой полоски равна

$b = 2R\cos\beta$.

Связь между полярной и текущей декартовой координатой имеет вид

$\overline{y} = R\sin\beta$. Тогда $dy = R\cos\beta d\beta$.

Площадь элементарной полоски

$dA = bdy = 2R^2\cos^2\beta d\beta$.

Статический момент этой площади:

$dS_z^o = \overline{y}dA = R\sin\beta\cdot 2R^2\cos^2\beta d\beta = -2R^3\cos^2\beta d\cos\beta$.

Статический момент всей отсеченной площади получим интегрированием по β в пределах от α до $\pi/2$:

$$S_z^o = -2R^3\int_\alpha^{\pi/2}\cos^2\beta d\cos\beta = -2R^3\frac{\cos^3\beta}{3}\Bigg|_\alpha^{\pi/2} = \frac{2R^3}{3}\cos^3\alpha.$$

Ширина сечения на уровне определяемых касательных напряжений равна

$b(y) = 2R\cos\alpha$.

Подставляя полученные величины в формулу Журавского и учитывая, что $I_z = \dfrac{\pi R^4}{4}$, получим

$$\tau = \frac{Q\cdot\dfrac{2}{3}R^3\cos^3\alpha}{2R\cos\alpha\cdot\dfrac{\pi R^4}{4}} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2}\cos^2\alpha = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}\left(1-\sin^2\alpha\right). \qquad (6.50)$$

С учетом того, что $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, можно получить зависимость между касательными напряжениями и координатой точки y:

$$\tau = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right). \qquad (6.51)$$

Полученная зависимость говорит о том, что по высоте сечения касательные напряжения меняются по параболическому закону, как и в случае прямоугольного сечения. В крайних верхней и нижней точках сечения эти напряжения равны 0, а на уровне нейтрального слоя при $y = 0$ достигают максимального значения:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}. \qquad (6.52)$$

Максимальные касательные напряжения в точках контура направлены так же, как и поперечная сила (вертикально) и равны полным напряжениям. В других точках нейтральной оси эти напряжения направлены также вертикально в силу гипотезы о равномерности их распределения по ширине сечения. Эпюра касательных напряжений имеет вид параболического сегмента (рис 6.26).

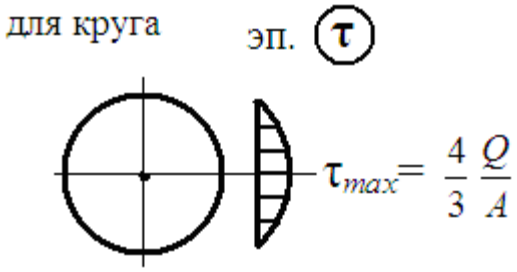


Рис. 6.26.

6.4.3. Касательные напряжения в тонкостенных сечениях

Рассмотрим касательные напряжения изгиба в тонкостенном сечении двутаврового профиля. Будем считать его состоящим из прямоугольных полок и стенки (рис. 6.27). В стенке такого сечения касательные напряжения можно считать направленными только вдоль оси стенки, как и в прямоугольном сечении. По толщине стенки они распределены равномерно. Статический момент отсеченной части сечения для точек стенки состоит из двух частей: статического момента полки и статического момента отсеченной части стенки.

Переменная часть этого статического момента относится к отсеченной части стенки. Поскольку эта часть имеет форму

прямоугольника, закон изменения ее статического момента имеет тот же характер, что и для прямоугольного сечения.

Рассчитаем значения статического момента на уровне нейтральной оси и на границе стенки с полкой.

В точке на границе стенки и полки при $y=\frac{h}{2}-t$ это статический момент полки (рис. 6.27):

$$S_z^o = bt\frac{h-t}{2}. \qquad (6.53)$$

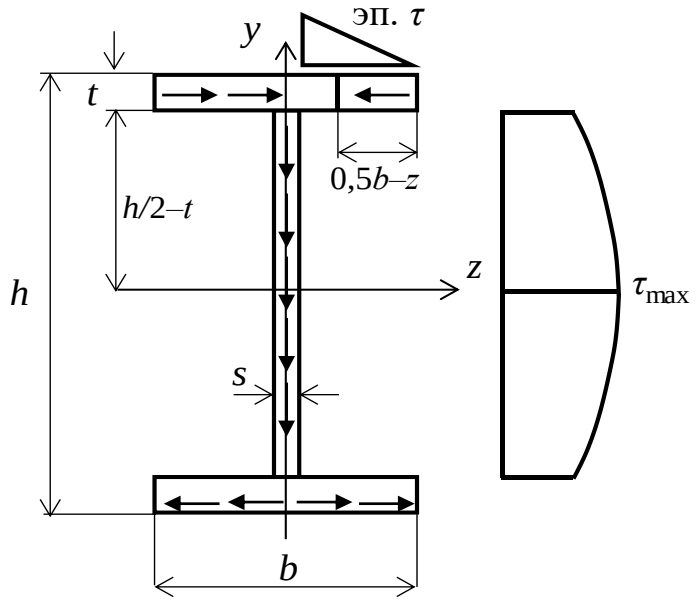


Рис. 6.27.

Для точек на нейтральной оси при $y=0$ к значению (6.53) добавляется статический момент половины стенки:

$$S_z^o = s\frac{\left(\frac{h}{2}-t\right)^2}{2}+bt\frac{h-t}{2}. \qquad (6.54)$$

Последняя формула дает максимальное значение статического момента.

Касательные напряжения в стенке вычисляются по формуле

$$\tau=\frac{QS_z^o}{sI_z}, \qquad (6.55)$$

где I_z – момент инерции сечения, s – толщина стенки.

Момент инерции сварных тонкостенных сечений вычисляется по формулам геометрических характеристик составных фигур. Для

прокатных профилей величина момента инерции выбирается из таблиц сортамента.

Эпюра касательных напряжений в пределах стенки представляет собой симметричный участок квадратной параболы с ненулевыми ординатами по концам (рис. 6.27). Аналогичный характер имеет эта эпюра и для других тонкостенных сечений (рис. 6.28).

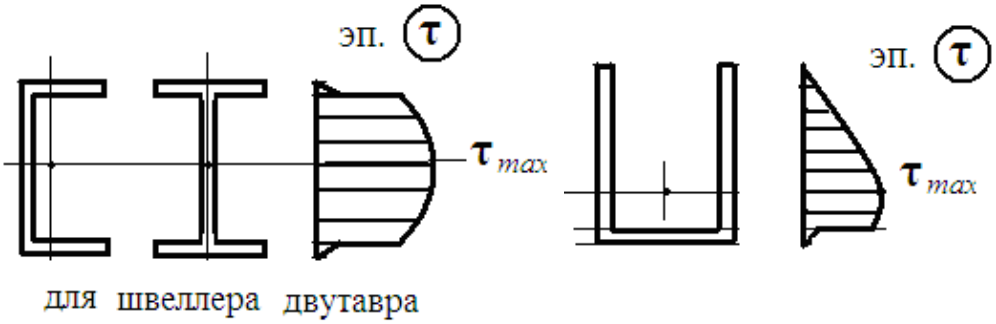


Рис. 6.28.

Вертикальные касательные напряжения в полках на их верхних и нижних гранях равны нулю (это точки, примыкающие к контуру сечения). Ввиду малости толщины полок можно считать, что эти напряжения в полках отсутствуют вообще.

В точках стенки в пределах толщины полок вертикальные касательные напряжения, вычисленные по формуле Журавского, будут резко уменьшаться по сравнению с напряжениями в стенке, поскольку скачком изменится ширина сечения от s до b:

$$\tau = \frac{QS_z^o}{bI_z}. \qquad (6.56)$$

Однако напряжения, вычисленные по этой формуле для зоны перехода от стенки к полке, не соответствуют сложному характеру напряженного состояния в этой области. В месте резкого изменения контура сечения возникает концентрация напряжений, которая в прокатных профилях частично компенсируется устройством закруглений во внутренних углах. Поэтому эпюра вертикальных напряжений в пределах толщины полки носит условный характер.

В полках двутаврового сечения действуют горизонтальные касательные напряжения, примерно одинаковые по толщине полок, которые тоже можно определить по формуле Журавского. Для этого вычисляют статический момент части полки, отделенной вертикальным сечением и имеющей форму прямоугольника со сторонами t и $0,5b - y$ (рис. 6.27). Эта величина равна

$$S_z^o = t\left(\frac{b}{2} - z\right)\frac{h-t}{2} \qquad (6.57)$$

и меняется по линейному закону.

Максимальный статический момент по этой формуле получается на границе со стенкой при $z = 0,5s$:

$$S_z^o = t\frac{(b-s)(h-t)}{4}. \qquad (6.58)$$

Соответственно и касательные напряжения меняются линейно от 0 на краю полки до максимального значения у границы со стенкой (рис. 6.27). Значение максимальных касательные напряжений в полке равно

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^o}{tI_z} = \frac{Q(b-s)(h-t)}{4I_z}. \qquad (6.59)$$

В зоне соединения полки со стенкой проявляется влияние концентрации напряжений, поэтому формулой (6.59) можно пользоваться достаточно условно, на некотором удалении от концентратора.

6.4.4. Условие прочности по касательным напряжениям

Условие прочности составляется для точек с максимальными касательными напряжениями при изгибе.

Поскольку эти точки находятся на нейтральной оси, где нормальные напряжения равны 0, то в них возникает напряженное состояние чистого сдвига. Поэтому максимальные касательные напряжения сравниваются с расчетным сопротивлением на срез (скалывание).

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}S_z^{\text{отс}}}{I_z b} \le R_s, \qquad (6.60)$$

где R_s – расчётное сопротивление материала на срез (скалывание).

Проверка по касательным напряжениям необходима:

− при значительных поперечных силах (как правило, вблизи опор балок),

− в сечениях составных и сварных балок, где толщина стенки меньше, чем в прокате,

– в сечениях деревянных балок, направленных вдоль волокон, т.к. у древесины сопротивление скалыванию значительно хуже, чем сопротивление поперечному срезу волокон.

6.4.5. Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней

Рассмотрим случай изгиба тонкостенного стержня, когда силовая плоскость проходят через ось балки и центральную главную ось сечения, не являющуюся осью симметрии (см. рис. 6.29).

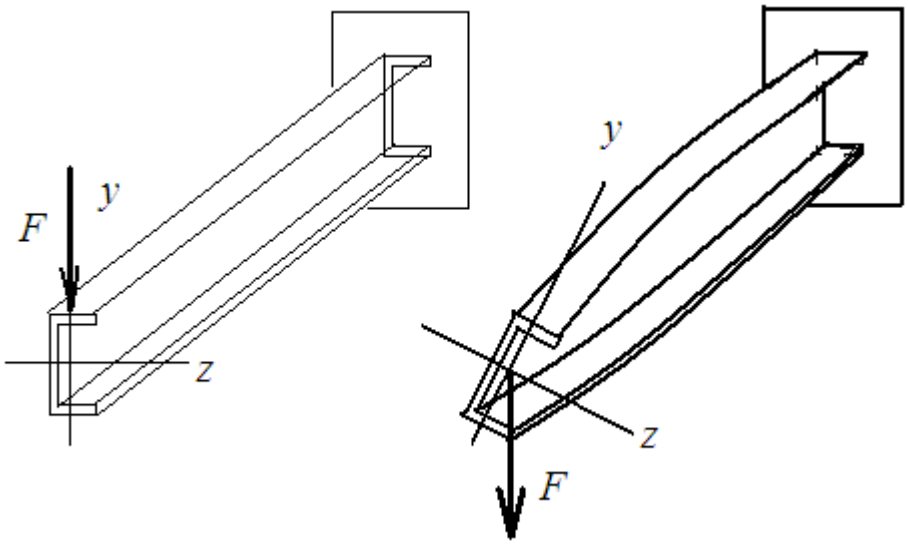


Рис. 6.29.

В этом случае балка кроме изгиба испытывает ещё и деформацию кручения. Дело в том, что для тонкостенных профилей точка, относительно которой поворачивается сечение при кручении, не всегда совпадает с центром тяжести (например, для швеллера). Такая точка называется центром кручения. Если поперечная нагрузка проходит через центр кручения, то суммарный момент касательных сил в сечении относительно этой точки равен нулю. Балка при этом будет испытывать только плоский изгиб. Поэтому центр кручения одновременно называется **центром изгиба**.

Если перемещать приложенную в центре тяжести сечения швеллера силу влево, то можно найти такую точку K, прикладывая в которой силу, можно избежать кручения (рис. 6.30).

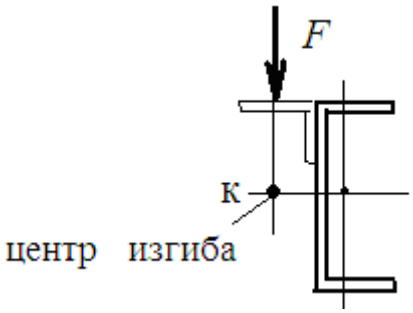


Рис. 6.30.

На практике, чтобы избежать кручения, к швеллеру, например, приваривают уголок, чтобы линия действия силы проходила через центр изгиба.

Если сечение имеет 2 оси симметрии (например, двутавр), то его центр изгиба совпадает с центром тяжести.

Если сечение имеет одну ось симметрии, то его центр изгиба лежит на оси симметрии. Положение центра изгиба для некоторых типов сечений показано на рис. 6.31.

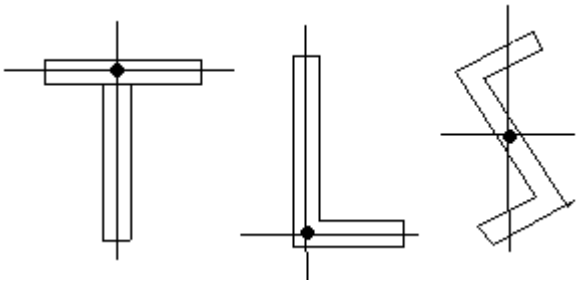


Рис. 6.31.

