Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

П.И. Комаров, В.Ю. Плонский, А.В. Козлов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»

Санкт-Петербург
2010

УДК 510.6 (075.8)

Комаров, П.И. Математическая логика и теория алгоритмов: методические указания к выполнению контрольных работ для студентов заочной формы обучения / П.И. Комаров, В.Ю. Плонский, А.В. Козлов. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2010. – 44 с.

Приводятся основные понятия и утверждения логики высказываний и предикатов. В логике высказываний даются основные методы построения вывода. В логике предикатов вводятся нормальные формы описания предметной области и получение вывода с помощью метода резолюций. Рассмотрено построение описания алгоритма с использованием машины Тьюринга. По каждому разделу приведены контрольные задания с примерами их решения.

Пособие предназначено для студентов 3 курса заочной формы обучения направления подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника» и соответствует рабочей программе дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов».

Рис. 8, табл. 11, библиогр. назв. 14.

Рецензент:

В.А. Холоднов, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой математического моделирования и оптимизации химико-технологических процессов СПбГТИ(ТУ)

Утверждено на заседании учебно-методической комиссии факультета информатики и управления, протокол № 19 от 27.04.2010.

Рекомендовано к изданию РИСо СПбГТИ(ТУ)

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В методических указаниях приведены 3 контрольные работы. Студенту необходимо представить отчёт со *всеми тремя* контрольными работами, выполненными в соответствии с данными методическими указаниями. Номер варианта формируется согласно вычету по модулю 25. Это означает, что номер варианта равен остатку от деления на 25 того числа, которое образуется из двух последних цифр номера зачётной книжки. Если же это число меньше 25, то номер варианта равен этому числу. В таблице приведены номера вариантов, составленные по этому принципу.

Две последние цифры зачётной книжки	Номер варианта	Две последние цифры зачётной книжки	Номер варианта
01, 26, 51, 76	1	13, 38, 63, 88	13
02, 27, 52, 77	2	14, 39, 64, 89	14
03, 28, 53, 78	3	15, 40, 65, 90	15
04, 29, 54, 79	4	16, 41, 66, 91	16
05, 30, 55, 80	5	17, 42, 67, 92	17
06, 31, 56, 81	6	18, 43, 68, 93	18
07, 32, 57, 82	7	19, 44, 69, 94	19
08, 33, 58, 83	8	20, 45, 70, 95	20
09, 34, 59, 84	9	21, 46, 71, 96	21
10, 35, 60, 85	10	22, 47, 72, 97	22
11, 36, 61, 86	11	23, 48, 73, 98	23
12, 37, 62, 87	12	24, 49, 74, 99	24

Если две последние цифры зачётной книжки 00, 25, 50 или 75, то номер варианта − 25.

Отчёт о выполненных контрольных работах должен включать: титульный лист, условие задачи и подробную процедуру решения, аналогично тому, как это представлено в примерах выполнения работ. Во время защиты отчёта студент должен уметь обосновать представленное в отчёте решение. На титульном листе отчёта о выполнении контрольных работ необходимо указать фамилию, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер варианта.

Приступая к выполнению контрольных работ, рекомендуется ознакомиться со следующим учебным пособием:

Комаров, П. И. Математическая логика и теория алгоритмов. Базовый курс: учебное пособие для студентов заочной формы обучения / П.И. Комаров, В. Ю. Плонский, А. В. Козлов. – СПб. : СПбГТИ(ТУ), 2010. – 90 с.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1. ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Теоретические сведения

Определение 1. Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция переменных (или их отношений), в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Определение 2. Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется формула, имеющая вид дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Алгоритм приведения заданной формулы к ДНФ:

- сначала с помощью правила двойного отрицания $\overline{\overline{x}} = x$ и закона де Моргана $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$ все отрицания переменных в преобразуемой формуле приводят к самим переменным;
- затем раскрывают скобки и с помощью правил $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$, $x \wedge \neg x = 0$ и $x \vee \neg x = 1$ удаляют лишние конъюнкции и повторения переменных в конъюнкциях;
- наконец, с помощью правил $x \wedge 0 = 0$, $x \wedge 1 = x$, $x \vee 0 = x$ и $x \vee 1 = 1$ удаляют константы.

Определение 3. Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

Определение 4. Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется формула, имеющая вид конъюнкции элементарных дизъюнкций.

Приведение заданной формулы к КНФ выполняется по тем же правилам, что и приведение ее к ДНФ.

Определение 5. ДНФ произвольной нетождественно ложной формулы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *совершенной* (СДНФ), если она обладает следующими свойствами:

1) каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию $F(x_1, x_2, ..., x_n)$;

2) все логические слагаемые формулы различны;

3) ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и её отрицание;

4) ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Построение СДНФ для произвольной формулы осуществляется либо на основе её таблицы истинности, либо путем равносильных преобразований заданной формулы.

Определение 6. КНФ произвольной нетождественно истинной формулы А называется *совершенной* (СКНФ), если для неё выполнены *условия совершенства*, а именно:

1) все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ(А), содержат все переменные;

2) все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ(А), различны;

3) каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ(А), не содержит переменную и её отрицание;

4) каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ(А), не содержит двух одинаковых переменных.

Построение СКНФ для произвольной формулы А осуществляется либо на основе таблицы истинности формулы $\neg A$ по схеме $\text{СКНФ}(A) = \neg\text{СДНФ}(\neg A)$, либо на основе равносильных преобразований заданной формулы A.

Равносильные формулы алгебры логики:

I. Основные равносильности:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x \wedge x = x \\ 2)\ x \vee x = x \end{array}\right\} - \text{законы идемпотентности;}$$

3) $x \wedge 1 = x$;

4) $x \vee 1 = 1$;

5) $x \wedge 0 = 0$;

6) $x \vee 0 = x$;

7) $x \wedge \neg x = 0$ − закон противоречия;

8) $x \vee \neg x = 1$ − закон исключенного третьего;

9) $\neg(\neg x) = x$ − закон снятия двойного отрицания;

$$\left.\begin{array}{l} 10)\ x \wedge (y \vee x) = x \\ 11)\ x \vee (y \wedge x) = x \end{array}\right\} - \text{законы поглощения.}$$

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1) $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$;

2) $x \to y \equiv \neg x \vee y$;

$$\left.\begin{array}{l} 3)\ \neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y \\ 4)\ \neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y \end{array}\right\} - \text{законы де Моргана;}$$

5) $x \wedge y \equiv \neg(\neg x \vee \neg y)$;

6) $x \vee y \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y)$.

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1) $x \wedge y \equiv y \wedge x$ − коммутативность конъюнкции;

2) $x \vee y \equiv y \vee x$ − коммутативность дизъюнкции;

3) $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ − ассоциативность конъюнкции;

4) $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ − ассоциативность дизъюнкции;

5) $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ − дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

6) $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ − дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Определение 7. Полиномом Жегалкина[1] булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ее представление в виде «суммы по модулю 2» некоторых элементарных конъюнкций и, быть может, константы 1.

Полином Жегалкина может быть найден с помощью формулы Жегалкина:

[1] Жегалкин Иван Иванович (1869 − 1947) − русский математик и логик.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(a_1, a_2, \dots, a_n): \\ f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1}} \{(x_1 + \bar{a}_1) \cdot (x_2 + \bar{a}_2) \cdot \ldots \cdot (x_n + \bar{a}_n)\},$$

в которой нужно раскрыть скобки и упростить полученный многочлен с помощью соотношений $x \cdot (y + z) = xy + xz$, $x + 1 = \neg x$, $x + 0 = x$ и $x + x = 0$, где символ «+» обозначает операцию суммирования по модулю 2, а символ «·» − обычное умножение (аналог операции конъюнкции), или с помощью метода неопределенных коэффициентов, пример использования которого приводится ниже.

Определение 8. Формулы F и G называются *равносильными*, или *эквивалентными* (обозначение: $F \equiv G$), если при любых значениях входящих в них переменных логические значения высказываний, получающихся из формул F и G, совпадают.

