Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»**

Кафедра математики

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки:

29.03.01– Технология изделий легкой промышленности
по профилю «Технология швейных изделий»

29.03.02 – Технология и проектирование текстильных изделий
по профилю «Технология текстильных изделий»

29.03.05 – Конструирование изделий легкой промышленности
по профилям «Конструирование швейных изделий»,
«Конструирование изделий из кожи»

Составители:
Е. В. Наумова
С. Ф. Неробова

Санкт-Петербург
2018

УТВЕРЖДЕНО
на заседании кафедры
31.01.2018 г., протокол № 5

Рецензент
О. Б. Тёрушкина

Учебное электронное издание сетевого распространения
Издано в авторской редакции

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2018289, по паролю.
– Загл. с экрана.
Дата подписания к использованию 19.11.2018 г. Рег. № 289/18.

ФГБОУВО «СПбГУПТД»
Юридический и почтовый адрес: 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.
http://sutd.ru

Контрольная должна быть выполнена в отдельной тетради и представлена на проверку не позднее, чем за три недели до начала экзаменационной сессии.

Если работа присылается на проверку в on-line режиме, то она должна быть **отсканирована** с рукописного варианта, при этом в файле страницы должны идти подряд в порядке их нумерации. При нарушении этого правила работа не проверяется.

Не допускается выполнение работы в электронной форме. Такие работы будут автоматически не зачитываться.

Если все задания выполнены без ошибок, то студент допускается к защите контрольной работы, которая происходит во время экзаменационной сессии перед зачетом по прикладной математике.

Если в работе есть ошибки, то их нужно исправить в этой же тетради и прислать на повторную проверку.

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, студенту необходимо изучить соответствующий теоретический материал по указанным учебникам. Если при решении задач возникают вопросы, то можно обратиться к преподавателям кафедры математики для получения консультации.

Во время экзаменационной сессии для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия, которые носят обзорный характер.

НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ ДОЛЖНЫ БЫТЬ УКАЗАНЫ:

Фамилия, имя, отчество.

Номер студенческого билета (или зачетной книжки).

Название дисциплины.

Номер варианта.

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует последней цифре номера студенческого билета (или зачетной книжки).

Например, последняя цифра 3, следовательно выполняется 3 пункт в каждом из примеров, т. е. 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2007. – 321 с.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2007. – 251 с.

Основные темы и рекомендуемая литература для их изучения

№	Тема	Литература
01	Дискретные случайные величины	[1, ч. 2. Гл. 6–8].
02	Непрерывные случайные величины	[1, ч. 2. Гл. 10–13].
03	Системы случайных величин	[1, ч. 2. Гл. 14. § 1–19].
04	Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения	[1, ч. 3. Гл. 15 и 16].
05	Элементы теории корреляции	[1, ч. 3. Гл. 18].
06	Методы расчета сводных характеристик выборки	[1, ч. 3. Гл. 18, 19, § 8, 9].
07	Статистическая проверка статистических гипотез	[1, ч. 3. Гл. 19].

1. Дискретные случайные величины

Литература. Гмурман. Ч. 2. Гл. 6–8.

Вы должны четко представлять, что числовые характеристики имеют вполне определенный смысл. Так, например, математическое ожидание – это теоретическое среднее значение случайной величины, дисперсия – мера рассеяния (разброса, колебаний, вариации) значений случайной величины около среднего значения. Если случайная величина имеет размерность, то математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ее имеют ту же размерность, а размерность дисперсии равна квадрату размерности случайной величины.

Пример. Найти неизвестную вероятность Р, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, заданной таблицей распределения вероятностей

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	p

Решение

Так как сумма всех вероятностей в таблице равна единице, то

$$0{,}0081+0{,}0756+0{,}2646+0{,}4116 + p =1.$$

Отсюда p = 0,2401. Теперь можно написать закон распределения

X	0	1	2	3	4
P	0,0081	0,0756	0,2646	0,4116	0,2401

Находим математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X) = 0\times 0{,}0081 + 1\times 0{,}0756 + 2\times 0{,}2646 + 3\times 0{,}4116 + +4\times 0{,}2401=2{,}8.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = M(X^2) – (M(X))^2,$$

$$M(X^2) =0^2\times 0\ {,}0081 + 1^2\times 0{,}0756 + 2^2\times 0{,}2646 + 3^2\times 0{,}4116 + 4^2\times 0{,}2401 = 8{,}68.$$

Тогда

$$D(X) = 8{,}68 – 2{,}8^2 = 0{,}84.$$

2. Непрерывные случайные величины

Литература. Гмурман. Ч. 2. Гл. 10–13.

Обратите внимание, что формулы для вычисления числовых характеристик непрерывных величин похожи на соответствующие формулы для дискретных величин, только суммы заменяются интегралами, а вместо вероятностей следует вставлять дифференциальную функцию распределения, например,

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i \Rightarrow M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx.$$

Пример. Станок-автомат сверлит отверстия в центре детали, имеющей форму прямоугольной пластины. Отклонения отверстий от центра детали распределены по нормальному закону с математическим ожиданием М, равным 0, и средними квадратическими отклонениями по длине детали $\sigma_x = 2$ мм, по ширине детали $\sigma_y = 1$ мм. Деталь считается стандартной, если отклонения отверстия от центра не превышают по длине и ширине 3 мм. Найти вероятность того, что две случайно взятые детали стандартны.

Введем обозначения:

Случайная величина *X* – отклонение отверстия от центра детали по длине.

Случайная величина *Y* – отклонение отверстия от центра детали по ширине.

Тогда

$$M(X) = M(Y) = 0;\ \sigma(X) = 2;\ \sigma(Y) = 1.$$

Пусть событие А – деталь по ширине стандартна, В – деталь по длине стандартна.