Положение центра изгиба можно найти в специальных таблицах сортамента или вычислить по готовым формулам, которые имеются в справочниках.

6.5. Напряженное состояние при изгибе

6.5.1. Главные напряжения при поперечном изгибе

При помощи формул $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$ (6.29) и $\tau = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{I_z b}$ (6.44) можно определить величину нормальных и касательных напряжений по площадкам в плоскости поперечного сечения балки при изгибе.

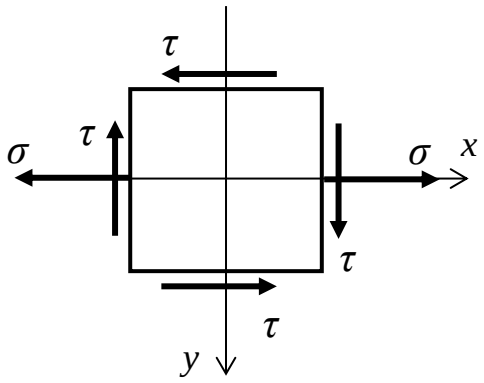


Рис. 6.32.

Напряженное состояние в точках сечения изгибаемой балки является плоским. Причем, ввиду отсутствия давления слоев друг на друга нормальные напряжения σ_y, действующие перпендикулярно оси стержня, равны нулю. Остаются два ненулевых компонента напряженного состояния: нормальное напряжение $\sigma_x = \sigma$ и касательное напряжение $\tau_{xy} = \tau$. Такое напряженное состояние, характерное для изгиба, принято называть балочным напряженным состоянием (рис. 6.32).

Вычислим, используя формулы теории плоского напряженного состояния, величины главных напряжений и положение главных площадок при балочном напряженном состоянии.

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,; \qquad (6.61)$$

$$\operatorname{tan} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma}. \qquad (6.62)$$

При этом главные напряжения всегда будут иметь наименования $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ и $\sigma_3 = \sigma_{\min}$.

Наибольшие касательные напряжения $\tau_{\max}$ будут действовать под углом 45° к главным площадкам. Их величина равна

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}\,. \qquad (6.63)$$

6.5.2. Проверки прочности в общем случае изгиба

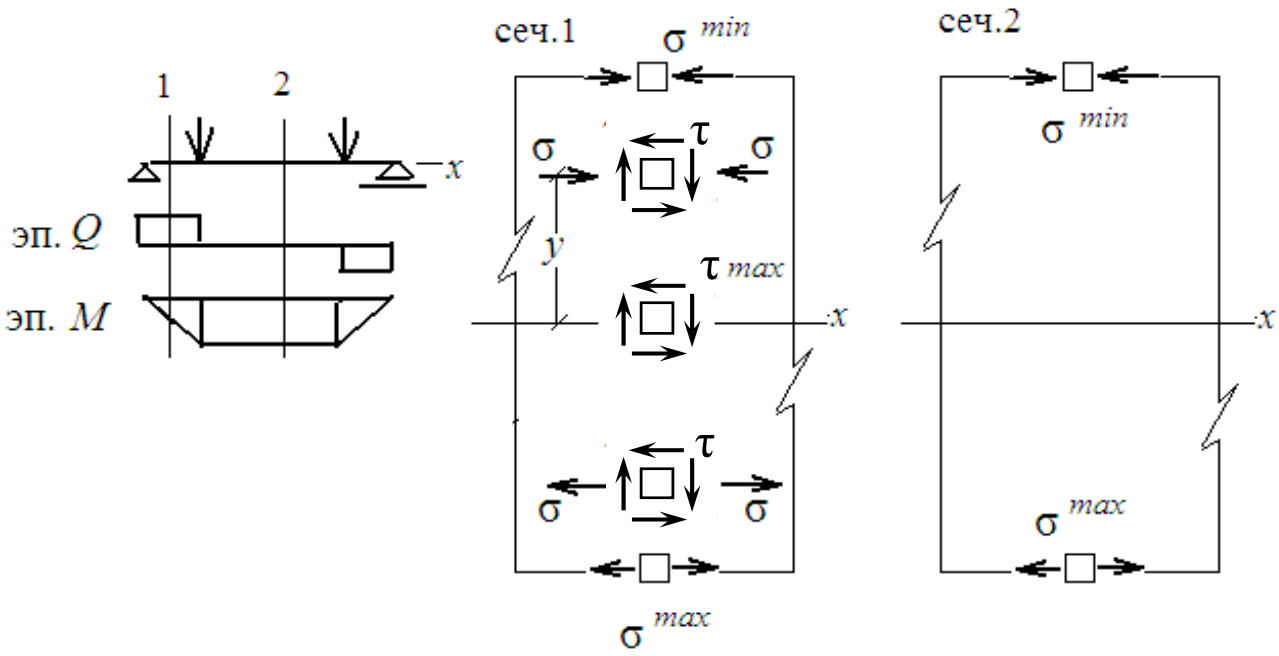


Рис. 6.33.

В сечении 2 балки, показанной на рис. 6.33, возникает чистый изгиб. В каждой из точек сечения имеет место линейное напряженное состояние (сжатие либо растяжение). Максимальные нормальные напряжения действуют в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

В сечении 1 этой же балки наблюдается поперечный изгиб. В точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, действуют только максимальные нормальные напряжения. В точках на нейтральной оси возникает чистый сдвиг при максимальных по величине касательных напряжениях. В промежуточных точках сечения имеет место балочное напряженное состояние с нормальными и касательными напряжениями.

Опасными точками при проверке прочности по нормальным напряжениям являются точки крайних волокон, наиболее удаленные от нейтральной оси сечения. Поскольку максимальные нормальные напряжения линейно связаны с изгибающим моментом, опасным сечением будет сечение с максимальным моментом M_z (сеч. 2, рис. 6.33).

При проверке прочности по касательным напряжениям опасные точки расположены на нейтральной оси сечения. Опасное

сечение с такими опасными точками – это сечение с максимальной поперечной силой (сеч. 1, рис. 6.33).

В промежуточных точках сечения при балочное напряженном состоянии проверка прочности производится по главным напряжениям, с использованием соответствующей материалу теории прочности. При расчёте по главным напряжениям опасными сечениями будут те, в которых одновременно действуют относительно большие по величине σ и τ, то есть в этих сечениях должны быть достаточно велики и поперечная сила, и изгибающий момент. Эти сечения не обязательно совпадают с теми, где по отдельности M или Q достигают своего максимума.

Получим выражения для эквивалентных напряжений при балочном напряженном состоянии по различным теориям прочности.

2 теория прочности.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \mu\frac{\sigma}{2} + \frac{\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} =$$

$$= \frac{1-\mu}{2}\sigma + \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,. \qquad (6.64)$$

3 теория прочности.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,. \qquad (6.65)$$

4 теория прочности.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2\right]}\,. \qquad (6.66)$$

Вычислим компоненты формулы (6.66).

$$\sigma_1^2 = \left[\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right]^2 = \frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + \frac{\sigma^2 + 4\tau^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sigma^2 + \sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + 2\tau^2\right);$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{2}\left(\sigma^2 - \sigma\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} + 2\tau^2\right);$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 = \sigma^2 + 2\tau^2$$

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)^2 = \sigma^2 + 4\tau^2.$$

Тогда после подстановок в (6.66)

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\sigma^2 + 6\tau^2\right)} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}\ . \qquad (6.67)$$

Теория прочности Мора.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} - k\frac{\sigma}{2} + \frac{k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} =$$

$$= \frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\ . \qquad (6.68)$$

Если сравнить эпюры σ и τ для различных поперечных сечений, то можно увидеть, что по высоте сечения в балках прямоугольного сечения нет точек, где одновременно нормальные и касательные напряжения близки к своим максимумам.

В балках из прокатных профилей такие точки есть. Это точки перехода стенки в полку, где резко меняется ширина сечения (точки *A*, рис. 6.34).

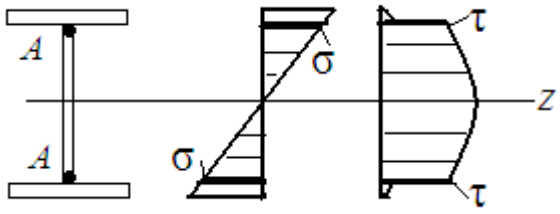


Рис. 6.34.

Проверка прочности прокатных и тонкостенных сварных балок по главным напряжениям сводится к проверке эквивалентных напряжений по третьей или по четвертой (энергетической) теории прочности. Условия прочности, выраженные через эквивалентные напряжения, имеют вид:

по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le R; \qquad (6.69)$$

по четвертой теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le R. \qquad (6.70)$$

В расчетах строительных конструкций по нормам проектирования используется условие прочности по четвертой теории.

Пример 6.3. (см. Пример 6.2).

Для приведённой в примере 6.2 балки подобрать сечение из двутавра. Проверить прочность по касательным и эквивалентным напряжениям.

Расчётное сопротивление $R = 240$ МПа,

Расчётное сопротивление на срез $R_s = 130$ МПа.

Решение: переводим единицы измерения: R = 240 МПа = 24 кН/см^2; R_s = 130 МПа = 13 кН/см^2.

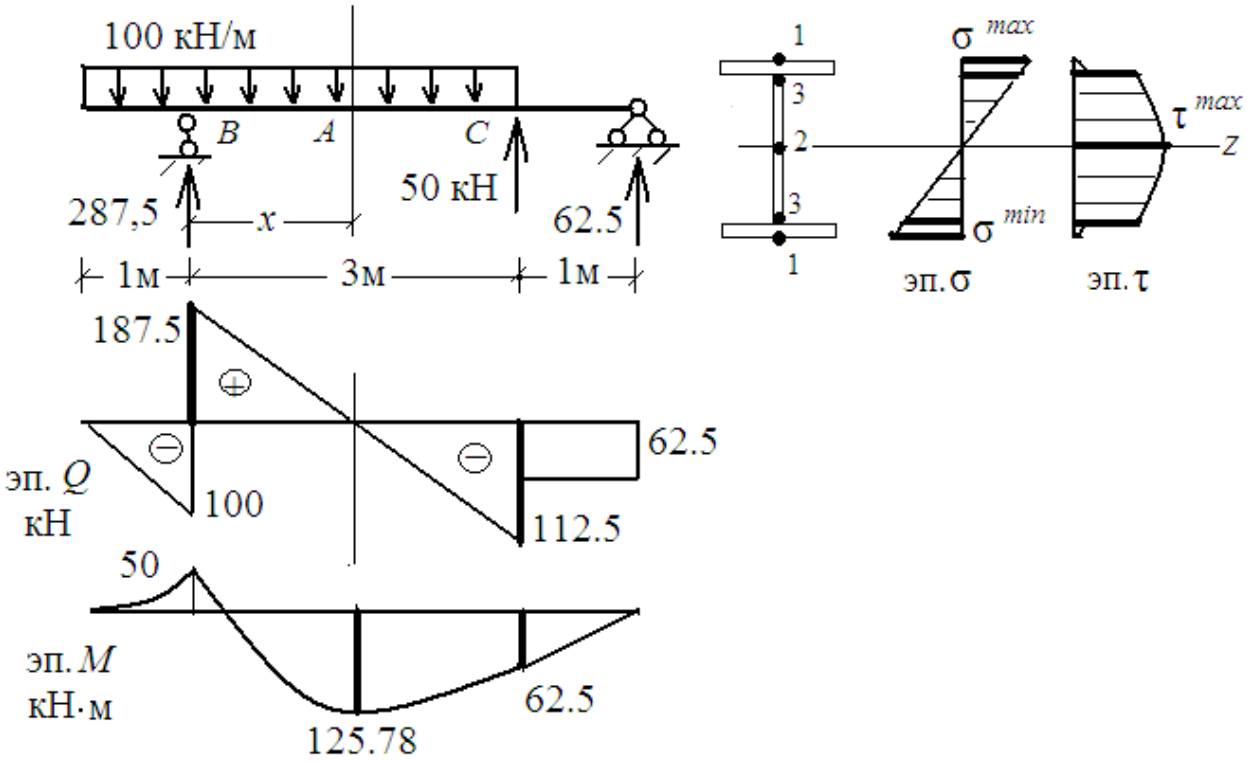


Рис. 6.35.

В примере 6.2 были построены эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 6.35).

1) Подбор сечения. Опасное сечение A, опасные точки 1.

Максимальный изгибающий момент:

$M_z^{\max} = 125,78$ кНм = 12578 кНсм;

Условие прочности по нормальным напряжениям:

$\sigma_{\max} = \dfrac{M_z}{W_z} \le R$. Отсюда подбираем момент сопротивления:

$$W_z \ge \frac{M_z}{R} = \frac{12578}{24} = 524 \text{ см}^3;$$ выбираем двутавр №33.

Характеристики сечения:

$W_z = 597$ см^3; $I_z = 9840$ см^4; $S_z = 339$ см^3; $h = 330$ мм = 33 см;

$b = 140$ мм = 14 см; $t = 11,2$ мм = 1,12 см; $s = 7$ мм = 0,7 см.

В сортаменте прокатной стали через S_z обозначен статический момент половины сечения относительно центральной оси; h –

высота сечения; b – ширина полки; t – толщина полки (для двутавра с наклонными внутренними гранями полок – средняя толщина полки); s – толщина стенки.

2) Проверяем прочность по касательным напряжениям.

Опасное сечение *B*, опасная точка 2.

Максимальная поперечная сила: $Q_{\max} = 187,5$ кН.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{I_z s} \le R_s .$$

В этой формуле $s = 0,7$ см – ширина сечения на уровне нейтрального слоя; S_z – статический момент отсеченной части сечения, которой для точки 2 является половина сечения.

$\tau_{\max} \dfrac{187,5 \cdot 339}{9840 \cdot 0,7} = 9,23 \ \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2} < 13 \ \dfrac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. Прочность обеспечена.

3) Проверяем прочность по эквивалентным напряжениям.

Опасное сечение *B*, опасные точки 3.