Задание к контрольной работе № 1

Исследовать на равносильность формулы f_1, f_2 и f_3, заданные в дизъюнктивной нормальной форме, двумя способами:

1) путем их представления (на основе равносильных формул алгебры логики) в виде *совершенных конъюнктивных нормальных форм* с подтверждением правильности реструктуризации исходных формул построением их таблиц истинности;

2) путем представления заданных формул f_1, f_2 и f_3 в виде полиномов Жегалкина, формируемых двояко: а) на основе формулы Жегалкина; б) на основе метода неопределённых коэффициентов.

Таблица 1 − Варианты заданий к контрольной работе № 1

№ вар.	f_1	f_2	f_3
1	$\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y} \vee yz$	$x\bar{y} \vee xz$	$\bar{y} \vee z$
2	$\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{x} \vee x\bar{y} \vee yz$	$\bar{z}\bar{x} \vee \bar{y} \vee xz$
3	$\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee \bar{x}\bar{y}$	$y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{x} \vee \bar{y}z$	$x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}$
4	$x\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee \bar{x}yz$	$x\bar{y}\bar{z} \vee z \vee \bar{x}y$	$x\bar{y} \vee yz$
5	$\bar{y}z \vee xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}\bar{x}$	$\bar{y}\bar{x} \vee yz \vee xz$	$\bar{y}\bar{x} \vee y\bar{z} \vee xz$
6	$\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$	$x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}$	$x \vee \bar{x}yz$
7	$x\bar{y}\bar{z} \vee xz \vee yz \vee \bar{x}y\bar{z}$	$y\bar{x} \vee \bar{y}x \vee xz$	$z\bar{x} \vee \bar{y}x \vee \bar{z}$
8	$\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y} \vee yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$	$yx \vee \bar{y}x \vee z$	$\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee x\bar{z}$
9	$\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$	$y\bar{x} \vee \bar{y}x \vee x\bar{z}$	$\bar{y} \vee \bar{z}$
10	$x\bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}yz$	$y\bar{x} \vee \bar{y}x \vee \bar{x}z$	$\bar{x} \vee y\bar{z}$

Продолжение таблицы 1

№ вар.	f_1	f_2	f_3
11	$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z \vee xy \vee x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{x} \vee yx \vee x$	$\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee x$
12	$\bar{x}yz \vee \bar{y}x \vee xy\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	$y\bar{x} \vee \bar{y}\bar{z} \vee z$	$\bar{y}\bar{x} \vee z\bar{x} \vee \bar{z}x$
13	$\bar{y}\bar{z} \vee zx \vee \bar{z}y$	$yx \vee \bar{y}z$	$x \vee z$
14	$\bar{z}\bar{y} \vee z\bar{y}\bar{x} \vee xy \vee \bar{x}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz$	$\bar{y}\bar{x} \vee xy \vee \bar{z}$
15	$\bar{z}y \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z \vee \bar{z}x$	$\bar{x}yz \vee \bar{y} \vee xy\bar{z}$
16	$\bar{x}y\bar{z} \vee xy \vee x\bar{y}z$	$yz \vee x \vee \bar{x}y\bar{z}$	$xz \vee y\bar{z}$
17	$x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z \vee yz$	$xy \vee xz \vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}z \vee xy \vee \bar{y}\bar{z}$
18	$\bar{x}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz$	$y\bar{x} \vee \bar{y}z$	$y \vee x\bar{y}z$
19	$xy \vee \bar{x}yz \vee xz \vee \bar{x}\bar{y}z$	$xy \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$	$\bar{x} \vee x\bar{y} \vee y\bar{z}$
20	$x\bar{y}\bar{z} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\bar{y}z$	$y\bar{z} \vee yz \vee x$	$\bar{x}z \vee \bar{x}y \vee x\bar{z}$
21	$xz \vee \bar{x}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$	$\bar{x} \vee \bar{z}$

№ вар.	f_1	f_2	f_3
22	$xy\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}z$	$\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$	$\bar{y} \vee \bar{x}z$
23	$\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{z} \vee xy \vee \bar{x}y\bar{z}$	$y \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}$	$x\bar{z} \vee y \vee \bar{x}z$
24	$x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z \vee x \vee \bar{x}\bar{z}$	$\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z}$
25	$xy \vee \bar{x}\bar{z}$	$xy \vee \bar{x}z$	$y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz$
26	$xz \vee y \vee \bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y} \vee yz$	$xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee yz$
27	$x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee yz$	$x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y \vee xz$	$yz \vee xy \vee \bar{x}\bar{z}$
28	$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}$	$\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{z}$	$xy\bar{z} \vee z$
29	$yz \vee x\bar{y}z \vee xy \vee x\bar{y}\bar{z}$	$yz \vee x\bar{z} \vee \bar{x}z$	$y\bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{x}z$
30	$\bar{x}z \vee y \vee xz$	$\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}z$	$x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}\bar{z}$

Пример выполнения контрольной работы № 1

$$f_1(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\vee y\overline{z}\vee xz$$
$$f_2(x,y,z)=\overline{x}\vee xy\overline{z}\vee\overline{y}z$$
$$f_3(x,y,z)=xy\vee\overline{x}\,\overline{z}\vee z\overline{y}$$

I. Приведение заданных функций к СКНФ:

$$f_1(x,y,z)=\overline{x}\,\overline{y}\vee y\overline{z}\vee xz\equiv\left(\left(\overline{x}\,\overline{y}\vee y\overline{z}\right)\vee(x\wedge z)\right)\equiv$$
$$\equiv\left(\left(\left(\overline{x}\,\overline{y}\vee y\overline{z}\right)\vee x\right)\wedge\left(\left(\overline{x}\,\overline{y}\vee y\overline{z}\right)\vee z\right)\right)\equiv$$
$$\equiv\left\{\left[x\vee\left(\overline{x}\wedge\overline{y}\right)\right]\vee y\overline{z}\right\}\wedge\left\{\overline{x}\,\overline{y}\vee\left[z\vee\left(y\wedge\overline{z}\right)\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\left\{\left[\underbrace{\left(x\vee\overline{x}\right)}_{1}\wedge\left(x\vee\overline{y}\right)\right]\vee y\overline{z}\right\}\wedge\left\{\overline{x}\,\overline{y}\vee\left[\left(z\vee y\right)\wedge\underbrace{\left(z\vee\overline{z}\right)}_{1}\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\left\{x\vee\left[\overline{y}\vee\left(y\wedge\overline{z}\right)\right]\right\}\wedge\left\{z\vee\left[y\vee\left(\overline{x}\wedge\overline{y}\right)\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\left\{x\vee\left[\underbrace{\left(\overline{y}\vee y\right)}_{1}\wedge\left(\overline{y}\vee\vec{z}\right)\right]\right\}\wedge\left\{z\vee\left[\left(y\vee\overline{x}\right)\wedge\underbrace{\left(y\vee\overline{y}\right)}_{1}\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\left(x\vee\overline{y}\vee\overline{z}\right)\wedge\left(\overline{x}\vee y\vee z\right).$$

Далее следует построить таблицы истинности для исходной функции f_1 и полученного её СКФН-представления и сравнить итоговые столбцы: их тождественность должна подтвердить правильность проведенных логико-алгебраических преобразований.

$$f_2(x,y,z)=\overline{x}\vee xy\overline{z}\vee\overline{y}z\equiv\left\{\left[\overline{x}\vee\left(x\wedge y\overline{z}\right)\right]\vee\overline{y}z\right\}\equiv$$
$$\equiv\left\{\left[\underbrace{\left(\overline{x}\vee x\right)}_{1}\wedge\left(\overline{x}\vee y\overline{z}\right)\right]\vee\overline{y}z\right\}\equiv\left\{\left[\overline{x}\vee\left(y\wedge\overline{z}\right)\right]\vee\overline{y}z\right\}\equiv$$
$$\equiv\left\{\left[\left(\overline{x}\vee y\right)\wedge\left(\overline{x}\vee\overline{z}\right)\right]\vee\overline{y}z\right\}\underbrace{\equiv}_{\text{перестановка слагаемых}}\left\{\overline{y}z\vee\left[\left(\overline{x}\vee y\right)\wedge\left(\overline{x}\vee\overline{z}\right)\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\left\{\left[\overline{y}z\vee\left(\overline{x}\vee y\right)\right]\wedge\left[\overline{y}z\vee\left(\overline{x}\vee\overline{z}\right)\right]\right\}\equiv\left\{\overline{x}\vee\left[y\vee\left(\overline{y}\wedge z\right)\right]\right\}\wedge\left\{\overline{x}\vee\left[\overline{z}\vee\left(\overline{y}\wedge z\right)\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\left\{\overline{x}\vee\left[\underbrace{\left(y\vee\overline{y}\right)}_{1}\wedge\left(y\vee z\right)\right]\right\}\wedge\left\{\overline{x}\vee\left[\left(\overline{z}\vee\overline{y}\right)\wedge\underbrace{\left(\overline{z}\vee z\right)}_{1}\right]\right\}\equiv$$
$$\equiv\left(\overline{x}\vee y\vee z\right)\wedge\left(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\right).$$

