Л А Б О Р А Т О Р Н А Я   Р А Б О Т А   № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 1

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

1. Метод Крамера решения системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Рассмотрим систему ***n*** алгебраических линейных уравнений с ***n*** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \tag{1}$$

Определителем системы называется определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Обозначим Δ_j - определитель, который получится из определителя системы Δ заменой j-го столбца на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Теорема Крамера. Если определитель системы уравнений (1) $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам $x_j = \Delta_j / \Delta$.

2. Найти. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{\sin 3x - \sin 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{\sin 3x - \sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^{\sin 3x} - 1) - (e^{\sin 2x} - 1)}{2\sin(-x)\cos 4x} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{-2\cos 4x} \left(\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\sin x} - \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin x} \right) = \left\{ \begin{matrix} \sin x \sim x;\ e^{\sin 3x} - 1 \sim \sin 2x \sim 2x; \\ e^{\sin 3x} - 1 \sim \sin 3x \sim 3x \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} \right) = -\frac{1}{2}(3 - 2) = -\frac{1}{2}.$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я   Р А Б О Т А   № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 2

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0**

1. Найти. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[7]{1-5x}}{x+x^2}$

Решение. Заметим, что бесконечно малая величина x^2 – величина более высокого порядка по сравнению с бесконечно малой x при $x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}/\,x=\lim\limits_{x\to 0}=0$ и $x+x^2\sim x$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[7]{1-5x}}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2-1})-(\sqrt[7]{1-5x-1})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-5x}-1}{x}=.$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2\\ \sqrt[7]{1-5x}-1\sim\frac{1}{7}(-5x)\end{array}\right].=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}(-5x)}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}$$

2. Координаты точки пространства в прямоугольной декартовой системе координат.

Если задана прямоугольная система, то точка пространства М задается тремя координатами: абсциссой – X, ординатой – Y и аппликатой – Z. Таким образом, точка, заданная тремя координатами, обозначается М (x,y,z).

Пусть заданы точки. А(x_A, y_A, z_A) и В(x_B, y_B, z_B). Тогда расстояние

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2} \qquad (1)$$

Если точка С делит отрезок АВ так, что АС\СВ=, то

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};\quad z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

Координаты середины отрезка АВ

$$x_{ср}=\frac{x_A+x_B}{2};\quad y_{ср}=\frac{y_A+y_B}{2};\quad z_{ср}=\frac{z_A+z_B}{2}. \qquad (3)$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 3

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0**

Разложить многочлен $p(x)=3x^4-2x^3-4x^2+7x+3$ по степеням $x+2$.

Решение. Многочлен имеет производные n-ого порядка. Поэтому любую из них можно представить в виде

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+R_n \qquad (1)$$

Положим $a=-2$. Вычислим коэффициент по формуле $a_n=\dfrac{p^{(n)}(-2)}{n!}$ и запишем результаты вычислений в таблицу

n	$p^{(n)}(x)$	$p^{(n)}(-2)$	$a_n=\dfrac{p^{(n)}(-2)}{n!}$
0	$p(x)=3x^4-2x^3-4x^2+7x+3$	37	37
1	$p'(x)=12x^3-6x^2-8x+7$	-97	-97
2	$p''(x)=36x^2-12x-8$	160	80
3	$p'''(x)=72x-12$	-156	-26
4	$p^{(4)}(x)=72$	72	3

Применим формулу (1):

$p(x)=37-97(x+2)+80(x+2)^2-26(x+2)^3+3(x+2^4)$. Так как $p^{(5)}(x)\equiv 0$, то $R_5(x)=0$.

2. Найти. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\ x}{x}\right)^{\frac{\sin\ x}{x-\sin\ x}}$.

Решение. $$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x-\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]=$$

$$=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{\sin x(\sin x-x)}{(x-\sin x)x}\right]=\exp\left(-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)=\exp(-1)=e^{-1}$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 4

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0**

1. Элементарные приемы раскрытия неопределенностей разного вида.

Предел отношения двух многочленов с постоянными коэффициентами.

Пусть $\dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)}=\dfrac{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n}{B_0x^k+B_{k-1}x^{k-1}+\ldots+B_{k-1}x+B_k}$.