Условие прочности по эквивалентным напряжениям:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le R .$$

Определяем по эпюрам усилия в сечении:

$Q_B = 187,5$ кН; $M_B = 50$ кНм = 5000 кНсм.

Определяем геометрические характеристики сечения (рис. 6.36):

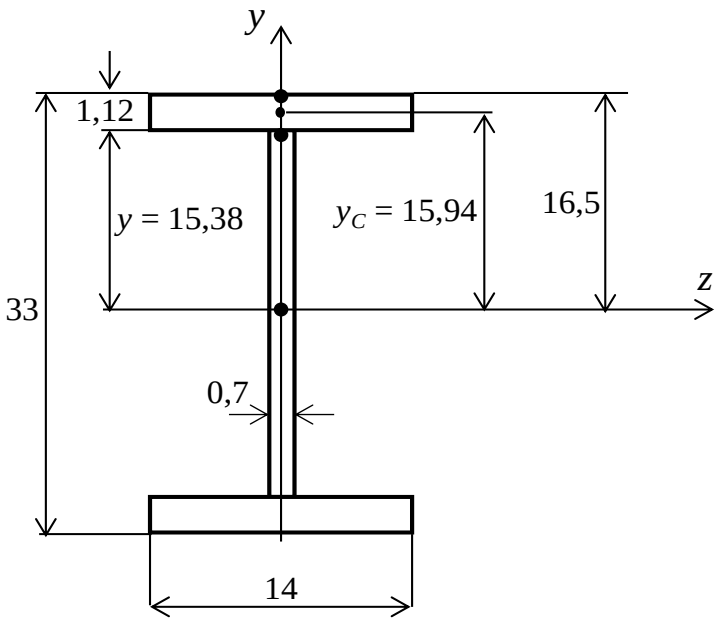


Рис. 6.36.

$$y = \frac{33}{2} - 1{,}12 = 15{,}38 \text{ см.}$$

$$y_C = \frac{33}{2} - \frac{1{,}12}{2} = 15{,}94 \text{ см.}$$

$$A_{\text{отс}} = 14 \cdot 1{,}12 = 15{,}68 \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{отс}} = A_{\text{отс}} y_C = 15{,}68 \cdot 15{,}94 = 249{,}94 \text{ см}^3.$$

Вычисляем напряжения:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{5000}{9840} \cdot 15{,}38 = 7{,}82 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2};$$

$$\tau = \frac{Q S_z^{\text{отс}}}{I_z s} = \frac{187{,}5 \cdot 249{,}94}{9840 \cdot 0{,}7} = 6{,}8 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

В качестве ширины сечения для точек 3 тоже принимается толщина стенки s. Отсеченной частью сечения является полка двутавра. Проверяем прочность:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{7{,}82^2 + 3 \cdot 6{,}8^2} = 14{,}4 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < R = 24 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Можно так же проверить прочность в сечении *C,* точки 3.

$Q_C = 112{,}5$ кН; $M_C = 62{,}5$ кНм = 6250 кНсм.

$$\sigma = 9{,}77 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}; \ \tau = 4{,}08 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}. \ \sigma_{\text{экв}} = 12{,}06 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < R = 24 \ \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Прочность обеспечена.

6.5.3. Расчет на изгиб балок моно-симметричного сечения

Рассмотрим балку, нагруженную поперечной нагрузкой в плоскости симметрии и несимметричную относительно другой главной оси. Материал балки имеет различные расчетные сопротивления растяжению и сжатию, причем $R_{\text{р}} \ll R_{\text{с}}$.

Примером может служить балка таврового сечения (рис. 6.37). Центр тяжести сечения смещен относительно середины высоты в сторону полки. Следовательно, при изгибе высота растянутой и сжатой зон будет различной. Для рациональной работы материала необходимо расположить сечение таким образом, чтобы высота растянутой зоны была меньше, чем сжатой. Тогда максимальные растягивающие напряжения по модулю будут меньше максимальных сжимающих. Например, если изгибающий момент в сечении растягивает нижние волокна стержня, то сечение следует расположить полкой вниз.

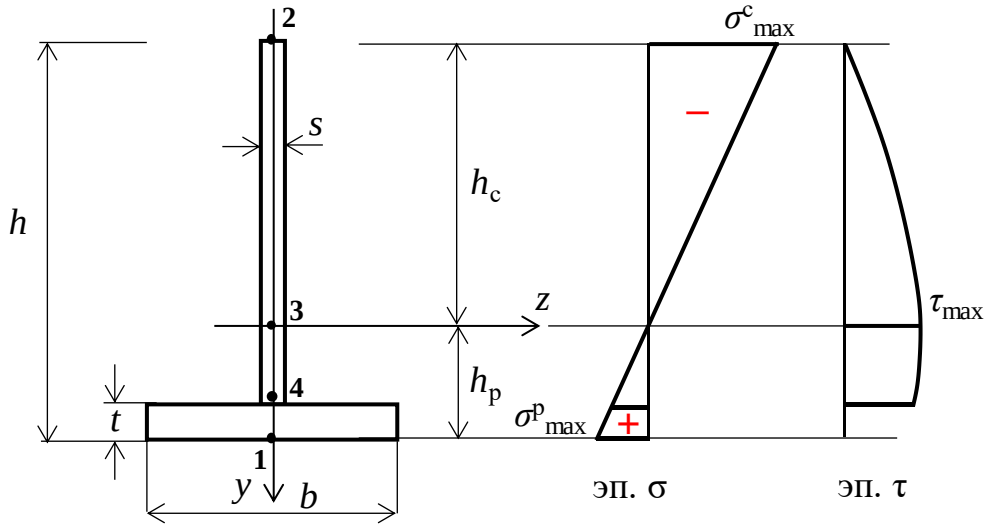


Рис. 6.37.

При расчете моно-симметричного сечения надо прежде всего определить положение центра тяжести и вычислить величину главного центрального момента инерции относительно нейтральной оси z. Затем рассчитываются высоты растянутой и сжатой зон h_{p} и h_{c}.

Проверки прочности начинают с точки 1, в которой действуют максимальные нормальные напряжения, а касательные напряжения равны 0. Условие прочности для этой точки имеет вид

$$\frac{M_z}{I_z} h_{\text{p}} \le R_{\text{p}}. \qquad (6.71)$$

Затем проверяют прочность в точке 2 с максимальными сжимающими напряжениями, где напряженное состояние тоже линейное:

$$\frac{M_z}{I_z} h_{\text{c}} \le R_{\text{c}}. \qquad (6.72)$$

Проверка прочности в точке 3 производится из условия прочности при чистом сдвиге:

$$\tau_{\max} = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{sI_z} \le R_{\text{s}}. \qquad (6.73)$$

Статический момент отсеченной части сечения проще всего вычислить по верхней части:

$$S_z^{\text{отс}} = sh_{\text{c}} \frac{h_{\text{c}}}{2} = \frac{sh_{\text{c}}^2}{2}. \qquad (6.74)$$

Если расчетное сопротивление сдвигу не известно, его можно вычислить по теории прочности Мора:

$$R_s = \frac{R_\text{р}}{1+k}. \qquad (6.75)$$

Наконец, в точке 4 на границе с полкой напряжения в стенке проверяются при балочном напряженном состоянии по теории Мора. Вычисляются нормальные напряжения:

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y_4 = \frac{M_z}{I_z}\left(h_\text{р} - t\right). \qquad (6.76)$$

Определяется статический момент отсеченной части сечения. В нашем случае это статический момент полки:

$$S_z^{\text{отс}} = bt\left(h_\text{р} - 0{,}5t\right). \qquad (6.77)$$

После этого можно вычислить касательные напряжения:

$$\tau = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{sI_z}. \qquad (6.78)$$

Теперь, подставив найденные значения нормального и касательного напряжения в эквивалентное напряжение, проверяют прочность в точке 4 по теории прочности Мора:

$$\frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le R_\text{р}. \qquad (6.79)$$

Методические указания к выполнению контрольных работ

Содержание контрольных работ

КР № 1. **Осевое растяжение и сжатие стержня.**

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в стержне при растяжении и сжатии.

Задача № 1.2. Подбор сечения статически определимого стержня при растяжении-сжатии.

Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении и сжатии.

КР № 2. Плоское напряженное состояние. Кручение.

Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния.

Задача № 2.2. Подбор круглого сечения стержня (вала) при кручении.

КР № 3. Плоский изгиб прямолинейного стержня.

Задача № 3.1. Подбор сечения стальной двутавровой балки при изгибе из условия прочности.

Порядок получения индивидуального задания

Исходные данные для выполнения каждой работы студент выписывает из приведённых в каждом задании таблиц и схем в соответствии со своим шифром. Шифром являются три последних цифры номера зачётной книжки или студенческого билета. Например, номер зачётной книжки 18549: первая цифра шифра – 5, вторая – 4, третья – 9.

Общие требования к оформлению контрольных работ

Контрольная работа выполняется на стандартных листах писчей бумаги (формат А-4). Заполняется только одна сторона листа (см. приложение 2, стр. 36).

На титульном листе указываются номер и название работы, фамилия, имя и отчество студента, номер группы и специальность, индивидуальный шифр. Работа должна быть сброшюрована.

Расчётная схема изображается в масштабе длин. На ней указываются все необходимые данные в численном виде (размеры, нагрузки и др.), которые выписываются из таблиц. Все расчёты приводятся в краткой форме.

Небрежно выполненные и выполненные не по шифру работы к проверке не принимаются.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Осевое растяжение и сжатие стержня.

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в стержне при растяжении и сжатии.
Задача № 1.2. Подбор сечения статически определимого стержня при растяжении-сжатии.
Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении и сжатии.

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в стержне при растяжении и сжатии.

Задание: Определить продольные силы, нормальные напряжения и деформации в стержне. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных ε и абсолютных Δl деформаций. Определить удлинение (укорочение) свободного конца стержня.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 1.1 и схемам, представленным на рис. 1.1. Принять значение модуля продольной упругости равным $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему стержня с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить на каждом участке стержня величину продольных сил и построить эпюру N.

3. Определить нормальные напряжения на каждом участке. Построить эпюру нормальных напряжений σ.

4. Определить относительную деформацию на каждом участке. Построить эпюру относительных деформаций ε.

5. Определить абсолютное удлинение (укорочение) на каждом участке**.** Построить эпюру абсолютных деформаций Δl. Определить общее абсолютное удлинение (укорочение) бруса.

Таблица 1.1.

Первая цифра шифра	A_1 см^2	F_1 кН	l_1 см	Вторая цифра шифра	A_2 см^2	F_2 кН	l_2 см	Третья цифра шифра (№схемы)	A_3 см^2	F_3 кН	F_4 кН	l_3 см	a см	b см
0	4	60	10	0	9	150	7	0	14	160	0	14	3	4
1	5	50	12	1	10	140	6	1	15	0	80	12	4	3
2	6	70	14	2	11	130	8	2	16	170	0	15	2	5
3	7	80	16	3	12	120	9	3	17	0	90	16	2	2
4	8	90	8	4	13	110	10	4	18	150	0	8	3	4
5	4	110	6	5	9	90	11	5	20	0	100	10	4	3
6	5	120	9	6	10	100	12	6	18	140	0	8	5	2
7	6	130	11	7	11	80	14	7	16	0	110	6	2	5
8	7	140	12	8	12	70	15	8	14	135	0	10	3	4
9	8	150	10	9	13	60	16	9	19	0	70	12	4	3

Пример решения задачи № 1.1. Определить продольные силы, напряжения и деформации в стержне. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных и абсолютных деформаций.

Размеры участков и нагрузки показаны на рисунке. Площади поперечных сечений равны: $A_1 = 4$ см^2, $A_2 = 2$ см^2, $A_3 = 5$ см^2.

• Определяем опорную реакцию в опоре А:

$$\sum X = 0;\ -10 + 35 - 40 + 20 - R_a = 0;\ R_a = 5 \text{ кН}.$$

• Определяем величину продольных сил на каждом участке по формуле

$$N_i = \sum F_i^{\text{отс}}:\ N_1 = 0;\ N_1 = 10 \text{ кН};\ N_3 = 10 - 35 = -25 \text{ кН}.$$

$$N_4 = 10 - 35 + 40 = 15 \text{ кН};\ N_5 = -5 + 20 = 15 \text{ кН};\ N_6 = -5 \text{ кН}.$$