Тогда

$$P(A) = P(|X| < 3), \qquad P(B) = P(|Y| < 3).$$

Так как отклонения по длине и ширине независимые случайные величины, то вероятность того, что деталь стандартна по длине и ширине

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B) = P(|X|<3)\cdot P(|Y|<3).$$

Используем формулу для вероятности отклонения нормальной случайной величины от математического ожидания *a*

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}),$$

получим при $a = 0$, $\varepsilon = 3$ и $\sigma_x = 2$

$$P(|X|<3) = 2\Phi(3/2) = 2\Phi(1,5) = 2\times 0,4332 = 0,8664,$$

при $a = 0$, $\varepsilon = 3$ и $\sigma_y = 1$

$$P(|Y|<3) = 2\Phi(3) = 2\times 0,4986 = 0,9972.$$

(Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ приведены в приложении к учебнику Гмурмана и в *приложении Б*)

$$P(A\cdot B) = 0,8664 \times 0,9972 = 0,8839.$$

Так как по условию нужно найти вероятность того, что две детали стандартны, а стандартность каждой детали событие независимое, то искомая вероятность *P*

$$P = P^2(A\cdot B) = 0,8839^2 = 0,7813 = 0,78.$$

3. Системы случайных величин

Литература. Гмурман. Ч. 2. Гл. 14. § 1–19.

При изучении этой темы следует обратить особое внимание на зависимость и независимость случайных величин. При изучении математического анализа переменные величины разделялись на независимые и зависимые, подразумевая под зависимыми величинами те, которые связаны функциональной зависимостью. При функциональной зависимости каждому допустимому значению одной величины ставится в соответствие определенное значение другой. Однако зависимость между величинами может быть и нефункциональной. Например, существует зависимость между влажностью воздуха и количеством выпавших осадков. Однако нельзя ответить на вопрос: какова влажность, если выпало 3 мм осадков (даже если осадки выпали в виде дождя). Все дело в том, что здесь мы встречаемся не с функциональной, а со *статистической зависимостью*, когда каждому значению одной величины ставится в соответствие свой *закон распределения* другой. Таким образом, между независимостью и функциональной зависимостью имеется промежуточные виды зависимости. В этом разделе тесноту зависимости между величинами измеряют *значением коэффициента корреляции.* Коэффициент корреляции характеризует тесноту только линейной связи между двумя величинами. Поясним это на примерах. Рассмотрим две случайных величины X и Y. Пусть они связаны функциональной зависимостью $Y = f(X)$ и эта функция раскладывается в степенной ряд

$$Y = f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ...+ a_nX^n + \dots$$

или

$$Y = f(X) = a_0 + a_1X + R(X),$$

где $R(X)$ – остаток ряда.

Чем меньше по модулю остаток ряда $R(X)$, тем ближе по модулю коэффициент корреляции r к 1. Если остаток равен нулю, т. е. $f(X) = a_0 + a_1X$, то $|r| = 1$. Если же линейная часть ряда отсутствует, например, $Y = X^2$, то можно показать, что $r = 0$. В общем случае можно написать

$$Y = a_0 + a_1X + \delta,$$

где δ – случайная составляющая, зависящая от различных случайных факторов, которые, может быть и не связаны со случайной величиной X. Чем больше влияние δ на Y или чем меньше по модулю a_0 и a_1 , тем меньше $|r|$.

Таким образом, *коррелированность* – это наличие линейной составляющей в связи между двумя величинами, а *некоррелированность* – отсутствие линейной связи между ними.

4. Выборочный метод. Статистические оценки параметров распределения

Литература. Гмурман. Ч. 3. Гл. 15 и 16.

При изучении этой темы следует обратить особое внимание на появление термина *генеральная совокупность.* Не следует относиться к этому, как к абсолютно новому понятию – генеральная совокупность представляет собой или случайную величину, исследуемую практически, или случайные события. Так, например, генеральная средняя – это фактически математическое ожидание исследуемой случайной величины, а генеральная дисперсия – ее дисперсия.

Выборка может выступать в двух видах: с одной стороны она представляет собой вариационный ряд, т. е. последовательность чисел, полученных в результате исследования (измерения) случайной величины (генеральной совокупности), и, с другой стороны, она теоретически представляет собой последовательность случайных величин. Действительно, до того как испытание произведено, элемент выборки может принять любое из значений случайной величины с той вероятностью, которая этому значению соответствует, т. е. этот элемент сам является случайной величиной, а в результате испытания он принимает определенное значение, т. е. элемент выборки становится числом.

Оценка параметра распределения – это приближенное значение этого параметра, найденное с помощью выборки. Как приближенное значение оценка имеет ошибку (точность оценки), но не следует путать точность оценки с абсолютной погрешностью приближенного значения: точность оценки – это случайная ошибка, значение которой имеет определенную вероятность (надежность оценки). Чем более высокую точность при данном объеме выборки Вы хотите получить (меньшую по величине случайную ошибку), тем меньше ее надежность.

Пример. Случайная величина имеет нормальный закон распределения со средним квадратичным отклонением σ = 1. Известна выборочная средняя $\bar{x} = 10{,}01$ и объем выборки n = 10. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с заданной надежностью $\gamma = 0{,}85$.

Решение. Вероятность попадания неизвестного математического ожидания в интервал $\left(\bar{x} - (t\sigma)/\sqrt{n};\, \bar{x} + (t\sigma)/\sqrt{n}\right)$ определяется формулой

$$P(\bar{x} - (t\sigma)/\sqrt{n} < a < \bar{x} + (t\sigma)/\sqrt{n}) = 2\phi(t) = \gamma,$$

где $\phi(t)$ – табулированная функция Лапласа (Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ приведены в приложении к учебнику Гмурмана и в конце методических указаний). Зная $2\phi(t) = \gamma = 0{,}85$, т. е. $\phi(t) = 0{,}425$, найдем по таблице t = 1,44. Отсюда $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}44 \cdot 1}{\sqrt{10}} = 0{,}46.$ Следовательно, доверительный интервал 9,55 < a < 10,47.