При $x\to\infty$ отношение многочленов представляет неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Для ее раскрытия преобразуем каждый многочлен, вынося за скобки переменную в наибольшей степени:

$$\lim_{x\to 0}\frac{P_n(x)}{Q_k(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n\left(A_0+\dfrac{A_1}{x}+\ldots+\dfrac{A_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{A_n}{x^n}\right)}{x^k\left(B_0+\dfrac{B_1}{x}+\ldots+\dfrac{B_{k-1}}{x^{k-1}}+\dfrac{B_k}{x^k}\right)}=\lim_{x\to 0}x^{n-k}\times \qquad (1)$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{A_0+\dfrac{A_1}{x}+\ldots+\dfrac{A_{n-1}}{x^{n-1}}+\dfrac{A_n}{x^n}}{B_0+\dfrac{B_1}{x}+\ldots+\dfrac{B_{k-1}}{x^{k-1}}+\dfrac{B_k}{x^k}}=\frac{A_0}{B_0}\lim_{x\to 0}x^{n-k}=\begin{cases}A_0/B_0 & \text{при} \quad n=k,\\ \infty & \text{при} \quad n>k,\\ 0 & \text{при} \quad n<k.\end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, можно сформулировать следующие правила:

- предел отношения двух многочленов одинаковой степени равен отношению коэффициентов при старшей степени;
- если степень многочлена, стоящего в числителе, больше степени многочлена, стоящего в знаменателе, то предел их отношения равен бесконечности;
- если степень многочлена, стоящего в знаменателе, выше степени многочлена, стоящего в числителе, то предел их отношений равен нулю.

2. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\ln x/x$ в интервале $(0,+\infty)$.

Решение. Всюду в интервале $(0,+\infty)$ функция дифференцируема. Найдем

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Так как $f'(x)=0$ при $1-\ln x=0$, то $x=e$.

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 5

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением Microsoft Equation 3.0.

1. Пример. Периметр равнобедренного треугольника равен *2p.* Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

Решение. Обозначим x половину основания AC равнобедренного треугольника ABC. Тогда из условия задачи $AB = BC = p\text{-}x$. Определим высоту BH по теореме Пифагора: $h=\sqrt{(p-x)^2-x^2}=\sqrt{p^2-2px}$.

Объем конуса $V = S_{\text{осн}}h/3$, где основание конуса – круг радиусом x, высота – высота треугольника BH. Тогда $V(x)=\dfrac{1}{3}\pi x^2\sqrt{p^2-2px},\quad x\in(0,\ p/2)$. Производная

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{p^2-2px}+\frac{x^2(-2p)}{2\sqrt{p^2-2px}}\right)=\frac{\pi}{3}\frac{\left(2x\left(p^2-2px\right)-px^2\right)}{\sqrt{p^2-2px}}=\frac{\pi}{3}\frac{px(2p-5x)}{\sqrt{p^2-2px}};$$

$V'(x)=0$ при $x=2p/5$. Найдем $V\left(\dfrac{2p}{5}\right)=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{4\mathrm{p}^3}{25\sqrt{5}}$.

Отсюда максимум $V(x)$ достигается при $x=2p/5$ на промежутке $(0,\ p/2)$. Следовательно, основание равнобедренного треугольника $AC=2x=4p/5$, а боковые стороны $AB=BC=p-x=3p/5$.

2.Найти производную функции $y=\sqrt{x}$ по определению производной.

Решение. Придадим аргументу x приращение Δx, тогда приращение функции $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$. Составим отношение $\Delta y/\Delta x=\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)/\Delta x$ и вычислим его предел при $\Delta x\to 0$:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 6

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

Пусть x и $x+\Delta x$ - значения аргумента, а $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$ - соответствующие им значения функции $y=f(x)$. Величина Δx называется ***приращением аргумента***, а разность $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ называется ***приращением функции*** в промежутке $[x, x+\Delta x]$.

Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ или $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $(x\neq 0)$.

Операция вычисления производной $y'=f(x)$ называется *дифференцированием* данной функции. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если в этой точке она имеет конечную производную. Соответственно, $f(x)$ дифференцируема в промежутке $[a, b]$, если она дифференцируема в каждой точке.