Далее таблицами истинности для исходной функции f_2 полученного для нее СКНФ-представления следует «защитить» доказанную равносильность.

$$f_3(x,y,z) = x\,y \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee z\overline{y} \equiv \{[x\,y \vee (\overline{x} \wedge \overline{z})] \vee z\overline{y}\} \equiv$$

$$\equiv \{[(x\,y \vee \overline{x}) \wedge (x\,y \vee \overline{z})] \vee z\overline{y}\} \equiv \{[\overline{x} \vee (x \wedge y)] \wedge (x\,y \vee \overline{z})\} \vee z\overline{y} \equiv$$

$$\equiv \left\{\left[\underbrace{(\overline{x} \vee x)}_{1} \wedge (\overline{x} \vee y)\right] \wedge (x\,y \vee \overline{z})\right\} \vee z\overline{y} \equiv z\overline{y} \vee [(\overline{x} \vee y) \wedge (x\,y \vee \overline{z})] \equiv$$

$$\equiv [z\overline{y} \vee (\overline{x} \vee y)] \wedge [z\overline{y} \vee (x\,y \vee \overline{z})] \equiv$$

$$\equiv \{\overline{x} \vee [y \vee (z \wedge \overline{y})]\} \wedge \{x\,y \vee [\overline{z} \vee (z \wedge \overline{y})]\} \equiv$$

$$\equiv \left\{\overline{x} \vee \left[(y \vee z) \wedge \underbrace{(y \vee \overline{y})}_{1}\right]\right\} \wedge \left\{x\,y \vee \left[\underbrace{(\overline{z} \vee z)}_{1} \wedge (\overline{z} \vee \overline{y})\right]\right\} \equiv$$

$$\equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge \{\overline{z} \vee [\overline{y} \vee (x \wedge y)]\} \equiv$$

$$\equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge \left\{\overline{z} \vee \left[(\overline{y} \vee x) \wedge \underbrace{(\overline{y} \vee y)}_{1}\right]\right\} \equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

И этот результат следует подтвердить построением таблиц истинности для исходной функции f_3 и её СКНФ-представления.

Вывод (по первой части рассматриваемого примера): одинаковость СКНФ для заданных формул f_1 и f_3 указывает на их эквивалентность, то есть

$$f_1 \equiv f_3.$$

II. Построение полиномов Жегалкина для заданных функций:

$$f_1(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y} \vee y\overline{z} \vee xz$$

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}$	$y\overline{z}$	xz	$f_1(x,y,z)$
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1

а) по формуле Жегалкина:

$$f_1(x,y,z) \equiv \sum_{\substack{(a,b,c):\\ f(a,b,c)=1}} \left\{(x+\bar{a})(y+\bar{b})(z+\bar{c})\right\} = \sum_{\substack{(1,1,1)\\(1,1,0)\\(1,0,1)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\\(0,0,0)}} (x+\bar{a})(y+\bar{b})(z+\bar{c}) =$$

$$= (x+0)(y+0)(z+0) + (x+0)(y+0)(z+1) + (x+0)(y+1)(z+0) +$$
$$+ (x+1)(y+0)(z+1) + (x+1)(y+1)(z+0) + (x+1)(y+1)(z+1) =$$
$$= xyz + xy(z+1) + xz(y+1) + (xy+y)(z+1) + (x+1)(yz+z) +$$
$$+ (xy+x+y+1)(z+1) = xyz + xyz + xy + xyz + xz + xyz + yz +$$
$$+ xy + y + xyz + yz + xz + z + xyz + xz + yz + z + xy + x + y + 1 =$$
$$= 1 + x + \underbrace{z+z}_{0} + xy + xz + yz = 1 + x + xy + xz + yz.$$

б) методом неопределённых коэффициентов

Построим полином Жегалкина методом неопределённых коэффициентов.

Будем искать полином для заданной функции $f_1(x,y,z)$ в виде

$$f_1(x,y,z) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + a_4 \cdot xy + a_5 \cdot xz + a_6 \cdot yz + a_7 \cdot xyz.$$

Используя таблицу истинности для функции $f_1(x,y,z)$, будем подставлять наборы значений переменных и соответствующие им логические значения функции f_1 в гипотетический вид полинома Жегалкина и последовательно находить неопределённые коэффициенты a_i:

$$\begin{cases} f_1(1,1,1)=1 \\ f_2(1,1,0)=1 \\ f_3(1,0,1)=1 \\ f_4(1,0,0)=0 \\ f_5(0,1,1)=0 \\ f_6(0,1,0)=1 \\ f_7(0,0,1)=1 \\ f_8(0,0,0)=1 \end{cases} \begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 1 \cdot 1 + a_5 \cdot 1 \cdot 1 + a_6 \cdot 1 \cdot 1 + a_7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 1 \cdot 1 + a_5 \cdot 1 \cdot 0 + a_6 \cdot 1 \cdot 0 + a_7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 1, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 1 \cdot 0 + a_5 \cdot 1 \cdot 1 + a_6 \cdot 0 \cdot 1 + a_7 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1, \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 1 \cdot 0 + a_5 \cdot 1 \cdot 0 + a_6 \cdot 0 \cdot 0 + a_7 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 0, \\ a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 0 \cdot 1 + a_5 \cdot 0 \cdot 1 + a_6 \cdot 1 \cdot 1 + a_7 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0, \\ a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 0 \cdot 1 + a_5 \cdot 0 \cdot 0 + a_6 \cdot 1 \cdot 0 + a_7 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 = 1, \\ a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 0 \cdot 0 + a_5 \cdot 0 \cdot 1 + a_6 \cdot 0 \cdot 1 + a_7 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 = 1, \\ a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 0 \cdot 0 + a_5 \cdot 0 \cdot 0 + a_6 \cdot 0 \cdot 0 + a_7 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 1. \end{cases}$$

После исключения из системы заведомо нулевых элементов она примет более простой вид:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1, \\ a_0 + a_1 + a_2 \qquad + a_4 \qquad\qquad\qquad = 1, \\ a_0 + a_1 \qquad + a_3 \qquad + a_5 \qquad\qquad = 1, \\ a_0 + a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \\ a_0 \qquad + a_2 + a_3 \qquad\qquad + a_6 \qquad = 0, \\ a_0 + a_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0, \\ a_0 + a_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + a_3 = 1 \rightarrow a_3 = 0, \\ a_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 1. \end{cases}$$

Остальные коэффициенты полинома Жегалкина находятся из системы

$$\left.\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1, \\ a_0 + a_1 + a_2 \qquad + a_4 \qquad\qquad\qquad = 1, \\ a_0 + a_1 \qquad + a_3 \qquad + a_5 \qquad\qquad = 1, \\ a_0 + a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \\ a_0 \qquad + a_2 + a_3 \qquad\qquad + a_6 \qquad = 0. \end{cases}\right|_{\substack{a_0=1 \\ a_2=0 \\ a_3=0}} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a_1 + 0 + 0 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1, \\ 1 + a_1 + 0 \qquad + a_4 \qquad\qquad\qquad = 1, \\ 1 + a_1 \qquad + 0 \qquad + a_5 \qquad\qquad = 1, \\ 1 + a_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0, \\ 1 \qquad + 0 + 0 \qquad\qquad + a_6 \qquad = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a_6 = 1$, $a_1 = 1$, $a_5 = 1$, $a_4 = 1$ и из первого уравнения системы $1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + a_7 = 1$ находим, что $a_7 = 0$.