5. Элементы теории корреляции

Литература. Гмурман. Ч. 3. Гл. 18.

6. Методы расчета сводных характеристик выборки

Литература. Гмурман. Ч. 3. Гл.18, 19, § 8, 9.

Пример 1. Исследовать статистически случайную величину X – прочность (разрывная нагрузка), мН, пряжи линейной плотности 18,5 текс. Для этого получена выборка объема n = 40. Результаты испытаний приведены в таблице

144	149	199	174	176	183	239	208
120	150	203	160	180	207	221	220
117	158	170	282	177	218	210	190
225	149	250	101	179	236	198	193
230	240	163	238	178	183	213	211

Так как объём статистической совокупности n = 40, то все множество значений выборки разбивается на классы. Число классов k определяется по объему выборки n с помощью таблицы.

Объём выборки n	40–60	60–100	100–200	200–500
Число классов k	6–7	7–10	10–14	14–17

Выбираем k = 6.

Найдем длину классового промежутка Δ по формуле

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} . \quad (1)$$

Здесь x_{max} – наибольшее и x_{min} – наименьшее значения. По таблице находим $x_{min} = 101$; $x_{max} = 282$. Тогда длина классового промежутка

$$\Delta = \frac{282 - 101}{6} = \frac{181}{6} \approx 30.$$

Значение Δ берется приближенно с той же точностью, с которой определены значения элементов выборки. Определяем границы классовых промежутков.

Левая граница первого промежутка принимается равной $x_{min} - \frac{\Delta}{2}$. Левая граница каждого следующего промежутка получается прибавлением Δ к левой границе предыдущего промежутка. Правый конец каждого промежутка меньше левого конца следующего промежутка на единицу последнего десятичного разряда значений в таблице исходных данных. Этим обеспечивается то, что каждое значение выборки попадает только в один интервал.

Все элементы выборки должны относиться к тому или иному классовому промежутку. При этом все элементы, попавшие в один и тот же промежуток, считаются равными между собой и равными среднему арифметическому границ промежутка. Отметим, что достаточно найти середину только одного из классовых промежутков, так как середины соседних промежутков отличаются друг от друга на Δ. Теперь, вместо исходной выборки, изучается ее приближение, выборочный ряд середин промежутков $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_k$.

Создаем расчетную *табл. 1.1*.

Т а б л и ц а 1.1

Границы промежутков от и до	Середины промежутков $\tilde{x}_i$	Штрихование	Частоты Z	Условные значения α_i	$\alpha_i Z_i$	$\alpha_i^2 Z_i$	$\alpha_i^3 Z_i$	$\alpha_i^4 Z_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
		//						
Сумма								

Левая граница 1-го интервала $101 - \frac{30}{2} = 86$. Далее 86 + 30 = 116; 116 + 30 = = 140 и т. д. Правая граница первого интервала 116 – 1 = 115, следующая – 115 + + 30 = 145 и т. д. Затем заполняем второй столбец $\tilde{x}_1 = \frac{86+115}{2} = 100{,}5$, $\tilde{x}_2 = 100{,}5 + 30 = 130{,}5$ и т. д. Всего получится k + 1промежуток, в нашем случае 6+1=7. x_{max} лежит внутри последнего промежутка.

Т а б л и ц а 1.2

x_i	$\tilde{x}_i$		Z_i	α_i	$\alpha_i Z_i$	$\alpha_i^2 Z_i$	$\alpha_i^3 Z_i$	$\alpha_i^4 Z_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
86–115	100,5	/	1	– 3	– 3	9	– 27	81
116–145	130,5	///	3	– 2	– 6	12	– 24	48
146–175	160,5	## ///	8	– 1	– 8	8	– 8	8
176–205	190,5	## ##	12	0	0	0	0	0
206–235	220,5	//	10	1	10	10	10	10
236–265	250,5	## ##	5	2	10	20	40	80
266–295	280,5	## /	1	3	3	9	27	81
Сумма			40		6	68	18	299

После того как заполнены столбцы 1 и 2 , переходим к столбцу 3. Для каждого элемента выборки находят классовый промежуток, которому принадлежит этот элемент, и в строке этого промежутка в столб. 3 ставят штрих. Рекомендуется четыре штриха ставить вертикально, а пятый – горизонтально, перечеркивая им четыре предыдущих. Сумма штрихов в ячейке равна частоте соответствующего значения и записывается рядом (в столб. 4). Частоты обозначаются Z_i и их сумма ставится в последней строке. При этом должно выполнятся условие $\sum Z_i = n$.

Выбираем условный нуль А, совпадающий с тем значением $\tilde{x}_i$, которое соответствует среднему классовому промежутку, а если таковых два, то тому из них, который имеет большую частоту Z_i.

Строке *табл. 1.2*, соответствующей условному нулю А (у нас это строка 4, $Z_4 = 12$, $A = \tilde{x}_4 = 190{,}5$), соответствует α_i = 0, строки над этой имеют соответственно α_{i-1} = – 1, α_{i-2} = – 2, и т. д., а строки под *i*-й – α_{i+1} = 1, α_{i+2} = 2, α_{i+3} = 3 и т. д. После этого заполняются столбцы 6 – 9, а затем последняя строка – «Сумма» – для этих столбцов.