Строим эпюру N в кН**.**

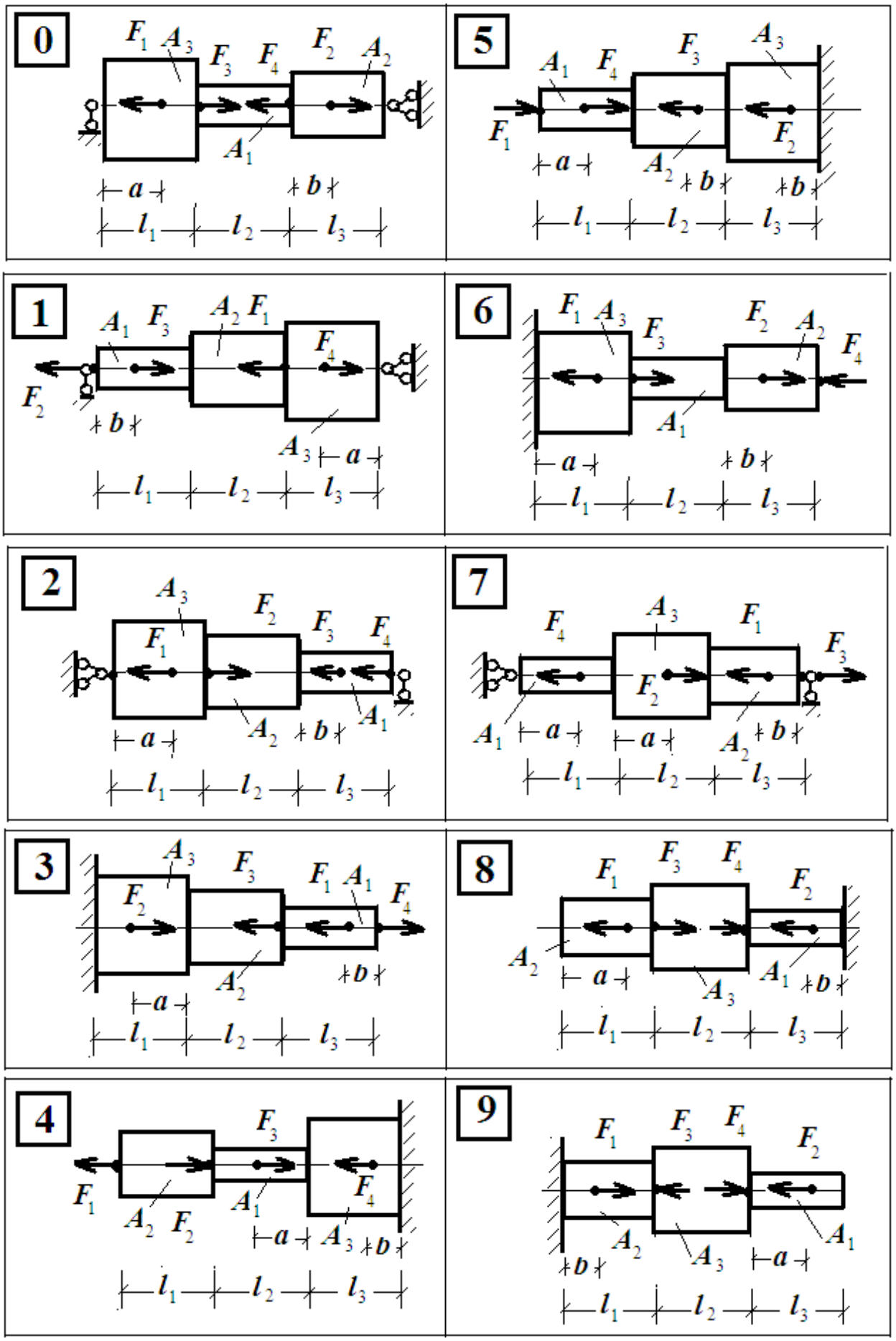

0
F_1 A_3 F_3 F_4 F_2 A_2
A_1
a b
l_1 l_2 l_3
5
A_1 F_4 F_3 A_3
F_1 F_2
a A_2 b b
l_1 l_2 l_3
1
A_1 F_3 A_2 F_1 F_4
F_2 b A_3 a
l_1 l_2 l_3
6
F_1 A_3 F_3 F_2 A_2 F_4
A_1
a b
l_1 l_2 l_3
2
A_3 F_2
F_1 F_3 F_4
a A_2 b A_1
l_1 l_2 l_3
7
F_4 A_3 F_1 F_3
F_2
A_1 a a A_2 b
l_1 l_2 l_3
3
A_3 F_3 F_1 A_1 F_4
F_2 A_2 b
a
l_1 l_2 l_3
8
F_1 F_3 F_4 F_2
A_2 a A_1 b
A_3
l_1 l_2 l_3
4
F_3
F_1 A_1 F_4
A_2 F_2 a A_3 b
l_1 l_2 l_3
9
F_1 F_3 F_4 F_2
A_2 A_1
b A_3 a
l_1 l_2 l_3

Рис. 1.1.

• Определяем нормальные напряжения на каждом участке по формуле $\sigma = \frac{N_i}{A_i}$ и строим эпюру σ: $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = \frac{10}{4} = 2,5$ кН/см^2; $\sigma_3 = \frac{-25}{2} = -12,5$ кН/см^2; $\sigma_4 = \frac{15}{2} = 7,5$ кН/см^2; $\sigma_5 = \frac{15}{5} = 3$ кН/см^2; $\sigma_6 = \frac{-5}{5} = -1$ кН/см^2;

• Определяем относительное удлинение (укорочение) на каждом участке по формуле: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \cdot 100\%$; $E = 1 \cdot 10^4$ МПа =1000 кН / см^2:

$\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0,25\%$; $\varepsilon_3 = -1,25\%$; $\varepsilon_4 = 0,75\%$; $\varepsilon_5 = 0,3\%$; $\varepsilon_6 = -0,1\%$.

Знак плюс говорит о том, что стержень растянут, знак минус – о том, что стержень сжат.

• Определяем абсолютное удлинение (укорочение) на каждом участке по формуле $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$:

на участке №1: $\Delta l_1 = 0$;

на участке №2: $\Delta l_2 = \frac{10 \cdot 5}{1000 \cdot 4} = 12,5 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №3: $\Delta l_3 = \frac{-25 \cdot 6}{1000 \cdot 2} = -75 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №4: $\Delta l_4 = \frac{15 \cdot 3}{1000 \cdot 2} = 22,5 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №5: $\Delta l_5 = \frac{15 \cdot 4}{1000 \cdot 5} = 12 \cdot 10^{-3}$ см;

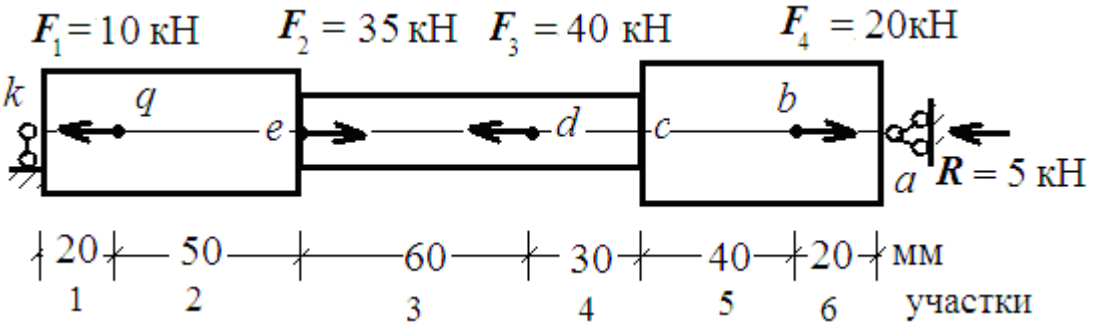
на участке №6: $\Delta l_6 = \frac{-5 \cdot 2}{1000 \cdot 5} = -2 \cdot 10^{-3}$ см.

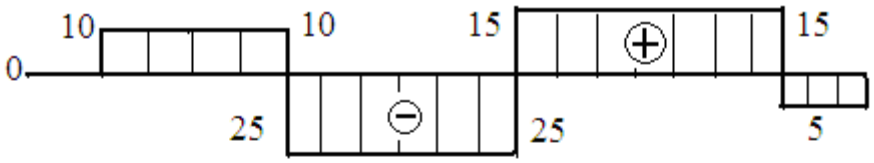
• Строим эпюру Δl начинаем с неподвижной точки а: $\Delta l_a = 0$;

в точке *b*: $\Delta l_b = \Delta l_6 = -2 \cdot 10^{-3}$ см;

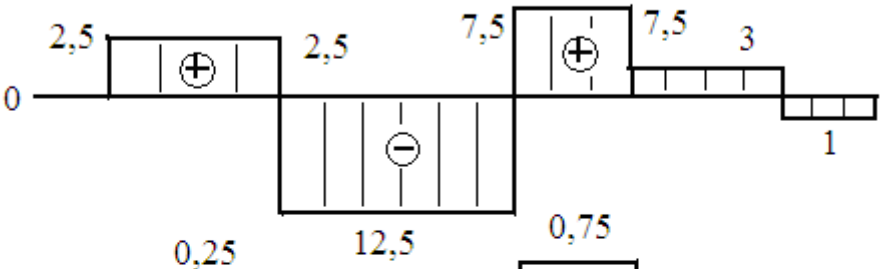
в точке *c*: $\Delta l_c = \Delta l_6 + \Delta l_5 = -2 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке *d*: $\Delta l_d = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 = 10 \cdot 10^{-3} + 22,5 \cdot 10^{-3} = 32,5 \cdot 10^{-3}$ см;

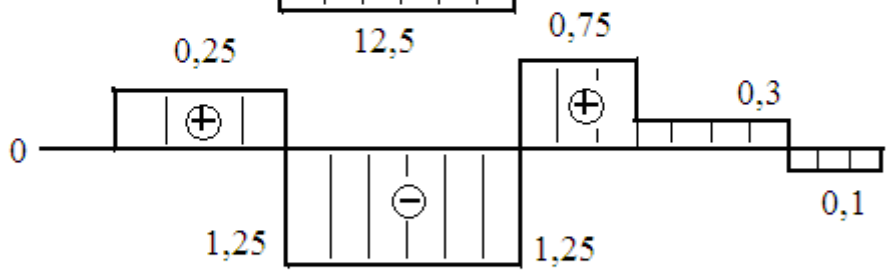




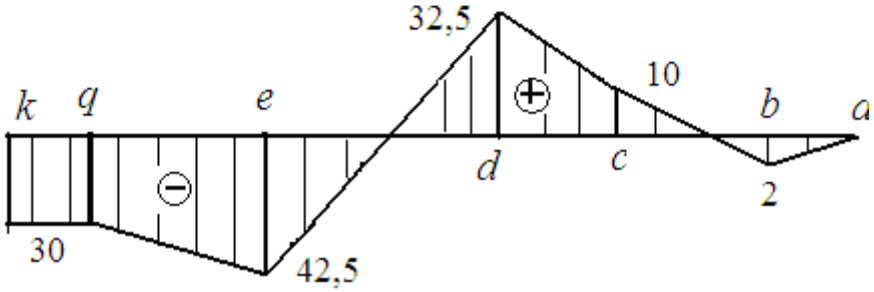
Эп. *N*, кН



Эп. σ, кН/см²



Эп. ε, %



Эп. Δl, см·10^{-3}

в точке *e*:

$$\Delta l_e = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 + \Delta l_3 = 32{,}5 \cdot 10^{-3} - 75 \cdot 10^{-3} = -42{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

в точке *q*:

$$\Delta l_q = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = -42{,}5 \cdot 10^{-3} + 12{,}5 \cdot 10^{-3} = -30 \cdot 10^{-3} \text{ см};$$

в точке *k*: $\Delta l_k = \Delta l_q = -30 \cdot 10^{-3}$ см, так как $\Delta l_1 = 0$.

• Вывод: стержень укоротился на 0,03 см.

Задача № 1.2. Подбор сечения статически определимого стержня при растяжении-сжатии.

Задание: Из условия прочности на растяжение (сжатие) подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной. Определить удлинение стержня *AC*

Исходные данные к задаче определить по таблице 1.2 и схемам, представленным на рис. 1.2. Принять значения: расчётного сопротивления материала R = 240 МПа**,** коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, модуля продольной упругости $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа.

Последовательность расчёта

1.Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Удалить стержень *AC,* заменив его усилием N_{AC} . Определить усилие $N_{AC.}$

3. Из условия прочности подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной.

4. Определить удлинение стержня *AC.*

Таблица 1.2

Первая цифра шифра	F кН	α°	Вторая цифра шифра	q кН/м	l_1 м	Третья цифра шифра (№ схемы)	l_2 м
0	20	30	0	20	1	0	2
1	30	45	1	12	2	1	1
2	80	60	2	10	1	2	2
3	40	30	3	12	2	3	1
4	60	45	4	20	1	4	2
5	50	60	5	14	2	5	1
6	40	30	6	10	1	6	2
7	60	45	7	20	2	7	1
8	80	60	8	10	1	8	2
9	50	30	9	20	2	9	1

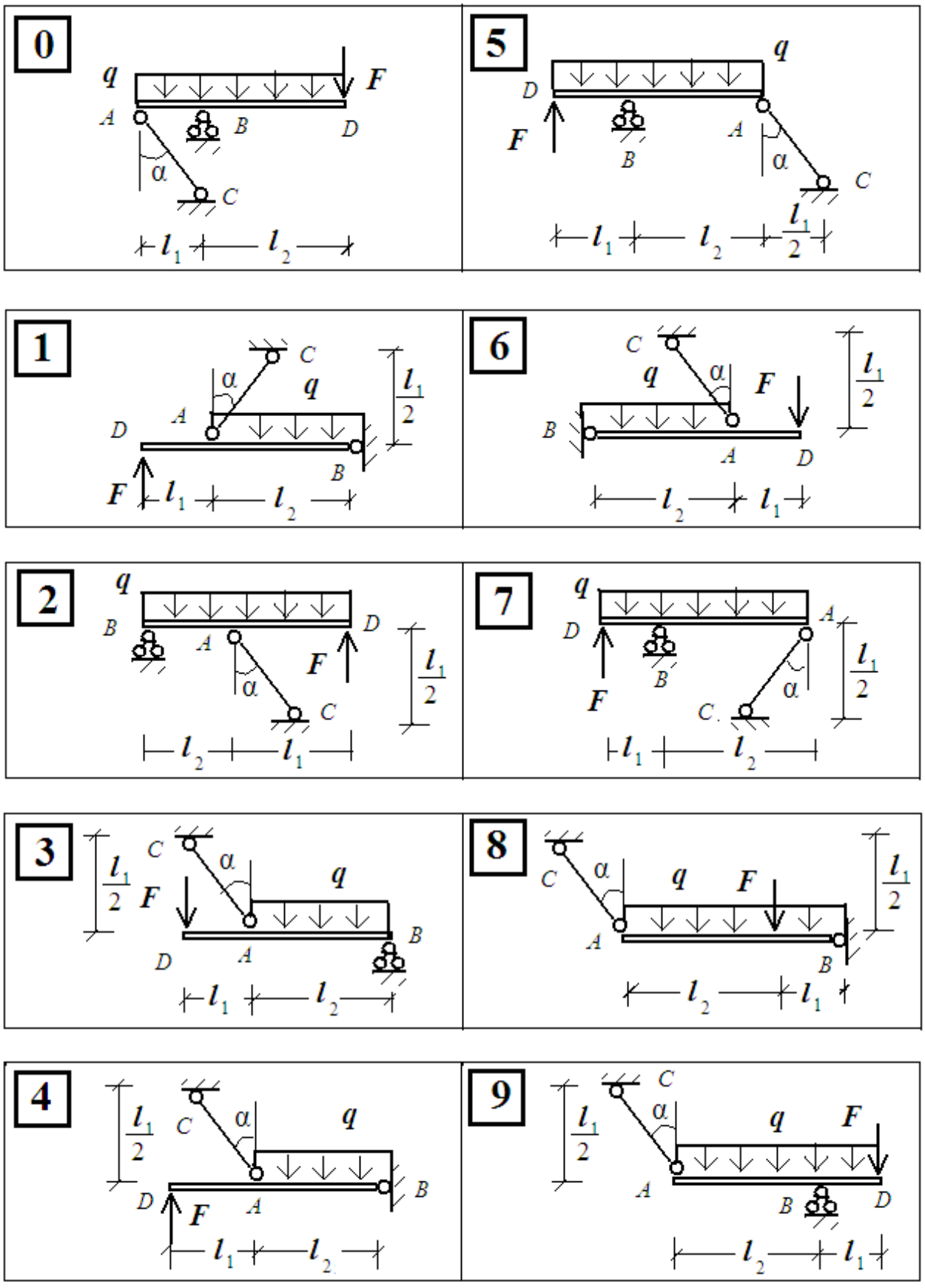
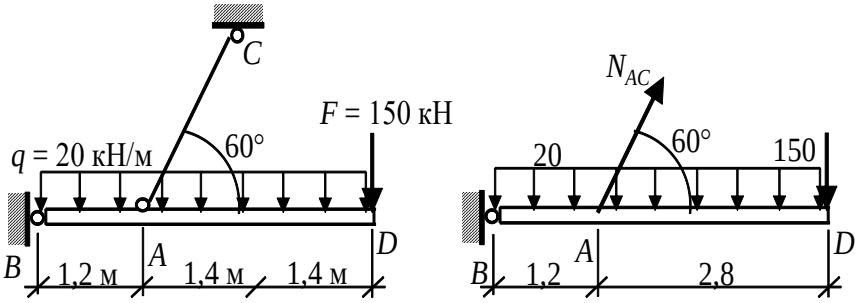