Таким образом, полином Жегалкина для функции $f_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z + \\ + a_4 \cdot xy + a_5 \cdot xz + a_6 \cdot yz + a_7 \cdot xyz \end{aligned}\right|_{\substack{a_0=1 \\ a_1=1 \\ a_2=0 \\ a_3=0 \\ a_4=1 \\ a_5=1 \\ a_6=1 \\ a_7=0}} = 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z,$$

и этот результат находится в полном соответствии с формулой Жегалкина.

Аналогично строятся полиномы Жегалкина для формул f_2 и f_3.

Вывод (по второй части примера): сравнивая представления формул

f_1, f_2 и f_3 в виде полиномов Жегалкина

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z, \\ f_2 &= 1 + x + x \cdot y + x \cdot z, \\ f_3 &= 1 + x + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z, \end{aligned}$$

заключаем, что $f_1 \equiv f_3$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ В ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ В ИНЖЕНЕРНОЙ И НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Теоретические сведения. Часть 1

Определение. Формула $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *логическим следствием* формул $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если она обращается в истинное высказывание на всяком наборе значений переменных, для которого в истинные высказывания обращаются все формулы $F_1, \ldots, F_m$. Для обозначения логического следования используется знак $\models$; таким образом, $F_1, F_2, \ldots, F_m \models G$.

Нахождение следствий из посылок (алгоритм 1): если имеется конечное число формул (посылок) $F_1, F_2, \ldots, F_m$ и требуется найти все формулы, являющиеся логическими следствиями данных посылок, то следует:

1) привести конъюнкцию $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_m$ посылок к СКН-форме;

2) перечислить все *совершенные дизъюнктивные* одночлены, входящие в СКНФ, а также всевозможные конъюнкции этих одночленов по два, по три и т.д.;

3) придать формулам, полученным на предыдущем шаге, более удобную равносильную форму и записать их в ответ: именно этот набор формул и будет исчерпывать совокупность всех логических следствий из данных посылок.

Нахождение посылок для данных следствий (алгоритм 2): если имеется формула $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и требуется найти все формулы, логическим следствием каждой из которых будет формула G, то следует:

1) найти СКН-форму для заданной формулы-следствия G и выявить *совершенные дизъюнктивные* одночлены от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые в ней отсутствуют;

2) затем составить конъюнкции формулы G с этими недостающими одночленами, взятыми по одному, по два, по три и т.д.;

3) полученная совокупность формул будет искомой (с точностью до равносильности формул).

Теоретические сведения. Часть 2

В этой части данной работы рассматривается применение алгебры высказываний к синтезу релейно-контактных схем, используемых в компьютерных и многих других электронных устройствах и системах.

Далее рассматривается метод математической индукции, базирующийся на принципе (аксиоме) математической индукции, который может быть описан следующим образом.

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

а) утверждение справедливо при n=1;

б) при любом натуральном значении N из справедливости утверждения для n=N вытекает его справедливость и для n=N+1.

Доказательство по методу математической индукции проводится следующим образом.

Сначала доказываемое утверждение проверяется при n = 1. Эту часть доказательства называют *базисом (базой) индукции*. Затем следует часть доказательства, называемая *индукционным шагом*. В этой части доказывают справедливость утверждения для n = N + 1 в предположении его справедливости для n = N (*предположение индукции*). При проведении индукционного шага нужно внимательно следить за тем, чтобы рассуждение оставалось верным для любых значений N, то есть чтобы никакие конкретные свойства числа N (например, чётность, простота и т.д.) не использовались в процессе доказательства пункта б) аксиомы математической индукции.

Задание к контрольной работе № 2. Часть 1

1) Методом от противного выяснить, верно ли предложенное логическое следование. Справедливость полученного вывода подтвердить решением этой же задачи на основе определения понятия логического следования.

2) Найти все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями заданных формул-посылок $F_1, F_2, \ldots$.

3) Найти все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы алгебры высказываний, для которых заданная формула G является логическим следствием.

Таблица 2 − Варианты заданий к контрольной работе № 2 (часть 1)

№ вар.	Установить, верно ли логическое следование	Найти все следствия из указанных посылок	Найти все посылки, приводящие к указанному следствию
1	$F \to G, ((F \vee L) \wedge H) \to M, L \to H \models ((F \vee L) \wedge G) \to \overline{M}$	$X \to Y, X$	
2	$(P \to Q) \to (R \wedge S), \overline{R} \models P \wedge \overline{Q}$		$\overline{X} \vee \overline{Y}$
3	$(F \wedge G) \to \overline{R}, (F \wedge H) \to K, F \to \overline{K}, (F \wedge \overline{G}) \to H \models F \to \overline{R}$	$X \to Y, \overline{Y}$	
4	$(P \vee Q) \to (R \to S), \overline{P} \wedge \overline{Q} \models R \wedge \overline{S}$		$X \to Y$
5	$F \to G, \overline{K} \to \overline{L}, S \to H, \overline{F} \to \overline{K}, H \to L \models S \to G$	$X \leftrightarrow Y, \overline{X}$	
6	$P \to Q, R \to S, P \vee S \models Q \vee R$		$X \vee \overline{Y}$
7	$(F \wedge G) \to H, (H \wedge K) \to L, \overline{M} \to (K \wedge L) \models (F \wedge G) \to M$	$X \vee Y, X, \overline{Y}$	
8	$P \to Q, R \to S, P \wedge R \models Q \wedge S$		$\overline{X \vee Y}$
9	$F \to (G \to H), (H \wedge K) \to L, \overline{M} \to (K \wedge \overline{L}) \models F \to (G \to M)$	$X \to Y, Y \to Z$	
10	$P \to Q, P \vee R \models (P \vee R) \to (P \wedge Q)$		$(X \vee Y) \to (X \wedge Y)$
11	$(F \vee G) \to (H \wedge K), (K \vee L) \to M \models F \to M$	$X \leftrightarrow Y, Y \leftrightarrow Z$	
12	$(P \to Q) \to R \models P \vee Q \vee R$		$\overline{X} \wedge Y$
13	$F \to (G \wedge H), \overline{G} \vee K, (L \to \overline{M}) \to \overline{K}, G \to (F \wedge \overline{L}) \models G \to L$	$(X \wedge Y) \to Z, X \vee Y$	
14	$P \to (Q \to R) \models (P \to Q) \to R$		$(X \vee Y) \to \overline{X}$
15	$(F \to G) \wedge (H \to K), (G \to L) \wedge (K \to M), \overline{L \wedge M}, F \to H \models \overline{F}$	$(X \wedge Y) \to Z,$ $Y \to X$	
16	$R \to (Q \vee \overline{P}) \models P \to (Q \wedge R)$		$\overline{X} \to Y$
17	$F \to G, G \to H, \overline{H} \models \overline{F}$	$X \to Y, Y \vee Z,$ $(X \wedge Y) \leftrightarrow Z$	
18	$P \to (Q \wedge R) \models (P \wedge Q) \to R$		$X \leftrightarrow \overline{Y}$
19	$F \to G, K \to \overline{H}, H \vee \overline{G} \models F \to \overline{K}$	$(X \wedge Y) \to \overline{Z},$ Y, Z	
20	$(P \vee R) \leftrightarrow Q \models (P \vee Q) \leftrightarrow R$		$\overline{X} \to (X \wedge Y)$
21	$P \to Q, R \to S, P \wedge R \models Q \wedge S$	$X \to (Y \vee Z),$ $Z \to Y$	
22	$P \vee (Q \to R) \vee Q \models (P \vee Q) \leftrightarrow R$		$X \leftrightarrow Y$
23	$P \to Q, R \to S, \overline{P} \vee \overline{R} \models \overline{Q} \vee \overline{S}$	$\overline{X} \to Z, \overline{Y} \to \overline{Z}$	
24	$(P \leftrightarrow Q) \to (Q \leftrightarrow R) \models P \to (Q \to R)$		$(X \to Z) \wedge (Z \to Y) \wedge X$
25	$P \to Q, R \to S, \overline{Q} \wedge \overline{S} \models \overline{P} \wedge \overline{Q}$	$\overline{X} \vee Z, \overline{Z} \wedge \overline{Y},$ $Y \leftrightarrow X$	
26	$P \to Q \models (P \to R) \vee Q$		$(X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{Y}$
27	$(P \vee Q) \to (R \wedge S), P \models R \wedge S$	$X \to Y, Y \to Z,$ $X \vee Z$	
28	$(P \wedge Q) \to R \models (P \to Q) \vee R$		$X \wedge Y$
29	$(P \vee Q) \to (R \wedge S), \overline{R} \models \overline{P} \wedge \overline{Q}$	$X \vee Y \vee Z, X \leftrightarrow Y,$ $Y \wedge \overline{Z}$	
30	$(P \to Q) \to (P \to R) \models (P \to Q) \to R$		$\overline{(Y \vee Z)} \wedge (X \to Y)$

Задание к контрольной работе № 2. Часть 2

4) Построить релейно-контактную схему, заданную формулой A, и определить её функцию проводимости; провести минимизацию схемы.