Для нахождения оценок параметров распределения случайной величины Х сначала определяются начальные условные моменты m_r.

$$m_r = \frac{\Sigma \alpha_i^r Z_i}{n}, \quad r = 1; 2; 3; 4. \tag{2}$$

Числители для каждого момента уже получены в строке «сумма» *табл. 1.2*. Оценка математического ожидания величины Х – среднее арифметическое выборки – выражается через начальный условный момент первого порядка

$$\overline{x_B} = A + m_1 \cdot \Delta. \tag{3}$$

Центральные условные моменты определяются по формулам

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2; \tag{4}$$

$$\mu_3 = m_3 - m_1(2\mu_2 + m_2); \tag{5}$$

$$\mu_4 = m_4 - 2m_1(\mu_3 + m_3) + m_1^4. \tag{6}$$

Оценки остальных числовых характеристик случайной величины Х выражаются через эти моменты:

– оценка среднего квадратичного отклонения

$$S_B = \Delta\sqrt{\mu_2}; \tag{7}$$

– оценка коэффициента вариации

$$C_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} 100\,\%; \tag{8}$$

– оценка коэффициента асимметрии

$$As = \frac{\mu_3}{\mu_2\sqrt{\mu_2}}; \tag{9}$$

– оценка коэффициента эксцесса

$$Ex = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3. \qquad (10)$$

Находим начальные условные моменты

$$m_1 = \frac{6}{40} = 0,15;$$

$$m_2 = \frac{68}{40} = 1,70;$$

$$m_3 = \frac{18}{40} = 0,45;$$

$$m_4 = \frac{299}{40} = 7,475.$$

Тогда центральные условные моменты по формулам будут равны

$$\mu_2 = 1,70 - 0,15^2 = 1,6775;$$

$$\mu_3 = 0,45 - 0,15\,(2 - 1,6775 + 1,70) = -0,308;$$

$$\mu_4 = 7,475 - 2 \cdot 0,15\,(-0,308 + 0,45) + 0,15^4 = 7,433.$$

Теперь находим оценки параметров распределения прочности пряжи:

$$\overline{x_В} = 191,5 + 0,15 \cdot 30 = 195,0 \text{ мН};$$

$$S_В = 30 \cdot \sqrt{1,6775} = 38,85 \text{ мН};$$

$$C_В = \frac{38,86}{195} \cdot 100 = 19,9;$$

$$As = \frac{-0,308}{1,6775 \cdot 1,6775} = -0,14;$$

$$Ex = \frac{7,433}{1,6775^2} - 3 = 0,36.$$

Для нормальной случайной величины коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю. Так как оценки параметров – это их приближённые значения, найденные по результатам обработки выборки, то они могут, даже для выборки из нормальной генеральной совокупности, несколько отличаться от нуля. Поэтому считается, что если $\begin{cases} |As| < 0,25 \\ |Ex| < 0,25 \end{cases}$, то распределение незначительно отличается от нормального. Если же $\begin{cases} |As| > 0,75 \\ |Ex| > 0,75 \end{cases}$, то отличие от нормального распределения значительное.

Если отклонение лежит в пределах от 0,25 до 0,75, то оно считается умеренным. У нас по асимметрии распределение незначительно отличается от нормального, а по эксцессу – умеренно.

Для определения теоретических частот нормального закона распределения используются таблицы функции Гаусса

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \qquad (11)$$

(таблица значений функции Гаусса приведена в учебнике Гмурмана В. Е. «Теория вероятностей и математическая статическая статистика» и в *приложении А* в конце методических указаний). Составим таблицу теоретических значений (*табл. 2.1*).

Первые два столбца *табл. 2.1* соответствуют третьему и четвертому столбцам *табл. 1.1*. Для каждого x_i определяется нормированное отклонение t_i:

$$t_i = \frac{\tilde{x}_i - \overline{x}_B}{S_B}, \qquad (12)$$

Т а б л и ц а 2.1

$\tilde{x}_i$	Z_i	$t_i = \frac{\tilde{x}_i - \overline{x_B}}{S_B}$	$\varphi(t_i)$	Z_i'	$\frac{(Z_i - Z_i')^2}{Z_i}$
1	2	3	4	5	6
Сумма	ΣZ_i	-	$\Sigma\varphi(t_i)$	$\Sigma Z_i'$	χ^2

которое вносится в столб. 3 *табл. 2.1*. Затем находят по указанным таблицам значения функции (11) и записывают их в столб. 4. Теоретические частоты пропорциональны плотности нормального распределения (11). Коэффициент пропорциональности λ определяется так, чтобы сумма теоретических частот равнялась объёму выборки, т. е.

$$\lambda = \frac{n}{\Sigma\varphi(t_i)}. \qquad (13)$$

Тогда теоретические частоты Z_i’ определяются по формуле

$$Z_i' = \lambda \cdot \varphi(t_i). \qquad (14)$$

Для контроля вычислений следует проверить выполнение равенства

$$\Sigma Z'_i = n.$$

Так как теоретические частоты определяются по формуле (14) приближенно (рекомендуется находить их с точностью 0,01), то $\sum Z_i^{'}$ может отличаться от объема выборки на 0,01 – 0,02. В последний столбец вносят значения относительных квадратов отклонений фактических частот от теоретических и находят их сумму

$$\chi^2 = \Sigma \frac{(Z_i - Z_i^{'})^2}{Z_i}, \qquad (15)$$

которая сравнивается с табличным значением χ^2_α, определяемым по уровню значимости α и числу степеней свободы $f = k - 3$ по таблицам распределения Пирсона (Гмурман В. Е., с. 358), где k – фактическое число классовых промежутков; α – уровень значимости. Составим *табл. 2.2*.