Пользуясь определением, можно получить следующие формулы дифференцирования элементарных функций:

$$c'=0,\ c=\text{const};\ (x^n)'=nx^{n-1};\ (ax)'=a^x\ln a,\ a>0,\ a\neq 1; \tag{1}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\ \ a>0,\ \ a\neq 1; \tag{2}$$

$$(\sin x)'=\cos x;\ \ (\cos x)'=-\sin x; \tag{3}$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k;\ (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\neq\pi k,\ k\in Z; \tag{4}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1;\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1; \tag{5}$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2};\ (\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}; \tag{6}$$

$$(\operatorname{sh} x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\operatorname{ch} x;\quad (\operatorname{ch} x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\operatorname{sh} x; \tag{7}$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 7

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

1. Элементарные приемы раскрытия неопределенностей разного вида.

Предел отношения двух многочленов с постоянными коэффициентами.

Пусть $\dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)} = \dfrac{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n}{B_0x^k + B_{k-1}x^{k-1} + \ldots + B_{k-1}x + B_k}$.

При $x \to \infty$ отношение многочленов представляет неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

Для ее раскрытия преобразуем каждый многочлен, вынося за скобки переменную в наибольшей степени:

$$\lim_{x\to 0}\frac{P_n(x)}{Q_k(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n\left(A_0 + \dfrac{A_1}{x} + \ldots + \dfrac{A_{n-1}}{x^{n-1}} + \dfrac{A_n}{x^n}\right)}{x^k\left(B_0 + \dfrac{B_1}{x} + \ldots + \dfrac{B_{k-1}}{x^{k-1}} + \dfrac{B_k}{x^k}\right)} = \lim_{x\to 0} x^{n-k} \times \tag{1}$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{A_0 + \dfrac{A_1}{x} + \ldots + \dfrac{A_{n-1}}{x^{n-1}} + \dfrac{A_n}{x^n}}{B_0 + \dfrac{B_1}{x} + \ldots + \dfrac{B_{k-1}}{x^{k-1}} + \dfrac{B_k}{x^k}} = \frac{A_0}{B_0}\lim_{x\to 0} x^{n-k} = \begin{cases} A_0/B_0 & \text{при} \quad n = k, \\ \infty & \text{при} \quad n > k, \\ 0 & \text{при} \quad n < k. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, можно сформулировать следующие правила:

- предел отношения двух многочленов одинаковой степени равен отношению коэффициентов при старшей степени;
- если степень многочлена, стоящего в числителе, больше степени многочлена, стоящего в знаменателе, то предел их отношения равен бесконечности;
- если степень многочлена, стоящего в знаменателе, выше степени многочлена, стоящего в числителе, то предел их отношений равен нулю.

2. Найти наибольшее значение функции $f(x) = \ln x / x$ в интервале $(0, +\infty)$.

Решение. Всюду в интервале $(0, +\infty)$ функция дифференцируема. Найдем

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Так как $f'(x) = 0$ при $1 - \ln x = 0$, то $x = e$.

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 8

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

1. Пример. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

Решение. Обозначим x половину основания AC равнобедренного треугольника ABC. Тогда из условия задачи $AB = BC = p\text{-}x$. Определим высоту BH по теореме Пифагора: $h=\sqrt{(p-x)^2-x^2}=\sqrt{p^2-2px}$.

Объем конуса $V=S_{\text{осн}}h/3$, где основание конуса – круг радиусом x, высота – высота треугольника BH. Тогда $V(x)=\dfrac{1}{3}\pi x^2\sqrt{p^2-2px},\quad x\in(0,\ p/2)$ Производная

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{p^2-2px}+\frac{x^2(-2p)}{2\sqrt{p^2-2px}}\right)=\frac{\pi}{3}\frac{\left(2x\left(p^2-2px\right)-px^2\right)}{\sqrt{p^2-2px}}=\frac{\pi}{3}\frac{px(2p-5x)}{\sqrt{p^2-2px}};$$

$V'(x)=0$ при $x=2p/5$. Найдем $V\left(\dfrac{2p}{5}\right)=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{4p^3}{25\sqrt{5}}$.