5) Вывести формулу для указанного ряда S_n и обосновать её справедливость методом математической индукции.

Варианты заданий для выполнения первой части этой работы приведены в таблице 2, для выполнения второй части – в таблице 3.

Таблица 3 − Варианты заданий к контрольной работе № 2 (часть 2)

№ вар.	Производящая функция РКС (A) или её функция проводимости $F(x, y, z)$	S_n
1	$X(\overline{Y}Z \vee X \vee Y)$	$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$
2	$XYZ \vee \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}Y$	$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3$
3	$X(YZ \vee \overline{Y}\,\overline{Z}) \vee \overline{X}(\overline{Y}Z \vee Y\overline{Z})$	$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1^4 + 2^4 + \ldots + (n-1)^4 + n^4$
4	$(\overline{X} \vee Y) \wedge (ZY \vee X) \vee U$	$\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n - 1)$
5	$(X \to Y) \wedge (Y \to Z)$	$\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2 \cdot n - 1)^2$
6	$(X \to Y) \to (\overline{X} \wedge (Y \vee Z))$	$\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2 \cdot n - 1)^3$
7	$((X \to Y) \wedge (Y \to Z)) \to (X \to Z)$	$\sum_{k=1}^{n} \{k \cdot (k+1)^2\} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 16 + \ldots + n \cdot (n+1)^2$
8	$(X \to (Y \to Z)) \to (Y \to X)$	$\sum_{k=1}^{n} \{k \cdot (k+1)\} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1)$
9	$F(0,1,0) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$	$\sum_{k=1}^{n} \{k \cdot (3 \cdot k + 1)\} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n \cdot (3 \cdot n + 1)$
10	$F(1,0,1) = F(1,1,0) = 1$	$\prod_{k=1}^{n} \left\{1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right\} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$
11	$F(0,0,1) = F(0,1,1) = F(1,0,1) = F(1,1,1) = 1$	$\sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{k \cdot (k+1)}\right\} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$

№ вар.	Производящая функция РКС (A) или её функция проводимости $F(x,y,z)$	S_n
12	$F(1,1,0)=F(1,1,1)=1$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^k\cdot k\right\}=-1+2-3+4-...+(-1)^n\cdot n$
13	$F(0,0,1)=F(1,0,1)=F(1,0,0)=1$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^k\cdot(2\cdot k-1)\right\}=-1+3-5+7-...+(-1)^n\cdot(2\cdot n-1)$
14	$F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,0,1)=1$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{(2\cdot k-1)\cdot(2\cdot k+1)}\right\}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}$
15	$(X\to(Y\to Z))\to(Y\to\overline{X})$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{(-1)^{k-1}\cdot k^2\right\}=1-4+9-16+...+(-1)^{n-1}\cdot n^2$
16	$(XY\vee\overline{Z}\vee\overline{X})\wedge(\overline{X}\vee Y)$	$\sum_{k=1}^{n}\{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\}=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$
17	$(\overline{X}\vee Y)\wedge(YZ\vee X)\vee UZ$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{(k+1)\cdot k^2\right\}=2\cdot 1+3\cdot 4+4\cdot 9+...+(n+1)\cdot n^2$
18	$(X\leftrightarrow Y)\wedge(X\vee Y)$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}\right\}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$
19	$(\overline{X}\vee Y)T\,\overline{Y}\,\overline{X}(Y\vee Z)$	$\sum_{k=1}^{n}\{\sin(2\cdot k-1)x\}=\sin x+\sin 3x+...+\sin(2\cdot n-1)x$
20	$X(YZ\vee T)\vee X\,Y\,\overline{Z}\vee Z(Y\vee\overline{X})$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{k\cdot(2^k-1)\right\}=1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 7+...+n\cdot(2^n-1)$
21	$\overline{X}(Y\overline{Z}\vee X(TY\vee Z(X\vee\overline{Y})))$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{(2\cdot k-1)\cdot 3^k\right\}=1\cdot 3+3\cdot 9+5\cdot 27+...+(2\cdot n-1)\cdot 3^n$
22	$(X\vee YZ)\wedge(XT\vee Z(\overline{X}\vee Y))$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cdot k-1}{2^k}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+...+\frac{2\cdot n-1}{2^n}$
23	$X\overline{Y}\vee U(V\vee Z)\overline{X}\vee\overline{X}\,U\,V$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)^2\right\}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+...+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$
24	$((Z\vee X)\overline{Y}U\vee\overline{X}V)XZ$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right\}=\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+...+\frac{n\cdot(n+1)}{2}$
25	$X(Y\vee\overline{Z})\vee\overline{X}\vee(Y\vee X\overline{Z})X$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2^k}\right\}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}$
26	$(XY\to\overline{X}Y)\wedge(X\vee ZY)$	$\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{k^2-1}\right\}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+...+\frac{1}{n^2-1}$
27	$(X\to Y)\to\overline{X}(Y\vee Z)$	$\sum_{k=1}^{n}\{\cos(kx)\}=\cos x+\cos 2x+...+\cos nx$
28	$(X\to(Y\to Z))\to(Y\to\overline{X})$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{k\cdot x^k\right\}=x+2\cdot x^2+3\cdot x^3+...+n\cdot x^n$
29	$(X\to(Y\to\overline{Z}))\vee(XY\leftrightarrow Z)$	$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k^2+3\cdot k+2}\right\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+...+\frac{1}{n^2+3\cdot n+2}$
30	$X\overline{Y}\vee Z\vee(X\vee\overline{Y})Z$	$\sum_{k=1}^{n}\{\cos(2\cdot k-1)x\}=\cos x+\cos 3x+...+\cos(2\cdot n-1)x$

Пример выполнения контрольной работы № 2. *Часть 1*

I. Выяснить, выполняется ли следующее логическое следование:

$$(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \to (\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}), (\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to \mathrm{L} \models (\mathrm{P} \to \mathrm{L}).$$

Решение. Предположим, что данное следование не выполняется, то есть

$$(((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \to (\mathrm{R} \wedge \mathrm{S})) \wedge ((\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to \mathrm{L})) \to (\mathrm{P} \to \mathrm{L}) \equiv 0.$$

На основании определения операции импликации отсюда следует система двух логических равенств, которая при их совместности будет указывать на правомерность предположения о невыполнимости исследуемого логического следования, тогда как их несовместность будет влечь за собой положительный ответ на вопрос задачи.

Итак, имеем

$$\begin{cases} ((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \to (\mathrm{R} \wedge \mathrm{S})) \wedge ((\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to \mathrm{L}) \equiv 1, \\ \mathrm{P} \to \mathrm{L} \equiv 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим: $\mathrm{P} = 1; \mathrm{L} = 0$. При этих значениях пропозициональных переменных P и L первое уравнение системы принимает вид

$$\begin{cases} (1 \vee \mathrm{Q}) \to (\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}) \equiv 1, \\ (\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to 0 \equiv 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \to (\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}) \equiv 1, \\ (\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to 0 \equiv 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{R} \wedge \mathrm{S} \equiv 1, \\ (\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to 0 \equiv 1. \end{cases}$$

Продолжая цепочку равносильных систем, находим

$$\begin{cases} \mathrm{R} \wedge \mathrm{S} \equiv 1, \\ (\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to 0 \equiv 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{R} = 1, \\ \mathrm{S} = 1, \\ (1 \vee \mathrm{K}) \to 0 \equiv 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{R} = 1, \\ \mathrm{S} = 1, \\ 1 \to 0 \equiv 1 \text{– противоречие} \end{cases}$$

с определением импликации $(\to)$!