Таблица 2.2

$\tilde{x}_i$	Z_i	$t_i = \frac{x_i - 195}{38,86}$	$\varphi(t_i)$	$Z_i^{'}$	$\frac{(Z_i - Z_i^{'})^2}{Z_i}$
100,5	1	–2,432	0,02074	0,644	0,197
130,5	3	–1,660	0,10062	3,126	0,050
160,5	8	– 0,888	0,26900	8,356	0,015
190,5	12	– 0,116	0,39628	12,310	0,008
220,5	10	0,656	0,32167	9,993	0,000
250,5	5	1,428	0,14387	4,469	0,063
280,5	1	2,200	0,03546	1,102	0,009
Сумма	40	-	1,28764	40,000	0,342

Если $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, то гипотеза о нормальности распределения отвергается. При этом вероятность отвергнуть верную гипотезу не превышает α.

Если $\chi^2 \le \chi^2_\alpha$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности распределения.

Коэффициент пропорциональности для нахождения теоретических частот

$$\lambda = \frac{40}{1,28764} = 31,065,$$

что позволяет заполнить столб. 5. Расчётное значение критерия Пирсона $\chi^2 = 0,342$. Число степеней свободы f = 7 – 3 = 4. Выбираем уровень значимости α = 0,05 и по таблицам распределения Пирсона находим $\chi^2_{0,05} = 9,5$.

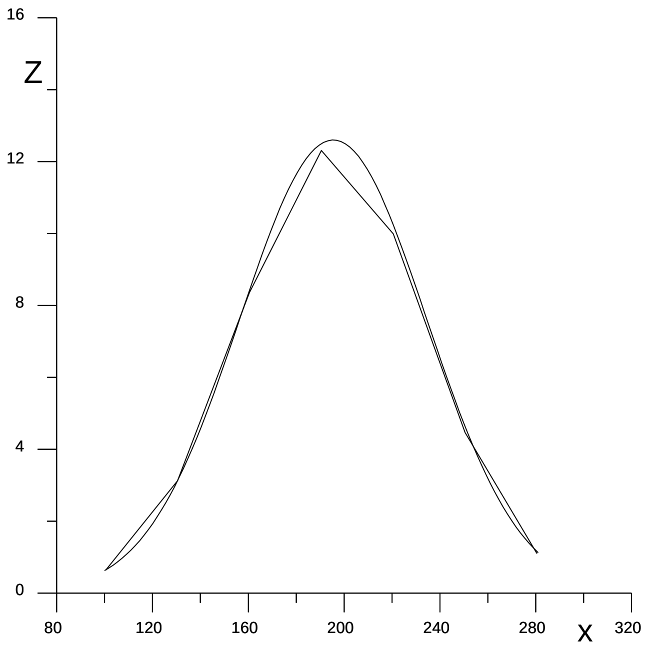

Рис. 1. Полигон частот и сглаживающая кривая нормального закона

Так как $\chi^2 = 0{,}342 < 9{,}5 = \chi^2_{0{,}05}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальности распределения прочности пряжи Т = 18,5 текс.

По данным столб. 1 и 2 строят на графике полигон частот. Для этого на график наносят точки $(\tilde{x}_i; Z_i)$, которые соединяют ломаной линией. На том же графике строится теоретическая кривая Гаусса. Для этого наносят точки с координатами $(\tilde{x}_i; Z_i^{'})$ и дополнительную точку максимума, абсцисса которой равна $\bar{x}_B$, а ордината определяется по формуле $Z_{max} = \lambda \cdot 0.3989$. Так как для $x = \bar{x}_B$ $Z_{max} = 31.065 \cdot 0.3989 = 12.39$. Построенные точки соединяют плавной кривой (*рис.1*).

Пример 2. Найти выборочное уравнение прямой регрессии *Y* на *X* $Y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \bar{x})$ по данной корреляционной таблицы.

X / Y	0	10	20	30	40	50	n_y
20	2	2	-	-	-	-	4
30	2	5	3	-	-	-	10
40	-	-	5	40	5	-	50
50	-	-	2	8	7	3	20
60	-	-	-	2	8	6	16
n_x	4	7	10	50	20	9	n = 100

Решение. Объем выборки n = 100.

Для того чтобы написать уравнение прямой регрессии, нам надо найти средние выборочные для X и Y, дисперсии и коэффициент корреляции r.

Сначала найдем безусловные распределения величин X и Y. Для этого составим отдельные таблицы для каждой случайной величины

X	0	10	20	30	40	50
n_x	4	7	10	50	20	9

Находим среднее выборочное по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = M(X).$$

В нашем случае $\bar{x} = \frac{0 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 20 \cdot 10 + 30 \cdot 50 + 40 \cdot 20 + 50 \cdot 9}{100} = 30.2.$

Находим дисперсию по формуле

$$D = M(X^2) - M^2(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} \right)^2.$$

В нашем случае

$$M(X^2) = \frac{0^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 7 + 20^2 \cdot 10 + 30^2 \cdot 50 + 40^2 \cdot 20 + 50^2 \cdot 9}{100} =$$

$$= \frac{700 + 4000 + 45000 + 32000 + 22500}{100} = 1042;$$

$$D(X) = 1042 - (30.2)^2 = 1042 - 912.04 = 129.96.$$

Следовательно, $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{129.96} = 11.4.$

Аналогично для случайной величины Y

Y	20	30	40	50	60
n_y	4	10	50	20	16

Находим среднее выборочное по формуле

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{m} nj} = M(Y).$$

В нашем случае $\bar{y} = \frac{20 \cdot 4 + 30 \cdot 10 + 40 \cdot 50 + 50 \cdot 20 + 60 \cdot 16}{100} = 43.4.$

Находим дисперсию по формуле

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{m} n_j} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} y_j \cdot n_j}{\sum_{j=1}^{m} n_j} \right)^2 .$$

В нашем случае

$$M(Y^2) = \frac{20^2 \cdot 4 + 30^2 \cdot 10 + 40^2 \cdot 50 + 50^2 \cdot 20 + 60^2 \cdot 16}{100} =$$

$$= \frac{1600 + 9000 + 80000 + 50000 + 57600}{100} = 1982.$$

$$D(Y) = 1982 - (43.4)^2 = 1982 - 1883.56 = 98.44.$$

Следовательно, $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{98.44} = 9.92$.