0
q
F
A
B
D
α
C
l1
l2
5
q
D
F
B
A
α
C
l1
l2
l1/2
1
C
α
q
A
D
B
F
l1
l2
l1/2
6
C
q
α
F
B
A
D
l1/2
l2
l1
2
q
B
D
A
F
α
C
l1/2
l2
l1
7
q
D
A
B
F
C
α
l1/2
l1
l2
3
l1/2
C
α
F
q
D
A
B
l1
l2
8
C
α
q
F
A
B
l1/2
l2
l1
4
l1/2
C
α
q
D
F
A
B
l1
l2
9
l1/2
C
α
q
F
A
B
D
l2
l1

Рис. 1.2

Пример решения задачи № 1.2: Брус абсолютной жёсткости *BD* поддерживается стержнем *AC*. Подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной. $F = 150$ кН; $q = 20$ кН/м; $\gamma_c = 1$; R = 240 МПа, $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа.

• Определяем усилие в стержне *AC*:

$\sum M_B = 0;\ -N_{AC} \cdot \sin 60^\circ \cdot 1{,}2 + F \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0;\ N_{AC} = 731{,}33$ кН.



• Условие прочности: $\sigma = \dfrac{N_{AC}}{A} \le \gamma_C R;\ \ R = 240$ МПа $= 24$ кН/см^2.

$\gamma_c = 1;\ A \ge \dfrac{N_{AC}}{R}\ \ A \ge \dfrac{731{,}33}{24} = 30{,}47$ см^2.

Принимаем 2 уголка ∟ 100×100×8; $A = 2 \cdot 15{,}6 = 31{,}2$ см^2 (см. сортамент проката).

• Определяем длину стержня *AC*: $l_{AC} = \dfrac{1{,}4}{\cos 60^\circ} = 2{,}8$ м= 280 см.

Определяем удлинение стержня *AC*:

$E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа $= 2{,}06 \cdot 10^4$ кН/см^2,

$\Delta l_{AC} = \dfrac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \dfrac{731{,}33 \cdot 280}{2{,}06 \cdot 10^4 \cdot 31{,}2} = 0{,}32$см.

Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении-сжатии

Задание: Определить продольные силы и нормальные напряжения в статически неопределимом брусе. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 1.3 и схемам, представленным на рис. 1.3. Принять значение модуля продольной упругости равным $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему стержня с указанием размеров и нагрузки.

2. Записать уравнения равновесия стержня под действием нагрузки и реакций опор.

3. Составить условие совместности деформаций участков стержня.

4. Записать физические соотношения в форме закона Гука для каждого участка стержня.

5. Решив совместно полученную систему уравнений, определить реакции опор и усилия на каждом участке. Построить эпюру продольных сил.

6. Вычислить нормальные напряжения на каждом участке и построить их эпюру.

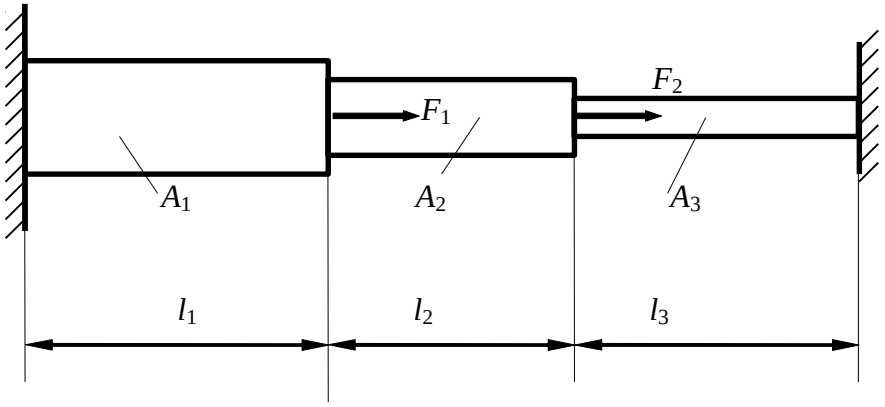


Рис. 1.3.

Таблица 1.3

Первая цифра шифра	A_1 см^2	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	A_3 см^2	l_1 см	l_2 см	Третья цифра шифра (№ схемы)	A_2 см^2	l_3 см
0	4	60	0	0	8	15	7	0	14	14
1	15	0	120	1	10	14	6	1	5	12
2	6	–70	0	2	12	13	8	2	16	15
3	17	0	100	3	7	12	9	3	7	16
4	8	90	0	4	13	11	10	4	18	8
5	14	0	–60	5	9	9	11	5	20	10
6	5	120	0	6	10	10	12	6	8	8
7	16	0	110	7	15	8	14	7	16	6
8	7	–80	0	8	6	7	15	8	14	10
9	12	0	–90	9	14	6	16	9	19	9

Пример решения задачи № 1.3.

Исходные данные для решения задачи: $A_1 = 4$ см^2, $A_2 = 8$ см^2, $A_3 = 5$ см^2. $l_1 = 10$ см, $l_2 = 6$ см, $l_3 = 12$ см. $F_1 = 80$ кН.

Изображаем расчетную схему стержня, заменяя опоры реакциями R_A и R_B, направления которых предполагаем противоположными действию силы F_1. Составляем уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось стержня x:

$\sum X = 0$. $F_1 - R_A - R_B = 0$.

Усилия в сечениях на участках стержня при этом равны

$N_1 = R_A$; $N_2 = N_3 = R_A - F_1 = -R_B$.

Поскольку расстояние между жесткими опорами стержня не меняется, его полная абсолютная деформация равна нулю:

$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$.

Это выражение представляет собой условие совместности деформаций.

Абсолютные деформации выражаем через усилия согласно закону Гука:

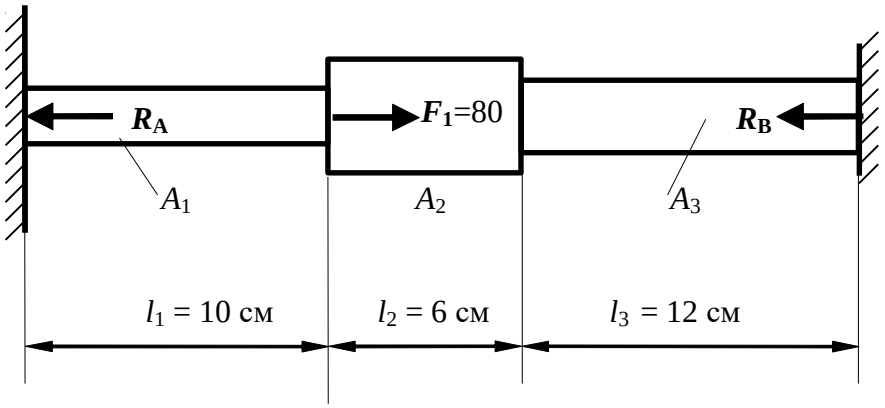
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A l_1}{EA_1};\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(R_A - F_1) l_2}{EA_2};\ \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{(R_A - F_1) l_3}{EA_3}.$$

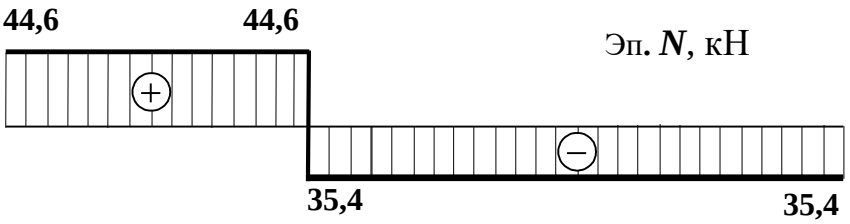
Решаем полученную систему уравнений. Вначале подставим формулы закона Гука в условие совместности деформаций:

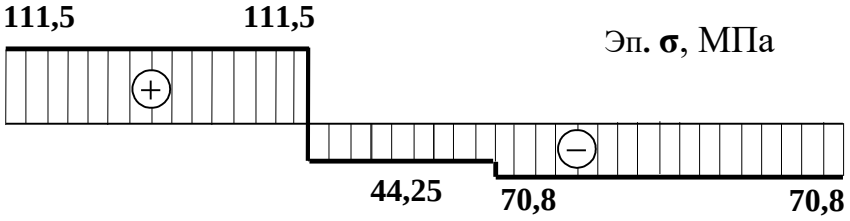
$$\frac{R_A l_1}{EA_1}+\frac{(R_A-F_1)l_2}{EA_2}+\frac{(R_A-F_1)l_3}{EA_3}=0.$$

Получено линейное уравнение относительно неизвестной R_A. Умножив его на E и приведя подобные члены, выразим R_A:

$$R_A=\frac{F_1(l_2/A_2+l_3/A_3)}{l_1/A_1+l_2/A_2+l_3/A_3}=\frac{80\cdot(6/8+12/5)}{10/4+6/8+12/5}=44{,}6 \text{ кН}.$$







Находим усилия в сечениях:

$$N_1=R_A=44{,}6 \text{ кН};\ N_2=N_3=R_A-F_1=44{,}6-80=-35{,}4 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил.

Вычисляем напряжения на участках:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1}=\frac{44{,}6}{4}\cdot 10=111{,}5 \text{ МПа}.\ \sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{-35{,}4}{8}\cdot 10=-44{,}25 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-35{,}4}{5} \cdot 10 = -70{,}8 \text{ МПа}.$$

Аналогично строим эпюру напряжений.

Определяем абсолютные деформации участков:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{111{,}5 \cdot 10}{10^5} = 11{,}15 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{-44{,}25 \cdot 6}{10^5} = -2{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{-70{,}8 \cdot 12}{10^5} = -8{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Проверяем равенство нулю суммарной деформации стержня:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = (11{,}15 - 2{,}66) \cdot 10^{-3} = 8{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 8{,}49 \cdot 10^{-3} - 8{,}49 \cdot 10^{-3} = 0\,.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Плоское напряженное состояние. Кручение

Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния

Задание: По заданным главным напряжениям на гранях элемента при плоском напряженном состоянии определить напряжения по наклонным площадкам и максимальные касательные напряжения.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 2.1 и схеме, представленной на рис. 2.1.

Последовательность расчёта

1. Обозначить заданные главные напряжения согласно принятым правилам их индексации и показать эти напряжения на чертеже с учетом их величины и направления.

2. Вычислить нормальное и касательное напряжения по наклонным площадкам с внешними нормалями x и y. Использовать при этом свойство инвариантности суммы нормальных напряжений и закон парности касательных напряжений. Показать эти напряжения на схеме.

3. Определить максимальные касательные напряжения и нормальные напряжения на площадках, где действуют максимальные касательные напряжения. Показать эти напряжения на схеме.

4. Проверить по вычисленным в пункте 2 напряжениям величины главных напряжений и угол наклона главных площадок по отношению к направлениям x и y.

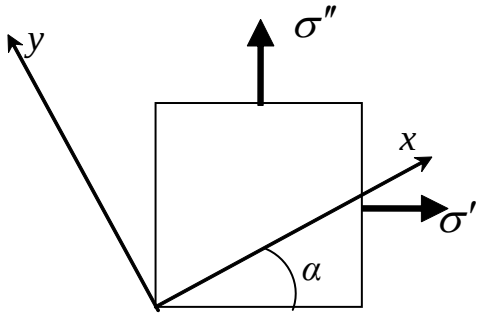


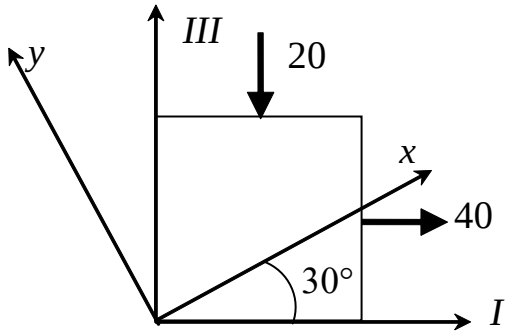
Рис. 2.1.