Таким образом, предположение о невыполнимости заданного логического следования оказалось ложным и, следовательно, оно выполнимо.

Ответ: логическое следование $(\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \to (\mathrm{R} \wedge \mathrm{S}), (\mathrm{S} \vee \mathrm{K}) \to \mathrm{L} \models (\mathrm{P} \to \mathrm{L})$

истинно.

Для подтверждения правильности полученного вывода о том, что имеет место логическое следование $(P \vee Q) \to (R \wedge S), (S \vee K) \to L \models (P \to L)$, ввиду объемности соответствующей таблицы истинности − она должна содержать $2^6 = 64$ строки − воспользуемся алгебраическим подходом и покажем, что формула

$$W \equiv (((P \vee Q) \to (R \wedge S)) \wedge ((S \vee K) \to L)) \to (P \to L)$$

является тавтологией, то есть тождественно истинна.

$$(((P \vee Q) \to (R \wedge S)) \wedge ((S \vee K) \to L)) \to (P \to L) \equiv$$
$$\equiv (((\overline{P \vee Q}) \vee (R \wedge S)) \wedge ((\overline{S \vee K}) \vee L)) \to (\overline{P} \vee L) \equiv$$
$$\equiv (((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (R \wedge S)) \wedge ((\overline{S} \wedge \overline{K}) \vee L)) \to (\overline{P} \vee L) \equiv$$
$$\equiv \overline{(((\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (R \wedge S)) \wedge ((\overline{S} \wedge \overline{K}) \vee L))} \vee (\overline{P} \vee L) \equiv$$
$$\equiv (((P \vee Q) \wedge (\overline{R} \vee \overline{S})) \vee ((S \vee K) \wedge \overline{L})) \vee (\overline{P} \vee L) \equiv$$
$$\equiv \underbrace{(\overline{P} \vee ((P \vee Q) \wedge (\overline{R} \vee \overline{S})))}_{\equiv (\overline{P} \vee (P \vee Q)) \wedge (\overline{P} \vee (\overline{R} \vee \overline{S}))} \vee \underbrace{(L \vee ((S \vee K) \wedge \overline{L}))}_{\equiv (L \vee (S \vee K)) \wedge (L \vee \overline{L})} \equiv$$
$$\equiv (\overline{P} \vee (\overline{R} \vee \overline{S})) \vee (L \vee (S \vee K)) \equiv \overline{P} \vee \overline{R} \vee \underbrace{\overline{S} \vee L \vee S}_{1} \vee K \equiv 1,$$

то есть формула $W(P, Q, R, S, K, L)$ является тавтологией, что доказывает факт логического следования

$$(P \vee Q) \to (R \wedge S), (S \vee K) \to L \models (P \to L).$$

II. Найти все не равносильные между собой и не тождественно ложные формулы алгебры высказываний (посылки), из которых логически следует формула $Y \wedge Z$.

Решение. Следуя алгоритму нахождения посылок для данных следствий (алгоритм 2) и полагая, что заданная формула-следствие $Y \wedge Z$ зависит от трех аргументов X, Y и Z, найдём её совершенную конъюнктивную нормальную форму:

$$Y \wedge Z \equiv (Y \wedge Z) \vee (X \wedge \overline{X}) \equiv ((Y \wedge Z) \vee X) \wedge ((Y \wedge Z) \vee \overline{X}) \equiv$$
$$\equiv ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)) \wedge ((\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Z)) \equiv$$
$$\equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{X} \vee Z) \equiv$$

$$\begin{cases} (X \vee Y) \equiv X \vee Y \vee (Z \wedge \overline{Z}) \equiv (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z}) \\ (X \vee Z) \equiv X \vee Z \vee (Y \wedge \overline{Y}) \equiv (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z) \\ (\overline{X} \vee Y) \equiv \overline{X} \vee Y \vee (Z \wedge \overline{Z}) \equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \\ (\overline{X} \vee Z) \equiv \overline{X} \vee Z \vee (Y \wedge \overline{Y}) \equiv (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \end{cases}$$

$$\equiv (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge$$
$$\wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \equiv$$
$$\equiv (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee Z) \wedge$$
$$\wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z).$$

Далее, чтобы наглядно увидеть, каких совершенных дизъюнктивных одночленов от переменных X, Y, Z недостаёт в полученной СКНФ для заданной формулы-следствия $Y \wedge Z$, целесообразно обратиться к таблице истинности этой формулы:

X	Y	Z	Совершенные дизъюнкты, входящие в СКНФ $(Y \wedge Z)$
1	1	1	+
1	1	0	+
1	0	1	+
1	0	0	−
0	1	1	+
0	1	0	+
0	0	1	+
0	0	0	−

Из таблицы истинности следует, что в СКНФ $(Y \wedge Z)$ отсутствуют два совершенных дизъюнктивных одночлена:
$(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$ − четвертая строка таблицы истинности;
$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$ − восьмая строка таблицы истинности.

Таким образом, согласно алгоритму 2, всё множество формул-посылок, зависящих от трех пропозициональных переменных X, Y и Z, следствием каждой из которых будет заданная формула-следствие $(Y \wedge Z)$, будет представлено следующими формулами:

1) $(Y \wedge Z) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$;

2) $\left(Y \wedge Z\right) \wedge \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$;

3) $\left(Y \wedge Z\right) \wedge \left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \wedge \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)$.

Упростим полученные формулы:

1) $\left(Y \wedge Z\right) \wedge \left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \equiv YZ\left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \equiv XYZ \vee \underbrace{YZ\overline{Y}}_{0} \vee \underbrace{YZ\overline{Z}}_{0} \equiv XYZ \equiv X \wedge Y \wedge Z.$

2) $\left(Y \wedge Z\right) \wedge \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \equiv YZ\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \equiv \overline{X}YZ \vee \underbrace{YZ\overline{Y}}_{0} \vee \underbrace{YZ\overline{Z}}_{0} \equiv \overline{X}YZ \equiv \overline{X} \wedge Y \wedge Z.$

3) $\underbrace{\left(Y \wedge Z\right) \wedge \left(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right)}_{=\left(X \wedge Y \wedge Z\right) - \text{по } 1)} \wedge \left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \equiv XYZ\left(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\right) \equiv \underbrace{XYZ\overline{X}}_{0} \vee \underbrace{XYZ\overline{Y}}_{0} \vee \underbrace{XYZ\overline{Z}}_{0} \equiv 0,$

то есть тождественно ложная формула.

Требованиям задачи отвечают две формулы: $\left(X \wedge Y \wedge Z\right)$ и $\left(\overline{X} \wedge Y \wedge Z\right)$, то есть логическим следствием каждой из них является заданная в условии задачи формула-следствие $\left(Y \wedge Z\right)$.

$$X \wedge Y \wedge Z \models Y \wedge Z$$

X	Y	Z	$X \wedge Y \wedge Z$	$Y \wedge Z$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	1
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$$\overline{X} \wedge Y \wedge Z \models Y \wedge Z$$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{X} \wedge Y \wedge Z$	$Y \wedge Z$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0

Очевидно, что из множества формул-посылок $\{X \wedge Y \wedge Z; \overline{X} \wedge Y \wedge Z\}$ также следует заданная в условии задачи формула-заключение $(Y \wedge Z)$:

$$(X \wedge Y \wedge Z) \wedge (\overline{X} \wedge Y \wedge Z) \models Y \wedge Z$$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$X \wedge Y \wedge Z$	$\overline{X} \wedge Y \wedge Z$	$(X \wedge Y \wedge Z) \wedge (\overline{X} \wedge Y \wedge Z)$	$Y \wedge Z$
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0

Пример выполнения контрольной работы № 2. *Часть 2*

I. Построить релейно-контактную схему, заданную формулой

$$A = \left(XY \vee \overline{Z} \vee \overline{X}\right) \wedge \left(\overline{X} \vee Y\right),$$

и определить её функцию проводимости; провести минимизацию схемы.