Коэффициент корреляции находим по формуле

$$r = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

где $M(XY) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j n_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} n_{ij}}$, n_{ij} – частоты.

Найдем M(X Y)

$$M(XY) = \frac{0\cdot 20\cdot 2 + 20\cdot 10\cdot 2 + 0\cdot 30\cdot 2 + 30\cdot 10\cdot 5 + 30\cdot 20\cdot 3 + 40\cdot 20\cdot 5 + 40\cdot 30\cdot 40 + 40\cdot 40\cdot 5 + 50\cdot 20\cdot 2 + 50\cdot 8\cdot 30 + 50\cdot 40\cdot 7 + 50\cdot 50\cdot 3 + 60\cdot 30\cdot 2 + 60\cdot 40\cdot 8 + 60\cdot 50\cdot 6}{100} =$$

=1400.

$$r = \frac{1400 - 30.2 \cdot 43.4}{11.4 \cdot 9.92} = \frac{1400 - 1310.68}{113.09} = \frac{89.32}{113.09} = 0.79.$$

Так как коэффициент корреляции больше нуля, то между величинами X и Y существует прямая корреляционная зависимость (обратная, если коэффициент меньше нуля). Подставим найденные значения в уравнение регрессии

$$Y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{x})$$

$$Y - 43.4 = 0.79 \frac{9.92}{11.4} (X - 30.2).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$Y = 0.69X + 22.64$$

7. Статистическая проверка статистических гипотез

Литература. Гмурман. Ч. 3. Гл. 19.

При изучении этой темы обратите внимание на то, что проверке подлежит так называемая нулевая гипотеза (гипотеза об отсутствии различия, т. е. о нулевом отличие). Так как конкурирующая (или альтернативная) гипотеза, как правило, неизвестна, то мы можем только или отвергнуть нулевую гипотезу, или принять решение, что *нет оснований ее отвергнуть.*

Пример. Найти по заданному вариационному ряду выборки выборочное среднее $\overline{x}$, выборочную дисперсию σ^2, исправленную выборочную дисперсию S^2 и, при уровне значимости 0,05, проверить нулевую гипотезу H_0: математическое ожидание $a = a_0$.

x_i	5	10	15	20	25
n_i	1	5	20	14	10

Решение

Найдем объем выборки

$$\mathrm{n} = \sum \mathrm{n_i} = 1 + 5 + 20 + 14 + 10 = 50 .$$

Определим выборочную среднюю

$$\overline{x}_b = \frac{\sum n_i x_i}{n}.$$

В нашем случае

$$\overline{x}_b = \frac{5 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 20 \cdot 15 + 14 \cdot 20 + 10 \cdot 25}{50} = \frac{885}{50} = 17{,}7.$$

Аналогично

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i \left(x_i - \overline{x}_b\right)^2}{n},$$

$$\sigma^2 = \frac{1 \cdot (5 - 17{,}7)^2 + 5(10 - 17{,}7)^2 + 20(15 - 17{,}7)^2}{50} +$$

$$+ \frac{14(20 - 17{,}7)^2 + 10(25 - 17{,}7)^2}{50} = \frac{1210{,}5}{50} = 24{,}21,$$

$$S^2 = \frac{\sum n_I \left(x_i - \overline{x}_b\right)^2}{n - 1} = \frac{1210{,}5}{49} = 24{,}70.$$

Так как дисперсия генеральной совокупности неизвестна, то в качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину

$$T = \frac{\left(\overline{x} - a_0\right)\sqrt{n}}{S}.$$

Величина Т имеет распределение Стьюдента с $\kappa = n$-1 степенями свободы. Для того, чтобы при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0 = 19$ о равенстве неизвестной генеральной средней нормальной совокупности с неизвестной дисперсией значению a_0, надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{табл} = \frac{(17{,}7 - 19)\sqrt{50}}{\sqrt{24{,}70}} = -1{,}85.$$

Критическая область двусторонняя. По таблице *приложения 6* в учебнике Гмурмана для критических точек распределения Стьюдента по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и по числу степеней свободы к = 49 находим критическую точку $t_{двуст.кр}$ (0,05;49) = =2,01. Так как $|T_{набл}| < t_{двуст.кр}$, то нет основания отвергнуть нулевую гипотезу, т. е. выборочная средняя незначительная отличается от гипотетической генеральной средней $a_0 = 19$.

Контрольные задания

1. Дискретные случайные величины

Найти неизвестную вероятность Р, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины, заданной таблицей распределения вероятностей

1.1

X	1	2	3	5	6	8
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,05	p

1.2

X	–1	0	2	4	6	9
P	p	0,1	0,2	0,3	0,05	0,05

1.3

X	–2	–1	3	4	5	10
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,05	p

1.4

X	–2	0	1	3	4	6
P	p	0,1	0,2	0,3	0,05	0,2

1.5

X	1	2	3	5	6	8
P	0,1	0,1	0,2	0,3	0,05	p

1.6

X	–3	–2	1	4	7	9
P	0,1	0,1	p	0,3	0,05	0,15

1.7

X	1	3	4	6	10	11
P	0,1	0,15	0,2	p	0,05	0,1

1.8

X	1	2	3	5	6	8
P	0,1	0,2	0,2	0,15	p	0,15

1.9

X	–3	–1	0	4	6	7
P	0,1	p	0,2	0,15	0,05	0,2

1.10

X	0	1	2	5	8	10
P	0,15	0,1	0,2	p	0,05	0,25

2. **Нормальный закон распределения**

2.1. Если отклонение размера изделия от номинала менее 0.345, оно относится к высшему сорту. Систематические отклонения исключены, а случайные отклонения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 0.3 мм и математическим ожиданием равным нулю. Какова вероятность того, что два изделия относится к высшему сорту?