Таблица 2.1

Первая цифра шифра	σ', МПа	Вторая цифра шифра	σ'', МПа	Третья цифра шифра	α, градус
0	5	0	50	0	30
1	10	1	–5	1	60
2	15	2	40	2	45
3	20	3	–25	3	–30
4	30	4	35	4	–60
5	–10	5	–35	5	–45
6	–15	6	25	6	15
7	–20	7	–50	7	–75
8	–30	8	45	8	–15
9	–40	9	–45	9	75

Пример решения задачи № 2.1.

Исходные данные для решения задачи: $\sigma' = 40$ МПа, $\sigma'' = -20$ МПа, $\alpha = 30^\circ$.



1) По правилам индексации главных напряжений обозначаем $\sigma' = \sigma_1 = 40$ МПа и $\sigma'' = \sigma_3 = -20$ МПа. Показываем на рисунке напряжение $\sigma_1 = 40$ МПа от площадки (растяжение) и напряжение $\sigma_3 = 20$ МПа – на площадку (сжатие). Показываем направления главных осей I и III.

2) Определяем по расчетным формулам напряжения по площадке с нормалью x:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha = \frac{40 - 20}{2} + \frac{40 + 20}{2}\cos 60^\circ =$$

$= 10 + 30 \cdot 0,5 = 25$ МПа.

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha = \frac{40 + 20}{2} \sin 60^\circ = 30 \cdot 0,866 = 25,98 \text{ МПа}.$$

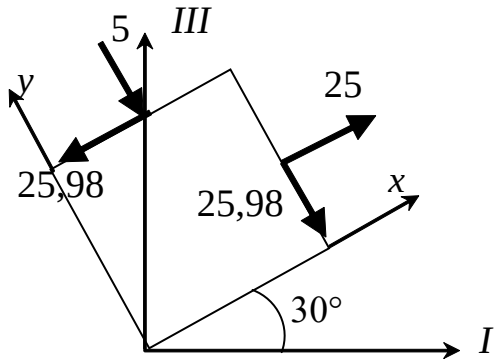
Из свойства постоянства суммы нормальных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам получаем:

$$\sigma_y = \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_x = 40 - 20 - 25 = -5 \text{ МПа}.$$

Согласно закону парности касательных напряжений:

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy} = -25,98 \text{ МПа}.$$

Показываем наклонные площадки и напряжения на них с учетом знаков.



3) Вычисляем максимальные касательные напряжения в заданной плоскости главных осей I и III (только величина).

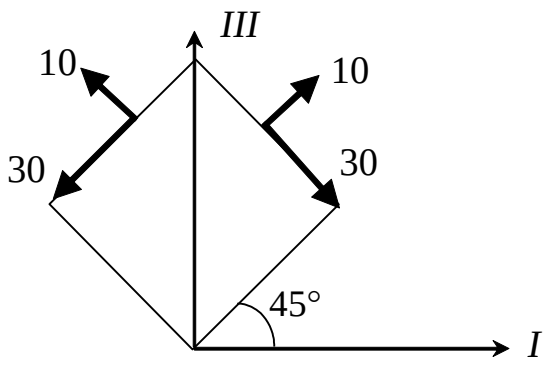
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{40 + 20}{2} = 30 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения на площадках с максимальными касательными напряжениями:

$$\sigma_{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{40 - 20}{2} = 10 \text{ МПа}.$$

Показываем величину и направление напряжений на схеме.

На рисунке показаны напряжения только по двум взаимно перпендикулярным площадкам. На других двух площадках напряжения симметричны относительно горизонтальной оси по отношению к напряжениям, показанным на рисунке.



4) По найденным в п. 2 напряжениям проверяем исходные величины главных напряжений:

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{25-5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(25+5\right)^2 + 4\cdot 25{,}98^2} = 10 \pm 30 \text{ МПа.}$$

$\sigma_1 = 10 + 30 = 40$ МПа. $\sigma_3 = 10 - 30 = -20$ МПа. Проверка выполнена.

Положение главных площадок. Определяем угол наклона главной оси по отношению к оси x:

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2\cdot 25{,}98}{25+5} = -1{,}732.$$

$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(-1{,}732\right) = -30^\circ$ $\alpha = -\alpha_0 = 30^\circ$, что соответствует заданному углу от оси I до оси x. Проверка выполнена.

Задача № 2.2. Подбор круглого сечения стержня (вала) при кручении

Задание: Стальной вал переменного сечения нагружен внешними скручивающими моментами M_1, M_2 и M_3. Определить диаметры обеих частей вала из условия прочности. Проверить жёсткость вала при допустимом погонном угле закручивания 1,7 град/м. Построить эпюру крутящих моментов. Принять значения: расчётного сопротивления на срез: $R_{ср.} = 80$ МПа, модуля сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Исходные данные к задаче определить по таблице 2.2 и схемам, представленным на рис. 2.2.

Таблица 2.2

Первая цифра шифра	l_1 см	$\frac{d}{D}$	Вторая цифра шифра	l_2 см	M_1 кН·м	Вид Сеч. 1-1	Вид Сеч. 2-2	Третья цифра шифра	№ схемы	M_2 кН·м	M_3 кН·м	l_3 см
0	40	0,8	0	20	–20	спл.	пол.	0	1	–20	40	30
1	30	0,7	1	40	30	пол.	спл.	1	2	30	–20	20
2	20	0,8	2	30	–40	спл.	пол.	2	1	–20	40	40
3	30	0,6	3	20	20	пол.	спл.	3	2	20	–30	30
4	20	0,7	4	30	–30	спл.	пол.	4	1	–10	40	20
5	40	0,6	5	40	20	пол.	спл.	5	2	10	–30	40
6	30	0,8	6	30	–40	спл.	пол.	6	1	–20	40	20
7	20	0,6	7	20	20	пол.	спл.	7	2	10	–30	30
8	30	0,7	8	20	–30	спл.	пол.	8	1	–20	30	20
9	40	0,9	9	40	10	пол.	спл.	9	2	20	–40	40

Примечания к таблице:

1. Вид сечения «спл.» означает: сечение круглое, сплошное, диаметром d*. Вид сечения «пол.» означает: сечение круглое полое (труба) с соотношением диаметров* $\alpha = \frac{d}{D}$.

2. Знак минус у величины момента означает, что момент имеет противоположное направление.

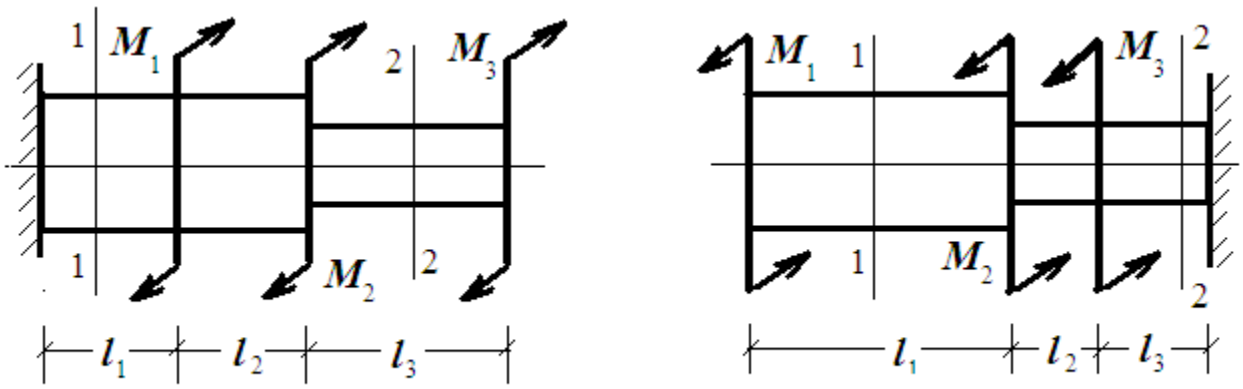


Схема стержня № 1 Схема стержня № 2

Рис. 2.2. Схемы вариантов закрученного стержня

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему стержня с указанием размеров и всех необходимых для расчёта данных.

2. Построить эпюру крутящих моментов.

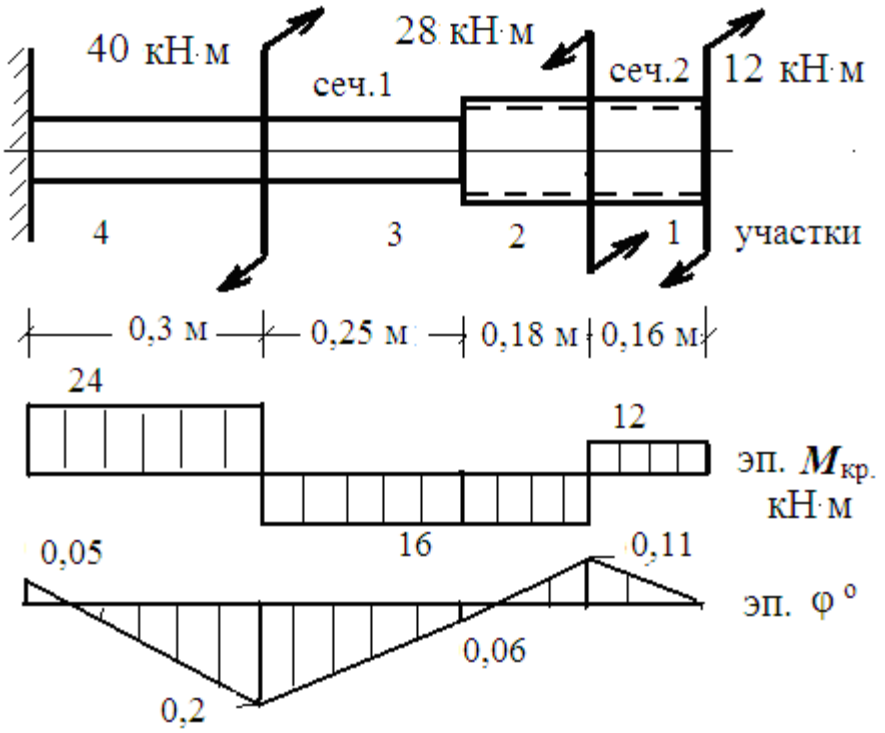
3. Определить опасные сечения для каждого вида поперечного сечения.

4. Определить диаметр вала из условия прочности для каждого вида поперечного сечения.

5. Проверить жесткость вала.

Пример расчёта

Стальной стержень (вал) круглого переменного поперечного сечения подвержен действию скручивающих моментов. Подобрать из условия прочности поперечное сечение обеих частей вала: сеч.1 – круглое сплошное сечение диаметром d; сеч.2 – круглое полое (трубчатое) сечение с соотношением диаметров $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}8$. Проверить жёсткость обеих частей вала при допустимом погонном угле закручивания 1,7 град/м. Построить эпюру крутящих моментов. Принять значения: расчётного сопротивления на срез: $R_{ср.} = 80$ МПа , модуля сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа .



• Определяем величину крутящего момента на каждом участке вала. Строим эпюру крутящих моментов.

• Определяем «опасное сечение» для каждого вида поперечного сечения:

для сеч.1: $M_{кр}^{max} = 24$ кН·м = 2400 кН·см,

для сеч.2: $M_{кр}^{max} = 16$ кН·м = 1600 кН·см.

• Определяем сечение вала из условия прочности: $\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} \le R_{ср}$

;

$$R_{ср} = 80 \text{ МПа} = 8 \text{ кН/см}^2;\ W_p \ge \frac{M_{кр}^{max}}{R_{ср}}.$$

Для сплошного круглого сечения:

$$W_p = 0,2d^3;\ d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{кр}^{max}}{0,2R_{ср}}} = \sqrt[3]{\frac{2400}{0,2 \cdot 8}} = 11,45 \text{ см}.$$

Принимаем $d_{спл.} = 12$ см.

Для полого круглого (трубчатого сечения):

$$W_p = 0,2D^3\left(1-\alpha^4\right) = 0,2D^3\left(1-0,8^4\right) = 0,12D^3;$$

$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}^{\max}}{0{,}12R_{\text{ср}}}} = \sqrt[3]{\frac{1600}{0{,}12 \cdot 8}} = 11{,}86$ см. Принимаем $D_{\text{пол.}} = 12$ см. $d_{\text{пол.}} = 9{,}6$ см.

• Определяем полярные моменты инерции:

Сеч.1 (сплошное): $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = 0{,}1d^4 = 0{,}1 \cdot 12^4 = 2074$ см^4 = $2074 \cdot 10^{-8}$ м^4;

Сеч.2 (полое): $I_p = 0{,}1\left(D^4 - d^4\right) = 0{,}1 \cdot \left(12^4 - 9{,}6^4\right) = 1224$ см^4 = $1224 \cdot 10^{-8}$ м^4.

• Проверяем жёсткость стержня. Для этого определяем значение погонного угла закручивания на каждой части стержня с одинаковым сечением при максимальном крутящем моменте и сравниваем его с допустимым значением в радианах. Условие жёсткости:

$\varphi' = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_p} \leq \left[\varphi'\right]$, где $\left[\varphi'\right] = 1{,}7 \cdot \frac{3{,}14}{180} = 0{,}05$ рад/м.

Сеч. 1 (сплошное). $\varphi_1' = \frac{24}{8 \cdot 10^7 \cdot 2074 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0145 < 0{,}05$ рад/м.

Сеч. 2 (полое). $\varphi_2' = \frac{16}{8 \cdot 10^7 \cdot 1224 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0163 < 0{,}05$ рад/м.

Вывод: жёсткость обеспечена на всех участках.