Отсюда максимум $V(x)$ достигается при $x=2p/5$ на промежутке $(0,\ p/2)$. Следовательно, основание равнобедренного треугольника $AC=2x=4p/5$, а боковые стороны $AB=BC=p-x=3p/5$.

2.Найти производную функции $y=\sqrt{x}$ по определению производной.

Решение. Придадим аргументу x приращение Δx, тогда приращение функции $\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$. Составим отношение $\Delta y/\Delta x=\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)/\Delta x$ и вычислим его предел при $\Delta x\to 0$:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)-\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 9

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

Пусть x и $x+\Delta x$ - значения аргумента, а $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$ - соответствующие им значения функции $y=f(x)$. Величина Δx называется ***приращением аргумента***, а разность $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ называется ***приращением функции*** в промежутке $[x,\, x+\Delta x]$.

Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ или $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $(x \neq 0)$.

Операция вычисления производной $y'=f(x)$ называется *дифференцированием* данной функции. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если в этой точке она имеет конечную производную. Соответственно, $f(x)$ дифференцируема в промежутке $[a,\, b]$, если она дифференцируема в каждой точке.

Пользуясь определением, можно получить следующие формулы дифференцирования элементарных функций:

$$c'=0,\ c=\text{const};\ (x^n)' = n\,x^{n-1};\ (ax)'=a^x \ln a,\ a>0,\ a \neq 1; \tag{1}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ \ \mathrm{a}>0,\ \mathrm{a} \neq 1; \tag{2}$$

$$(\sin x)' = \cos x;\ \ (\cos x)' = -\sin x; \tag{3}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;\ \ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi k,\ k \in Z; \tag{4}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1;\ \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1; \tag{5}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\ \ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}; \tag{6}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x;\ \ \ (\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x; \tag{7}$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я   Р А Б О Т А   № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 10

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0**.

1. Метод Крамера решения системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Рассмотрим систему ***n*** алгебраических линейных уравнений с ***n*** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2; \\ \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \qquad (1)$$

Определителем системы называется определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Обозначим Δ_j - определитель, который получится из определителя системы Δ заменой *j*-го столбца на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Теорема Крамера. Если определитель системы уравнений (1) $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам $x_j = \Delta_j / \Delta$.

2. Найти. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{\sin 3x - \sin 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{\sin 3x - \sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{\sin 3x} - 1) - (e^{\sin 2x} - 1)}{2\sin(-x)\cos 4x} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{-2\cos 4x}\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\sin x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin x}\right) = \left\{\begin{matrix} \sin x \sim x;\, e^{\sin 3x} - 1 \sim \sin 2x \sim 2x; \\ e^{\sin 3x} - 1 \sim \sin 3x \sim 3x \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}\right) = -\frac{1}{2}(3-2) = -\frac{1}{2}.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 11

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

1. Найти. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[7]{1-5x}}{x+x^2}$.

Решение. Заметим, что бесконечно малая величина x^2 - величина более высокого порядка по сравнению с бесконечно малой x при $x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}x^2/x=\lim\limits_{x\to 0}=0$ и $x+x^2\sim x$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[7]{1-5x}}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2-1}\right)-\left(\sqrt[7]{1-5x-1}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-5x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\begin{matrix}\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{3}x^2\\ \sqrt[7]{1-5x}-1\sim\dfrac{1}{7}(-5x)\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}(-5x)}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}.$$

2. Координаты точки пространства в прямоугольной декартовой системе координат.

Если задана прямоугольная система координат, то точка пространства M задается тремя координатами: абсциссой – x, ординатой – y и аппликатой – z. Таким образом, точка, заданная тремя координатами, обозначается $M(x, y, z)$.

Пусть заданы точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Тогда расстояние

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\,. \tag{1}$$

Если точка C делит отрезок AB так, что $AC:CB=\lambda$, то

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\qquad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};\qquad z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Координаты середины отрезка AB

$$x_{\text{ср}}=\frac{x_A+x_B}{2};\qquad y_{\text{ср}}=\frac{y_A+y_B}{2};\qquad z_{\text{ср}}=\frac{z_A+z_B}{2}.$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я   Р А Б О Т А   № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 12

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

Разложить многочлен $p(x)=3x^4-2x^3-4x^2+7x+3$ по степеням $x+2$.