2.2. Рост взрослых женщин в одной группе является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием 164 см и дисперсией 30,25 см^2. Найти вероятность того, что пять случайно выбранных женщин имеют рост не ниже 160 см.

2.3. Если отклонение размера изделия от номинала менее 0.345, оно относится к высшему сорту. Систематические отклонения исключены, а случайные отклонения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 0.3 мм и математическим ожиданием равным нулю. Какова вероятность того, что изделие не относится к высшему сорту?

2.4. Экспериментальное значение предела прочности силикатного кирпича носит случайный характер вследствие имеющихся микротрещин, напряжений и других причин, при этом подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 30$. Найти вероятность того, что два наудачу взятых кирпича имеют предельную прочность, отличающуюся от теоретического не более чем на 50 .

2.5. Определить среднее квадратическое отклонение случайной ошибки прибора, если ошибка подчиняется нормальному закону распределения с математическим отклонением, равным нулю, и вероятность того, что ошибка лежит в пределах ± 20 м равна 0,8.

(Указание. 0,8 = $2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})$. Зная Ф, по таблице найти ε/σ.)

2.6. Средняя прочность основной пряжи $a = 60$ и с вероятностью 0,9973 прочность лежит в пределах от 48 до 72. Найти вероятность того, что значение прочности находится в пределах от 52 до 68, если прочность распределена нормально.

(Указание. При данной вероятности интервал 48–72 имеет длину 6σ).

2.7. Номинальные размеры детали 20 x 30 мм. Фактические размеры отклоняются от номинальных, причем отклонения по ширине и длине детали – нормальные независимые случайные величины со средними квадратическими отклонениями 1 мм и 2 мм. Деталь стандартна, если ширина лежит в пределах от 18 до 21 мм, а длина в пределах от 27 до 34 мм. Найти вероятность того, что две случайно взятые детали стандартны.

2.8. Время, необходимое на ремонт прибора, подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием 3 ч и средним квадратическим отклонением 0,5 ч. Какова вероятность того, что на ремонт прибора потребуется не более 4-х ч?

2.9. Прочность пряжи распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 60 и средним квадратическим отклонением 5,8. Пряжа стандартна по прочности, если прочность не меньше 43. Найти вероятность того, что данная партия стандартна.

2.10. Длина заготовки подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием 10 см и дисперсией 0,25 см^2. Из заготовки можно изготовить деталь, если ее длина не меньше 8,5 см. Какова вероятность того, что из заготовки можно изготовить деталь?

3. **Построить доверительный интервал для математического ожидания** α нормально распределенной генеральной совокупности с известным среднеквадратичным отклонением σ с помощью выборки объема n с данным средним выборочным $\bar{x}$, с заданной надежностью γ = 0,90.

3.1. $\bar{x} = 75{,}17$, $n = 36$, $\sigma = 6$.

3.2. $\bar{x} = 75{,}16$, $n = 49$, $\sigma = 7$.

3.3. $\bar{x} = 75{,}15$, $n = 64$, $\sigma = 8$.

3.4. $\bar{x} = 75{,}14$, $n = 81$, $\sigma = 9$.

3.5. $\bar{x} = 75{,}13$, $n = 100$, $\sigma = 10$.

3.6. $\bar{x} = 75{,}12$, $n = 121$, $\sigma = 11$.

3.7. $\bar{x} = 75{,}11$, $n = 144$, $\sigma = 12$.

3.8. $\bar{x} = 75{,}10$, $n = 169$, $\sigma = 13$.

3.9. $\bar{x} = 75{,}09$, $n = 196$, $\sigma = 14$.

3.10. $\bar{x} = 75{,}08$, $n = 225$, $\sigma = 15$.

4. **Исследовать статистически случайную величину** Х – прочность (разрывная нагрузка), мН, пряжи линейной плотности 18,5 текс. Для этого произведена выборка объема n = 40. Результаты испытаний приведены в таблице. Исследовать статистически случайную величину Х – прочность (разрывная нагрузка), мН, пряжи линейной плотности 18,5 текс. Для этого произведена выборка объема n = 40. Результаты испытаний приведены в таблице.

4.1

214	217	205	154	183	146	196	153	201	185
175	144	186	192	161	169	212	227	179	204
203	188	173	211	189	206	175	248	143	171
206	163	151	196	225	197	188	215	194	207

4.2

141	174	235	155	181	202	185	218	283	268
253	294	276	309	281	262	272	236	257	240
278	259	283	289	234	313	307	267	248	300
238	254	317	300	318	302	265	274	297	258

4.3

244	267	249	252	275	280	288	235	272	299
199	216	229	293	238	260	271	220	254	320
268	244	213	269	236	275	259	286	263	231
234	249	292	274	213	265	272	289	257	235

4.4

212	295	323	225	298	267	263	279	284	319
201	252	268	202	269	237	287	253	245	261
241	287	257	282	271	256	276	259	237	320
231	275	313	276	260	309	297	304	278	301

4.5

264	281	211	254	296	236	280	303	264	248
274	253	242	269	249	225	305	288	294	278
287	263	295	267	253	234	260	299	235	268
265	293	254	288	309	229	302	238	247	274