• Определяем угол закручивания стержня на каждом участке по формуле $\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_p}$.

$$\varphi_1 = \frac{12 \cdot 0{,}16}{8 \cdot 10^7 \cdot 1224 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = 0{,}11^\circ;$$

$$\varphi_2 = \frac{-16 \cdot 0{,}18}{8 \cdot 10^7 \cdot 1224 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = -0{,}17^\circ;$$

$$\varphi_3 = \frac{-16 \cdot 0{,}25}{8 \cdot 10^7 \cdot 2074 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = -0{,}14^\circ;$$

$$\varphi_4 = \frac{24 \cdot 0{,}3}{8 \cdot 10^7 \cdot 2074 \cdot 10^{-8}} \cdot \frac{180}{3{,}14} = 0{,}25^\circ.$$

• Строим эпюру изменения угла закручивания по оси стержня. Для этого определяем значения угла закручивания на границах участков. Построение эпюры начинаем со свободного конца:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0{,}11 - 0{,}17 = -0{,}06^\circ.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -0{,}06 - 0{,}14 = -0{,}2^\circ.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}05^\circ.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Плоский изгиб прямолинейного стержня

Задача № 3.1. Подбор сечения стальной двутавровой балки при изгибе из условия прочности

Задание: Определить усилия в изгибаемой балке. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать сечение стальной двутавровой балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Проверить прочность по касательным и эквивалентным напряжениям. Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, допускаемого прогиба $[f] = l/400$, l – пролет между опорами, $d = 1$ м.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 3.1 и схемам, представленным на рис. 3.1.

Таблица 3.1

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	q_1 кН/м	q_2 кН/м	a м	Третья цифра шифра № схемы	b м	c м
0	100	0	0	0	30	1	0	2	4
1	0	100	1	40	0	0,6	1	1	5
2	120	0	2	0	20	1	2	3	2
3	0	120	3	50	0	0,8	3	4	2
4	200	0	4	0	40	1	4	5	1
5	0	200	5	20	0	0,4	5	2	3
6	60	0	6	0	50	1	6	4	1
7	0	60	7	30	0	0,6	7	5	1
8	150	0	8	0	60	1	8	3	2
9	0	150	9	20	0	0,4	9	2	4

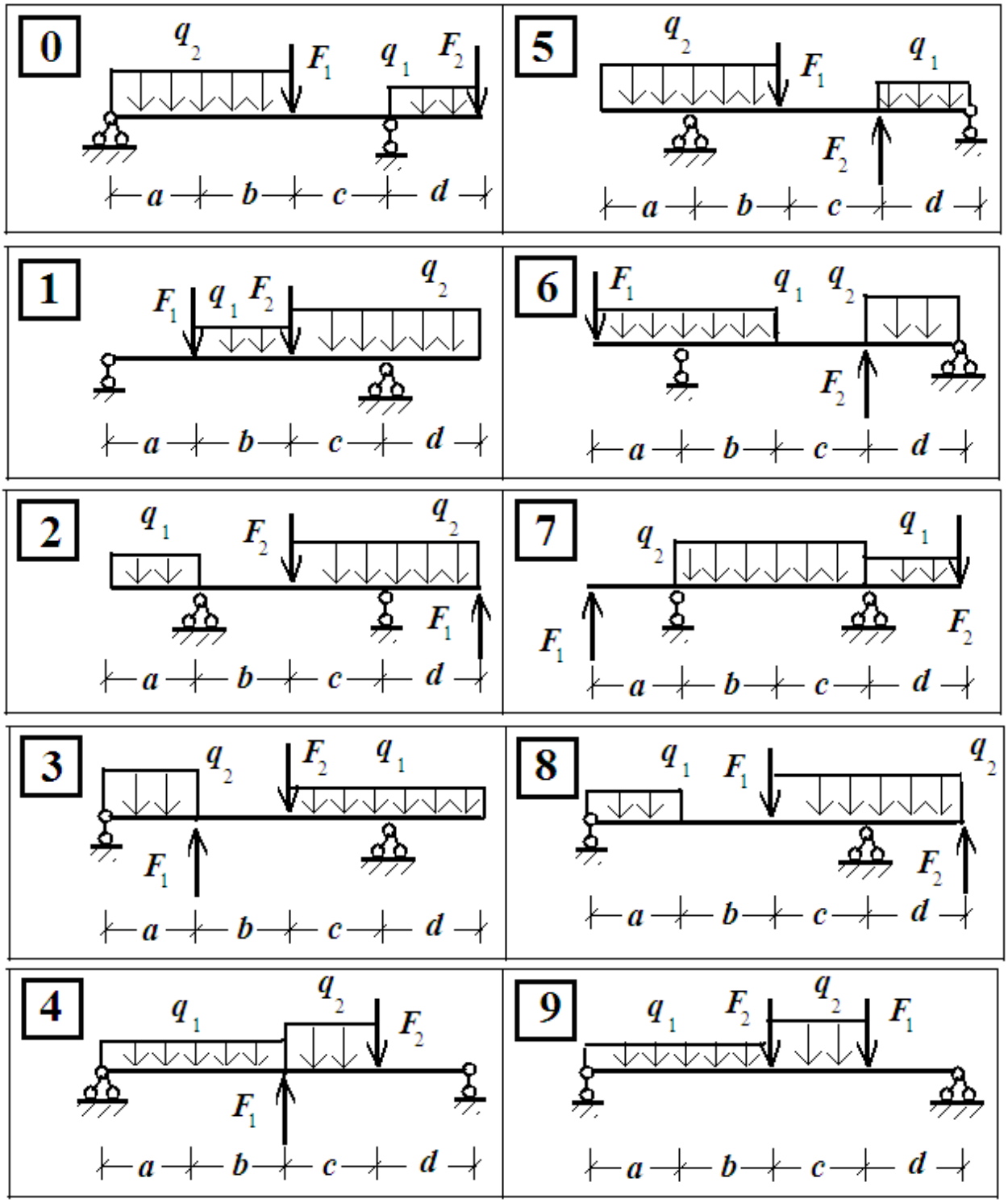

0
q2
F1
q1
F2
a b c d
5
q2
F1
q1
F2
a b c d
1
F1
q1
F2
q2
a b c d
6
F1
q1
q2
F2
a b c d
2
q1
F2
q2
F1
a b c d
7
q2
q1
F1
F2
a b c d
3
q2
F2
q1
F1
a b c d
8
q1
F1
q2
F2
a b c d
4
q1
q2
F2
F1
a b c d
9
q1
F2
q2
F1
a b c d

Рис. 3.1.

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить опорные реакции.

3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

4. Определить «опасное сечение» с максимальным изгибающим моментом и «опасную точку» с максимальными нормальными напряжениями в этом сечении.

5. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить требуемый осевой момент сопротивления и подобрать сечение стальной двутавровой балки.

6. Определить «опасное сечение» с максимальной поперечной силой и «опасную точку» с максимальными касательными напряжениями в этом сечении. Определить максимальную поперечную силу и проверить прочность по касательным напряжениям.

7. Определить «опасное сечение» и «опасную точку» в сечении из условия прочности по эквивалентным напряжениям (по IV теории прочности). Вычислить нормальные и касательные напряжения в «опасной точке опасного сечения». Определить величину эквивалентных напряжений. Сравнить её с расчётным сопротивлением.

Пример расчёта

Подобрать сечение двутавровой стальной балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Проверить прочность балки по касательным напряжениям и по эквивалентным напряжениям.

Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$.

• Определяем опорные реакции: $\sum X = 0$. $B_x = 0$.

$\sum M_B = 0$. $-46 \cdot 1,2 - 78 \cdot 2,6 + 55 \cdot 2,2 \cdot 3,7 - C \cdot 4 = 0$. $C = 47,425$ кН.

$\sum M_C = 0$. $-55 \cdot 2,2 \cdot 0,3 + 78 \cdot 1,4 + -46 \cdot 5,2 + B \cdot 4 = 0$. $B = 41,575$ кН.

Проверка: $\sum Y = 0$. $41,575 + 47,425 - 46 - 55 \cdot 4 = 0$.

• Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Определяем максимальный изгибающий момент:

«Опасное сечение» – сечение A. $M^{\max} = 66,705$ кН·м = 66705 кН·см; «опасная точка» в сечении – точка 1.

• Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} \le R \text{ (сечение } A\text{, точка 1)};$$

$$W_z \ge \frac{M_z^{\max}}{R};\ R = 240 \text{ МПа} = 24 \text{кН/см}^2;$$

$$W_z \ge \frac{6670,5}{24} = 277,94 \text{ см}^3.$$

Выбираем двутавр № 24: геометрические характеристики: $W_z = 289$ см^3; $I_z = 3460$ см^4; $S_z = 163$ см^3; размеры: $h = 24$ см; $b = 11,5$ см; $s = 0,56$ см; $t = 0,95$ см.

Реальное напряжение в точке A: $\sigma^{\max} = \frac{6670,5}{289} = 23,08$ кН / см^2.

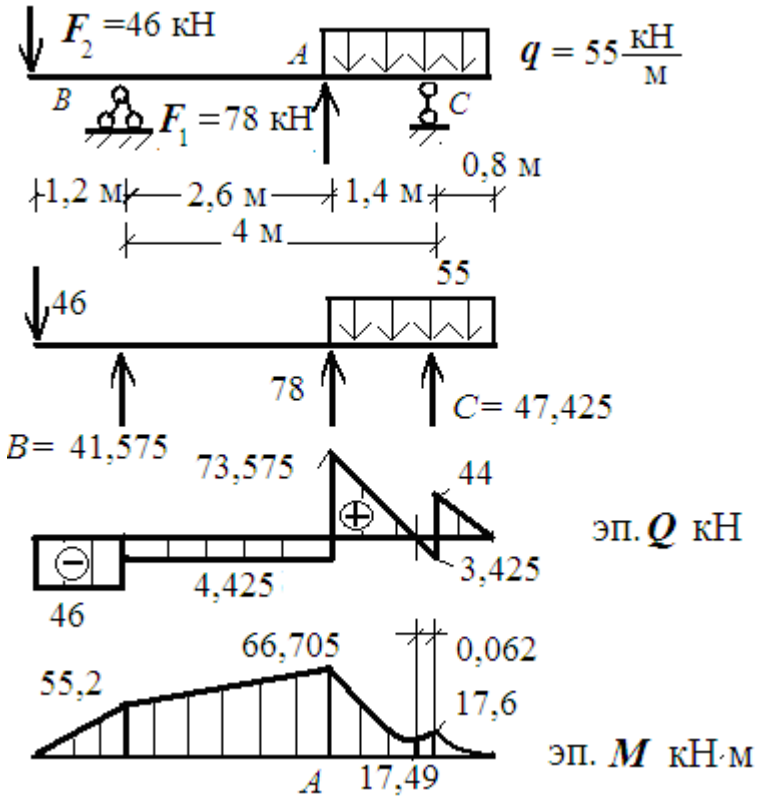
• Изображаем в масштабе сечение двутавра. Строим эпюры нормальных и касательных напряжений. Определяем «опасные точки» в сечении.

• Определяем максимальную поперечную силу: $Q^{\max} = 73,575$ кН («опасное сечение» A, «опасная точка» 2).

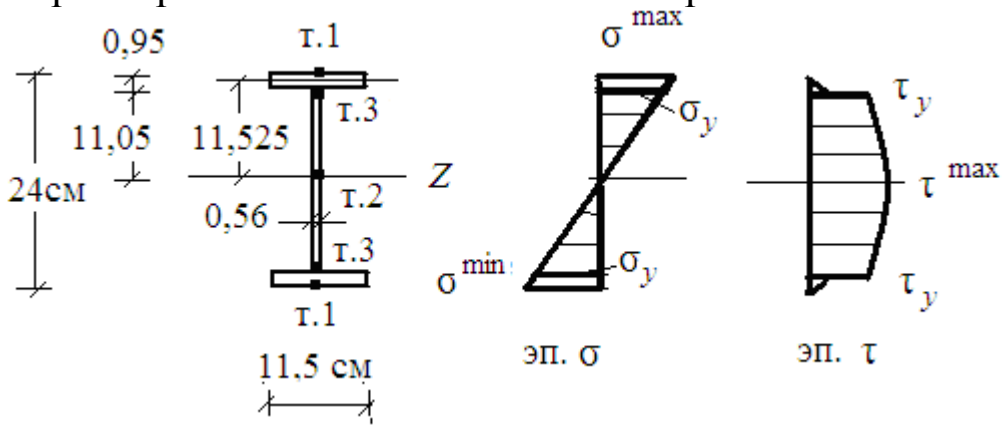
• Проверяем прочность по касательным напряжениям. Сравниваем касательные напряжения с расчётным сопротивлением материала на срез. Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau^{\max} = \frac{Q^{\max} S_z^{\text{отс}}}{sI_z} \le R_{\text{ср}};\ R_{\text{ср}} = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2.$$

$$\tau^{\max} = \frac{73,575 \cdot 163}{0,56 \cdot 3460} = 6,19 \text{ кН/см}^2 < 13 \text{ кН/см}^2.$$



Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении:



Вывод: прочность обеспечена.

• Определяем «опасное сечение» *A* и «опасную точку» 3 в сечении из условия прочности по эквивалентным напряжениям (по IV теории прочности). Вычисляем нормальные и касательные напряжения в этой точке:

$$\sigma_y = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{6670,5}{3460} \cdot 11,05 = 21,3 \text{ кН/см}^2.$$

Здесь $y = 12 - 0,95 = 11,05$ см.

$$\tau_y = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{sI_z} = \frac{QA^{\text{отс}}}{sI_z} \cdot y_C^{\text{отс}} = \frac{73,595 \cdot 10,93 \cdot 11,525}{0,56 \cdot 3460} = 4,78 \text{ кН/см}^2.$$

Здесь $S_y^{\text{отс}} = A^{\text{отс}} y^{\text{отс}}$; $A^{\text{отс}} = 11,5 \cdot 0,95 = 10,93$ см^2 – площадь отсеченной части; $y_C^{\text{отс}} = 12 - \dfrac{0,95}{2} = 11,525$ см – расстояние от центра тяжести отсеченной части до главной оси сечения z.

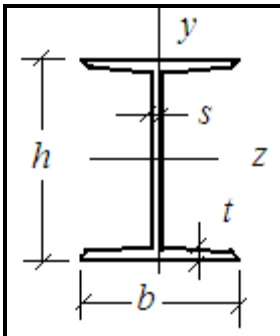
Определяем величину эквивалентных напряжений и сравниваем её с расчётным сопротивлением. Условие прочности по эквивалентным напряжениям:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_y^2 + 3\tau_y^2} \le R;\ \sqrt{21,3^2 + 3 \cdot 4,78^2} = 22,85 < 24 \text{ кН/см}^2.$$

Вывод: прочность обеспечена.