Решение. Релейно-контактная схема (РКС), отвечающая заданной формуле, имеет вид:

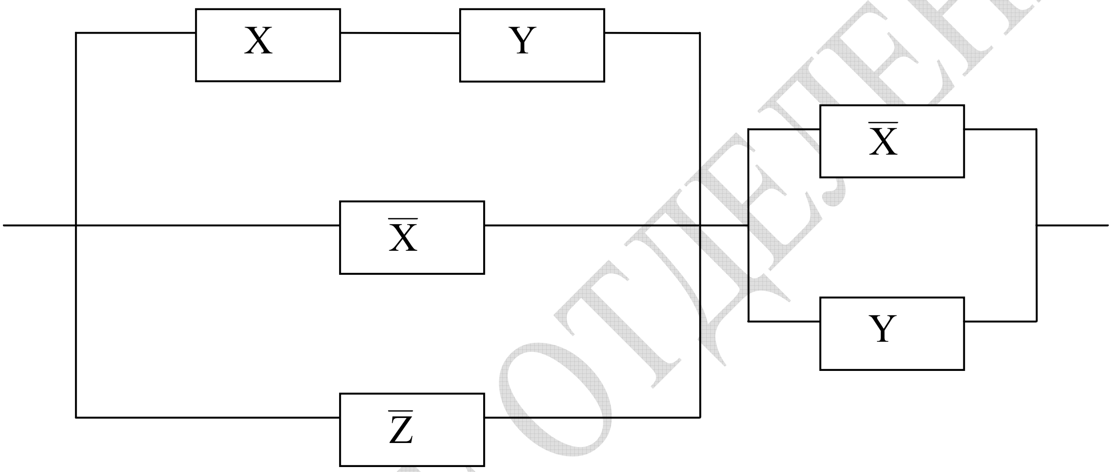

Рисунок 1 − Релейно-контактная схема, заданная формулой A

Функция проводимости для данной РКС определяется таблицей истинности формулы A, задающей схему; построим её:

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	XY	$\overline{Z}$	$\overline{X}$	$XY \vee \overline{Z} \vee \overline{X}$	$\overline{X} \vee Y$	A
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Таким образом, функция проводимости построенной РКС описывается дискретным образом в следующем виде:

$$F(1;1;1)=F(1;1;0)=F(0;1;1)=F(0;1;0)=F(0;0;1)=F(0;0;0)=1.$$

Для *минимизации* РКС достаточно минимизировать её производящую формулу A; выполним эту операцию с помощью равносильных преобразований алгебры логики:

$$A=\left(XY\vee\overline{Z}\vee\overline{X}\right)\wedge\left(\overline{X}\vee Y\right)=\underbrace{XY\overline{X}}_{0}\vee\overline{Z}\,\overline{X}\vee\underbrace{\overline{X}\,\overline{X}}_{\overline{X}}\vee\underbrace{XYY}_{XY}\vee\overline{Z}Y\vee\overline{X}Y=$$

$$=\overline{Z}\,\overline{X}\vee\overline{X}\vee XY\vee\overline{Z}Y\vee\overline{X}Y=\overline{X}\underbrace{\left(\overline{Z}\vee 1\vee Y\right)}_{1}\vee XY\vee\overline{Z}Y=\overline{X}\vee XY\vee\overline{Z}Y=$$

$$=\underbrace{\left(\overline{X}\vee X\right)}_{1}\left(\overline{X}\vee Y\right)\vee\overline{Z}Y=\underbrace{\overline{X}\vee Y\vee\overline{Z}Y}_{\substack{\text{эта формула уже}\\\text{минимальнее, чем}\\\text{исходная, но и её}\\\text{можно минимизи –}\\\text{– ровать далее}}}=\overline{X}\vee Y\underbrace{\left(1\vee\overline{Z}\right)}_{1}=\overline{X}\vee Y.$$

Минимальной формуле $A=\overline{X}\vee Y$ соответствует *минимальная* релейно-контактная схема:

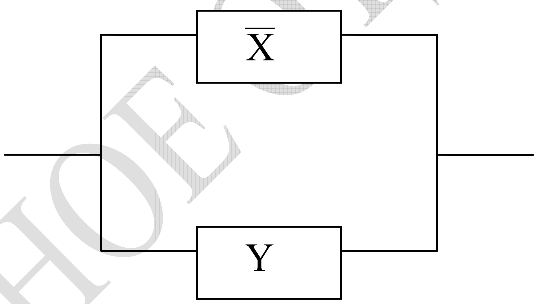

Рисунок 2 – Минимальная релейно-контактная схема

Очевидно, минимальная схема имеет такую же таблицу истинности, как и РКС, заданная исходной формулой $A=\left(XY\vee\overline{Z}\vee\overline{X}\right)\wedge\left(\overline{X}\vee Y\right)$:

X	Y	Z	$\overline{X}$	Y	A
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

Функция проводимости для *минимальной* РКС имеет уже знакомый вид:

$$F(1;1;1) = F(1;1;0) = F(0;1;1) = F(0;1;0) = F(0;0;1) = F(0;0;0) = 1.$$

Вывод по первой части работы: по заданной формуле построена соответствующая ей релейно-контактная схема, определена её функция проводимости и осуществлена минимизация РКС.

II. Вывести формулу для суммы конечного числового ряда

$$\sum_{k=1}^{n} \{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)\} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

и доказать её справедливость методом математической индукции.

Решение. Имея в виду, что операция суммирования является дискретным вариантом операции интегрирования, а $\int k \cdot (k+1) \cdot (k+2) dk$ представляет собой некоторый многочлен степени 4, то и результатом суммирования $\sum\limits_{k=1}^{n} \{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)\}$ будет некоторый многочлен четвертой степени; его коэффициенты можно найти методом неопределённых коэффициентов:

$$\sum_{k=1}^{n} \{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)\} = A \cdot n^4 + B \cdot n^3 + C \cdot n^2 + D \cdot n + E.$$

Задавая n = 1, 2, 3, 4, 5, получим систему уравнений для определения коэффициентов суммирующего многочлена:

$n = 1 \rightarrow A + B + C + D + E = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$

$n = 2 \rightarrow 16 \cdot A + 8 \cdot B + 4 \cdot C + 2 \cdot D + E = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 30,$

$n = 3 \rightarrow 81 \cdot A + 27 \cdot B + 9 \cdot C + 3 \cdot D + E = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 90,$

$n = 4 \rightarrow 256 \cdot A + 64 \cdot B + 16 \cdot C + 4 \cdot D + E = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 = 210,$

$n = 5 \rightarrow 625 \cdot A + 125 \cdot B + 25 \cdot C + 5 \cdot D + E = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7 = 420.$

$$\begin{cases} A+B+C+D+E=6, \\ 16\cdot A+8\cdot B+4\cdot C+2\cdot D+E=30, \\ 81\cdot A+27\cdot B+9\cdot C+3\cdot D+E=90, \\ 256\cdot A+64\cdot B+16\cdot C+4\cdot D+E=210, \\ 625\cdot A+125\cdot B+25\cdot C+5\cdot D+E=420. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D+E=6, \\ 15\cdot A+7\cdot B+3\cdot C+D=24, \\ 65\cdot A+19\cdot B+5\cdot C+D=60, \\ 175\cdot A+37\cdot B+7\cdot C+D=120, \\ 369\cdot A+61\cdot B+9\cdot C+D=210. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B+C+D+E=6, \\ 15\cdot A+7\cdot B+3\cdot C+D=24, \\ 50\cdot A+12\cdot B+2\cdot C=36, \\ 110\cdot A+18\cdot B+2\cdot C=60, \\ 194\cdot A+24\cdot B+2\cdot C=90. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C+D+E=6, \\ 15\cdot A+7\cdot B+3\cdot C+D=24, \\ 25\cdot A+6\cdot B+C=18, \\ 60\cdot A+6\cdot B=24, \\ 84\cdot A+6\cdot B=30. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 10\cdot A+B=4, \\ 14\cdot A+B=5. \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{4}; B=\frac{3}{2}; C=\frac{11}{4}; D=\frac{3}{2}; E=0.$$