4.6

161	206	212	245	263	275	231	218	269	314
208	226	189	296	284	311	318	272	240	279
174	132	147	257	247	278	260	285	222	265
179	155	188	168	251	300	298	320	282	239

4.7

132	200	225	163	149	171	160	205	163	194
184	124	119	186	152	205	180	155	199	228
147	166	157	189	177	169	197	173	240	195
201	223	183	154	225	176	195	137	208	183

4.8

171	168	182	201	146	176	152	180	173	169
208	184	178	158	194	188	203	189	206	156
172	211	197	177	186	200	138	156	168	181
145	132	217	160	130	205	154	163	178	196

4.9

164	198	138	185	201	153	219	151	187	167
192	241	183	129	175	198	218	149	186	203
242	121	177	173	144	219	151	180	197	160
134	204	160	123	181	172	183	120	149	181

4.10

211	155	189	216	199	134	157	187	180	163
208	178	131	219	151	225	183	206	157	196
193	204	145	216	169	178	197	120	189	164
200	173	166	133	161	188	148	197	309	175

5. Найти выборочное уравнение прямой $Y - \overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{x})$ регрессии Y на X по данной корреляционной таблице.

5.1

Y \ X	5	10	15	20	25	30	n_y
35	4	2	-	-	-	-	6
45	-	5	3	-	-	-	8
55	-	-	5	45	5	-	55
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	3	14
n_x	4	7	10	57	19	3	n = 100

5.2

Y \ X	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	40	2	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	n = 100

5.3

Y \ X	12	17	22	27	32	37	n_y
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	45	4	-	55
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	11	57	17	3	n = 100

5.4

Y \ X	2	7	12	17	22	27	n_y
110	2	4	-	-	-	-	6
120	-	6	2	-	-	-	8
130	-	-	3	50	2	-	55
140	-	-	1	10	6	-	17
150	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	10	6	64	15	3	n =100

5.5

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	2	4	-	-	-	-	6
30	-	3	7	-	-	-	10
40	-	-	5	30	10	-	45
50	-	-	7	10	8	-	25
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	n = 100

5.6

X Y	10	15	20	25	30	35	n_y
35	5	1	-	-	-	-	6
45	-	6	2	-	-	-	8
55	-	-	5	40	5	-	50
65	-	-	2	8	7	-	17
75	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	n = 100

5.7

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
30	1	5	-	-	-	-	6
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	9	40	2	-	51
60	-	-	4	11	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	10	16	55	15	3	n = 100

5.8

X Y	15	20	25	30	35	45	n_y
25	4	2	-	-	-	-	6
35	-	6	4	-	-	-	10
45	-	-	6	45	2	-	53
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	4	8	12	57	15	4	n = 100

5.9

X Y	5	10	15	20	25	30	n_y
20	3	5	-	-	-	-	8
30	-	4	4	-	-	-	8
40	-	-	7	35	8	-	50
50	-	-	2	10	8	-	20
60	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	$n = 100$

5.10

X Y	10	15	20	25	30	35	n_y
15	1	4	-	-	-	-	5
25	-	7	3	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	10	6	-	17
55	-	-	-	4	7	3	14
n_x	1	11	6	64	15	3	$n = 100$

6.

6. Найти по заданному вариационному ряду выборки выборочное среднее $\overline{x}$, выборочную дисперсию $\overline{S}^2$, исправленную выборочную дисперсию $\overline{s}^2$.

6.1	x_i	120	130	140	150	160	170	180
	n_i	5	10	30	25	15	10	5

6.2	x_i	102	112	122	132	142	152	162
	n_i	4	6	10	40	20	12	8

6.3	x_i	10,6	15,6	20,6	25,6	30,6	35,6	40,6
	n_i	8	10	60	12	5	3	2

6.4	x_i	26	32	38	44	50	56	62
	n_i	5	15	40	25	8	4	3

6.5	x_i	12,4	16,4	20,4	24,4	28,4	32,4	36,4
	n_i	5	15	40	25	8	4	3

6.6	x_i	110	115	120	125	130	135	140
	n_i	5	10	30	25	15	10	5

6.7	x_i	45	50	55	60	65	70	75
	n_i	4	6	10	40	20	12	8

6.8	x_i	10,2	10,9	11,6	12,3	13	13,7	14,4
	n_i	8	10	60	12	5	3	2

6.9	x_i	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
	n_i	5	15	40	25	8	4	3

6.10	x_i	104	109	114	119	124	129	134
	n_i	4	6	10	40	20	12	8

Вопросы к зачету

1. Дискретные случайные величины. Закон распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания и дисперсии.
2. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и ее свойства.
3. Плотность вероятности и ее свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
4. Нормальный закон распределения. Вероятность попадания в интнрвал для нормально распределенной случайной величины.
5. Закон распределения вероятностей для двумерной дискретной случайной величины.
6. Зависимые и независимые случайные величины. Коррелированность и зависимость случайных величин. Коэффициент корреляции.
7. Основные определения математической статистики.
8. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма.
9. Генеральная и выборочная средние. Устойчивость выборочной средней.
10. Генеральная и выборочная дисперсии. Исправленная дисперсия. Среднее квадратическое отклонение.
11. Виды оценок параметров генеральной совокупности. Точность оценки, доверительная вероятность, доверительный интервал.
12. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
13. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы. Ошибки первого и второго рода.
14. Статистические критерии проверки нулевой гипотезы.

Таблица значений функции Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$

	сотые									
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127

	Сотые									
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018

Окончание таблицы

сотые										
x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приложение Б

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		

Продолжение таблицы

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		
0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		

Окончание таблицы

x	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**	**x**	**Ф(x)**
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		