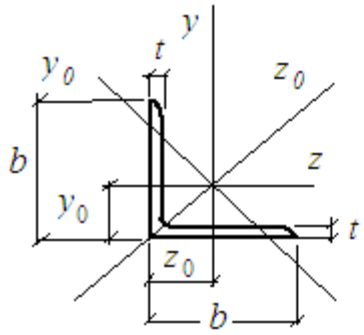
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Таблицы сортамента прокатной стали



Двутавры горячекатаные
(ГОСТ 8239 – 89)

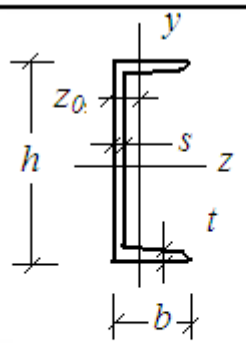
№	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм				A, см^2	I_z, см^4	W_z, см^3	i_z, см	S_z, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1280	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	365	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54



Уголки горячекатаные равнополочные

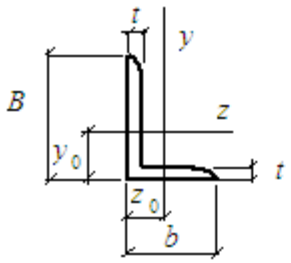
(по ГОСТ 8509 – 93)

№ Уголка	Масса 1п.м. кг	Размеры мм		A см^2	I_z см^4	i_z см	$I_{z_o max}$ см^4	$i_{z_o max}$ см	$I_{y_o max}$ см^4	$i_{y_o max}$ см	$\lvert I_{zy} \rvert$ см^4	z_o см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,3 8
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,7 3	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,5 2
	4,25		5	5,41	16	1,7 2	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,5 7
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,8	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,6
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	7,36	80	6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51



Швеллеры горячекатаные (ГОСТ 8240 – 89)

№ швеллера	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм				A, см^2	I_z, см^4	W_z, см^3	i_z, см	S_z, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	133	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,7	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,4	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

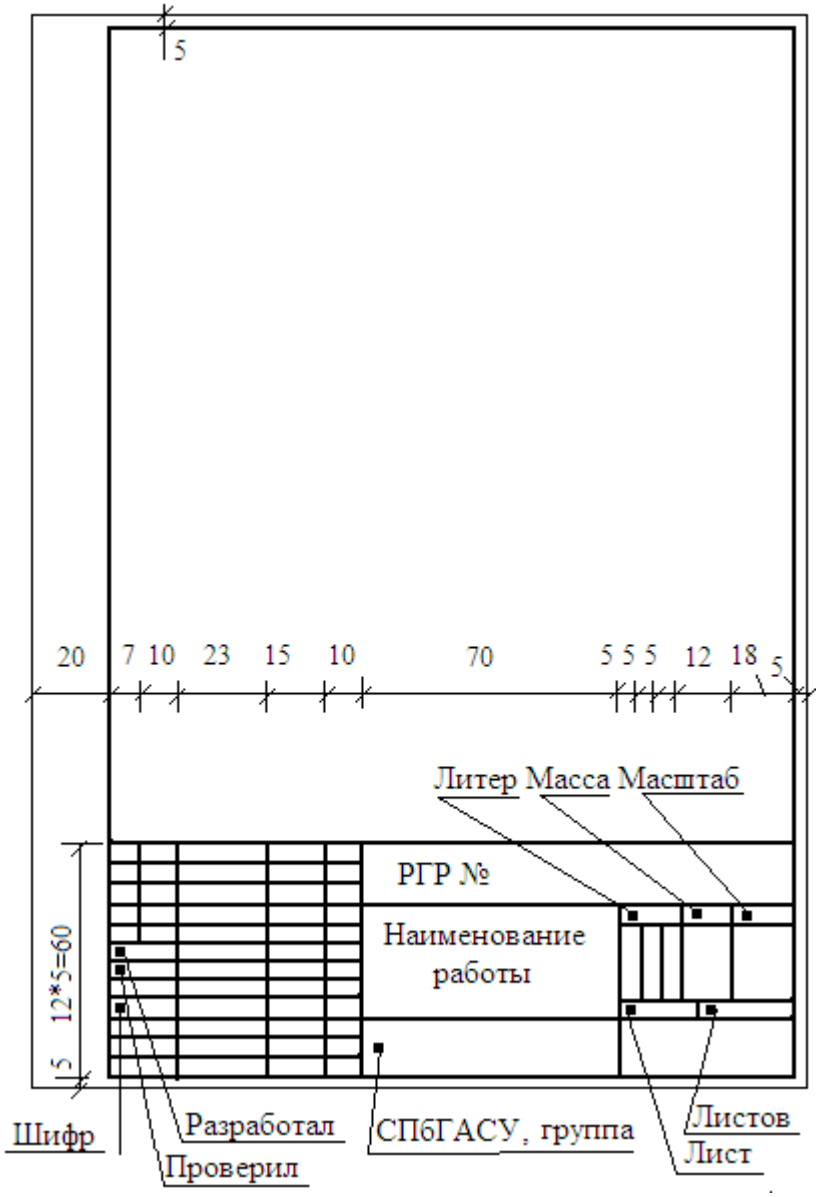


Уголки стальные горячекатаные неравнополчные (ГОСТ 8240 – 89)

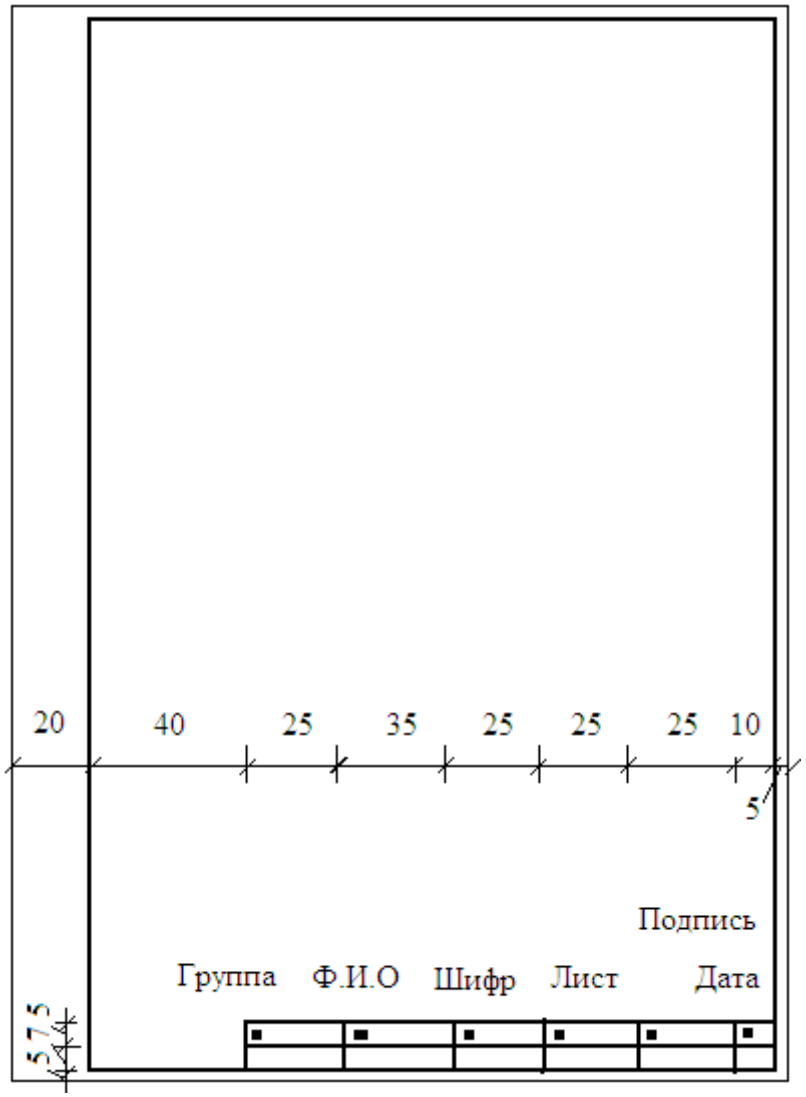
№ уголка	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм			A, см^2	I_z, см^4	i_z, см	I_y, см^4	i_y, см	z_0, см	y_0, см
		B	b	t							
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,9	1,59	2,56	0,9	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,8	275	3,12	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	2,99	6,71

Приложение 2.

Образец оформления первого листа расчета
(формат листа А-4)



Образец оформления последующих листов расчета
(формат листа А-4)



Рекомендуемая литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П., Сопротивление материалов, М.: «Высшая школа», 1995.

2. Дарков А.В., Шапиро Г.С., Сопротивление материалов, «Высш. школа», 1989.

3. Феодосьев В.И., Сопротивление материалов, М.: изд-во МГТУ им. Баумана, 2000.

4. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В., Справочник по сопротивлению материалов, Киев: «Наукова думка», 1988.

5. Куприянов И.А., Масленников Н.А., Сопротивление материалов. Сборник заданий и методические указания к расчетно-графическим работам. Учебное пособие, Санкт-Петербург, ИД «Петрополис», 2019.

Содержание

Тема 1. Основные положения 2
1.1. Предмет сопротивления материалов 2
1.2. Классификация нагрузок (внешних сил) 3
1.3. Основные гипотезы и принципы 5
1.4. Геометрическая форма элементов 6
1.5. Расчетная схема 7
1.6. Определение внутренних сил. Метод сечений 7
1.7. Основные виды деформаций стержня 9
1.8. Понятие о напряжениях 11

Тема 2. Растяжение и сжатие 14
2.1. Усилия и напряжения 14
2.2. Деформации при растяжении и сжатии 15
2.3. Механические характеристики материалов 17
2.3.1. Испытания на растяжение (сжатие) 18
2.3.2. Понятие о наклепе, ползучести и релаксации 22
2.4. Работа сил при растяжении (сжатии) 23
2.5. Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии) 25
2.6. Понятие о концентрации напряжений 28
2.7. Статически неопределимые задачи при растяжении (сжатии) 29
2.7.1. Статически неопределимые задачи в упругой стадии деформирования 29
2.7.2. Расчет статически неопределимых систем по предельному пластическому состоянию 34
2.8. Стержень, растянутый под действием собственного веса 35

Тема 3. Геометрические характеристики сечений 36
3.1. Основные понятия 36
3.2. Геометрические характеристики простейших фигур 39
3.2.1. Прямоугольник 40
3.2.2. Круг 41
3.2.3. Кольцо 42
3.3. Моменты инерции при параллельном переносе осей 43
3.4. Моменты инерции при повороте осей координат 45
3.5. Главные оси и главные моменты инерции 48
3.6. Примеры определения геометрических характеристик 51

Тема 4. Теория напряженного состояния. 58

4.1. Характеристика напряженных состояний 58
4.2. Линейное напряженное состояние 60
4.3. Плоское напряженное состояние 62
4.3.1. Выражение напряжений по наклонным площадкам 62

4.3.2. Главные напряжения и положение главных площадок 67
4.3.3. Максимальные касательные напряжения 70
4.3.4. Графическое представление плоского напряженного состояния 73
4.4. Объемное напряженное состояние 82
4.4.1. Обобщенный закон Гука (прямая форма) 82
4.4.2. Относительное изменение объема 84
4.4.3. Обратная форма закона Гука 85
4.4.4. Потенциальная энергия деформации 86
4.5. Понятие о теориях (гипотезах) прочности 88

Тема 5. Чистый сдвиг. Кручение 97
5.1. Чистый сдвиг 97
5.2. Расчеты на сдвиг (срез) 102
5.3. Кручение стержней круглого сечения 103
5.3.1. Усилия при кручении стержня 103
5.3.2. Напряжения и деформации при кручении стержней круглого сечения 104
5.3.3. Кручение стержней кольцевого сечения 109
5.3.4. Условие прочности и жесткости при кручении 111
5.3.5. Потенциальная энергия деформации при кручении 115
5.4. Кручение стержней некруглого сечения 116
5.4.1. Кручение стержней прямоугольного сечения 116
5.4.2. Свободное кручение тонкостенных стержней открытого профиля 119
5.4.3. Свободное кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля 123

Тема 6. Плоский изгиб 127
6.1. Усилия при изгибе 128
6.2. Дифференциальные зависимости между усилиями при изгибе 131
6.3. Чистый изгиб 139
6.3.1. Нормальные напряжения при чистом изгибе 139
6.3.2. Расчет на прочность при чистом изгибе 145
6.4. Поперечный изгиб 148
6.4.1. Касательные напряжения при изгибе 148
6.4.2. Касательные напряжения в прямоугольном и круглом сечениях 151
6.4.3. Касательные напряжения в тонкостенных сечениях 155
6.4.4. Условие прочности по касательным напряжениям 158
6.4.5. Понятие о центре изгиба тонкостенных стержней 159
6.5. Напряженное состояние при изгибе 160
6.5.1. Главные напряжения при поперечном изгибе 160
6.5.2. Проверка прочности в общем случае изгиба 162
6.5.3. Расчет на изгиб балок моно-симметричного сечения 167

Методические указания к выполнению контрольных работ 170
КР № 1. Осевое растяжение и сжатие стержня. 172
Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в стержне при растяжении и сжатии. 172
Задача № 1.2. Подбор сечения статически определимого стержня при растяжении-сжатии. 177
Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении и сжатии. 180
КР № 2. Плоское напряженное состояние. Кручение. 184
Задача № 2.1. Исследование плоского напряженного состояния. 184
Задача № 2.2. Подбор круглого сечения стержня (вала) при кручении. 188
КР № 3. Плоский изгиб прямолинейного стержня. 193
Задача № 3.1. Подбор сечения стальной двутавровой балки из условия прочности. 193
Приложения 199
Рекомендуемая литература 205