Решение. Многочлен имеет производные любого порядка. Поэтому любую из них можно представить в виде

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+R_n \qquad (1)$$

Положим $a=-2$. Вычислим коэффициент по формуле $a_n=\dfrac{p^{(n)}(-2)}{n!}$ и запишем результаты вычислений в таблицу

n	$p^{(n)}(x)$	$p^{(n)}(-2)$	$a_n=\dfrac{p^{(n)}(-2)}{n!}$
0	$p(x)=3x^4-2x^3-4x^2+7x+3$	37	37
1	$p'(x)=12x^3-6x^2-8x+7$	-97	-97
2	$p''(x)=36x^2-12x-8$	160	80
3	$p'''(x)=72x-12$	-156	-26
4	$p^{(4)}(x)=72$	72	3

Применим формулу (1):

$p(x)=37-97(x+2)+80(x+2)^2-26(x+2)^3+3(x+2^4)$. Так как $p^{(5)}(x)\equiv 0$, то $R_5(x)=0$.

2. Найти. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\ x}{x}\right)^{\frac{\sin\ x}{x-\sin\ x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}=\exp\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x-\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)\right]=$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sin x-x)}{((x-\sin x)x}\right]=\exp\left(-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)=\exp(-1)=e^{-1}.$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 13

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0.**

1. Метод Крамера решения системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.

Рассмотрим систему ***n*** алгебраических линейных уравнений с ***n*** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n; \end{cases} \qquad (1)$$

Определителем системы называется определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Обозначим Δ_j - определитель, который получится из определителя системы Δ заменой j-го столбца на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Теорема Крамера. Если определитель системы уравнений (1) $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам $x_j = \Delta_j / \Delta$.

2. Найти. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{\sin 3x - \sin 5x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 3x} - e^{\sin 2x}}{\sin 3x - \sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^{\sin 3x} - 1) - (e^{\sin 2x} - 1)}{2\sin(-x)\cos 4x} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{-2\cos 4x}\left(\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\sin x} - \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin x}\right) = \left\{\begin{matrix} \sin x \sim x;\ e^{\sin 3x} - 1 \sim \sin 2x \sim 2x; \\ e^{\sin 3x} - 1 \sim \sin 3x \sim 3x \end{matrix}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x}\right) = -\frac{1}{2}(3 - 2) = -\frac{1}{2}.$$

Л А Б О Р А Т О Р Н А Я Р А Б О Т А № 2

Тема. Изучение редактора Формул Microsoft Equation.
Работа с шаблонами и стилями математических Формул

Вариант 14

Набрать приведенный ниже текст, вставляя формулы. Для вставки формул пользоваться приложением **Microsoft Equation 3.0**

1. Найти. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[7]{1-5x}}{x+x^2}$.

Решение. Заметим, что бесконечно малая величина x^2 - величина более высокого порядка по сравнению с бесконечно малой x при $x\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}x^2/x=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ и $x+x^2\sim x$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[7]{1-5x}}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2-1}\right)-\left(\sqrt[7]{1-5x-1}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1-5x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\begin{matrix}\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\frac{1}{3}x^2\\ \sqrt[7]{1-5x}-1\sim\frac{1}{7}(-5x)\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{7}(-5x)}{x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}.$$

2. Координаты точки пространства в прямоугольной декартовой системе координат.

Если задана прямоугольная система координат, то точка пространства M задается тремя координатами: абсциссой – x, ординатой – y и аппликатой – z. Таким образом, точка, заданная тремя координатами, обозначается $M(x, y, z)$.

Пусть заданы точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$. Тогда расстояние

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\,. \qquad (1)$$

Если точка C делит отрезок AB так, что $AC:CB=\lambda$, то

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\qquad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};\qquad z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (2)$$

Координаты середины отрезка AB

$$x_{ср}=\frac{x_A+x_B}{2};\qquad y_{ср}=\frac{y_A+y_B}{2};\qquad z_{ср}=\frac{z_A+z_B}{2}.$$