Таким образом, предположительно,

$$\sum_{k=1}^{n}\{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\}=\frac{1}{4}\cdot n^4+\frac{3}{2}\cdot n^3+\frac{11}{4}\cdot n^2+\frac{3}{2}\cdot n= \\ =\frac{n^4+6\cdot n^3+11\cdot n^2+6\cdot n}{4}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}. \qquad (*)$$

Докажем равенство (*) методом математической индукции:

1) база индукции:

при n = 1 имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\}=\underbrace{1\cdot 2\cdot 3}_{\substack{\text{это}-\text{величина} \\ \text{левой части}(*) \\ \text{при}\, n=1}}=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)\cdot(1+3)}{4}=$$

$$= \underbrace{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}}_{\substack{\text{это}-\text{величина}\\ \text{правой части}\,(*)\\ \text{при } n=1}} .$$

Таким образом, база индукции установлена;

2) предположение индукции: равенство (*) выполняется для всех $n = 1, 2, \dots, N-1, N$, то есть

$$\sum_{k=1}^{N}\{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\} = \frac{N\cdot(N+1)\cdot(N+2)\cdot(N+3)}{4} \qquad (*)$$

3) исследуем вопрос о том, выполняется ли (*) для *следующего за N* значения индекса суммирования n, то есть верно ли равенство (*) для $n = N + 1$:

$$\sum_{k=1}^{N+1}\{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\} = \sum_{k=1}^{N}\{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)\} + (N+1)\cdot(N+2)\cdot(N+3) =$$

$$= \underbrace{\frac{N\cdot(N+1)\cdot(N+2)\cdot(N+3)}{4}}_{\text{это}-\text{по предположению индукции}} + (N+1)\cdot(N+2)\cdot(N+3) =$$

$$= (N+1)\cdot(N+2)\cdot(N+3)\cdot\left(\frac{N}{4}+1\right) = \frac{(N+1)\cdot(N+2)\cdot(N+3)\cdot(N+4)}{4},$$

а это и есть соотношение (*) для $n = N + 1$.

Следовательно, равенство (*) справедливо при любом натуральном n.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ АЛГОРИТМА С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Теоретические сведения

Задачи неотделимы от алгоритмов решения. Понятие алгоритма в науке не новое, но лишь в двадцатом веке была предпринята попытка его формализовать. Различные формализации понятия алгоритма были предложены в середине 30-х годов прошлого столетия, когда и стала закладываться современная теория алгоритмов. Почти одновременно независимо и в разных формах рядом крупных математиков того времени – А. Тьюрингом, А. Чёрчем, Э. Постом, К. Гёделем, С. Клини и другими – было формализовано понятие вычислимости. Эмиль Пост и Алан Тьюринг определили алгоритмы как вычисление на абстрактных машинах. При этом вычислимость функции понималась как вычислимость на машинах Тьюринга (Turing machine).

Основные свойства алгоритма дискретности, детерминизма, массовости и результативности позволяют представить процесс вычисления какой-либо числовой функции с помощью математической машины. Эта машина за конечное число шагов позволяет вычислить по исходным данным искомый числовой результат в соответствии с заданными правилами. По сути, машина Тьюринга – это не устройство, выполняющее некоторый алгоритм, это и есть сам алгоритм. Для каждой отдельной задачи существует своя машина Тьюринга. Машина Тьюринга является абстракцией, которую нецелесообразно реализовывать практически. Поэтому алгоритмы для машины Тьюринга должны выполняться другими средствами. Основным следствием формализации алгоритмов с использованием машины Тьюринга является возможность доказательства существования или отсутствия алгоритмов решения различных задач.

Описывая различные алгоритмы для машин Тьюринга и доказывая реализуемость всевозможных композиций алгоритмов, А. Тьюринг показал разнообразие возможностей предложенной им конструкции, что позволило ему высказать тезис (тезис Тьюринга): «Всякий алгоритм может быть реализован соответствующей машиной Тьюринга».

Доказать тезис Тьюринга нельзя, так как в его формулировке не определено понятие «всякий алгоритм». Его можно только обосновать, представляя различные алгоритмы в виде машин Тьюринга. Было доказано, что класс функций, вычислимых на этих машинах, совпадает с классом частично рекурсивных функций.

Изучение машин Тьюринга и практика составления программ для них закладывают фундамент алгоритмического мышления, сущность которого состоит в том, что нужно уметь разделять тот или иной процесс вычисления или какой-либо другой деятельности на простые составляющие шаги. В машине Тьюринга расчленение (анализ) вычислительного процесса на простейшие операции доведено до предельной возможности: распознавание единичного рассмотренного вхождения символа, перемещение точки наблюдения данного ряда символов в соседнюю точку и изменение имеющейся в памяти информации. Конечно, такое мелкое дробление вычислительного процесса, реализуемого в машине Тьюринга, значительно его удлиняет. Но вместе с тем логическая структура процесса, расчлененного, образно выражаясь, до атомарного состояния, значительно упрощается и предстает в некотором стандартном виде, весьма удобном для теоретических исследований. Именно такое расчленение на простейшие составляющие вычислительного процесса на машине Тьюринга дает еще один косвенный аргумент в пользу тезиса Тьюринга: всякая функция, вычисляемая с помощью какого-либо алгоритма, может быть вычислена на машине Тьюринга, потому что каждый шаг данного алгоритма можно расчленить на еще более мелкие операции, которые реализуются в машине Тьюринга. Таким образом, понятие машины Тьюринга есть теоретический инструмент анализа алгоритмического процесса.

В современных ЭВМ алгоритмический процесс расчленен не на столь мелкие составляющие, как в машинах Тьюринга. Наоборот, архитекторы вычислительных систем стремятся к известному укрупнению выполняемых машиной процедур. Так, для выполнения операции сложения на машине Тьюринга составляется целая программа, а в современной вычислительной машине такая операция является простейшей. Машина Тьюринга обладает бесконечной внешней памятью (неограниченная в обе стороны лента, разбитая на ячейки). Ни в одной реально существующей машине бесконечной памяти быть не может. Это говорит о том, что машины Тьюринга отображают потенциальную возможность неограниченного увеличения объема памяти современных ЭВМ. В большинстве ЭВМ принята трехадресная система команд, обусловленная необходимостью выполнения бинарных операций, в которых участвует содержимое сразу трех ячеек памяти. Например, число из ячейки *a* умножается на число из ячейки *b,* и результат отправляется в ячейку *c.* Существуют ЭВМ двухадресные и одноадресные. Так, одноадресная ЭВМ работает следующим образом: вызывается (в сумматор) число из ячейки *a;* в сумматоре происходит, например, умножение этого числа на число из ячейки *b;* результат отправляется из сумматора в ячейку *c.* Машину Тьюринга можно считать одноадресной машиной, в которой система одноадресных команд упрощена еще больше: на каждом шаге работы машины команда предписывает замену лишь единственного знака, хранящегося в обозреваемой ячейке, а адрес обозреваемой ячейки при переходе к следующему такту может меняться на единицу или не меняться вовсе. Это удлиняет процесс, но в то же время резко унифицирует его, делает стандартным.

Можно сказать, что современные ЭВМ есть некие реальные физические модели машин Тьюринга, огрубленные с точки зрения теории, но созданные в целях реализации конкретных вычислительных процессов. В свою очередь понятие машины Тьюринга и теория таких машин образуют теоретический фундамент современных вычислительных систем.

Определения машины Тьюринга могут иметь существенные отличия. Все получаемые устройства будут иметь одинаковую вычислительную мощь, но различаться тонкостями архитектуры и удобством конструирования.

По своему устройству машина Тьюринга похожа на конечный автомат. В каждый момент времени машина находится в некотором состоянии, причем общее количество состояний конечно. Работу машина начинает в начальном состоянии, а заканчивает в конечном. Отличие от конечного автомата состоит в том, что у машины Тьюринга есть считывающая/записывающая головка (указатель), способная перемещаться по входной ленте в любую сторону. Конечный автомат может анализировать символы входной ленты лишь последовательно, друг за другом. Кроме того, машина Тьюринга способна не только считывать информацию с входной ленты, но и производить запись на неё.

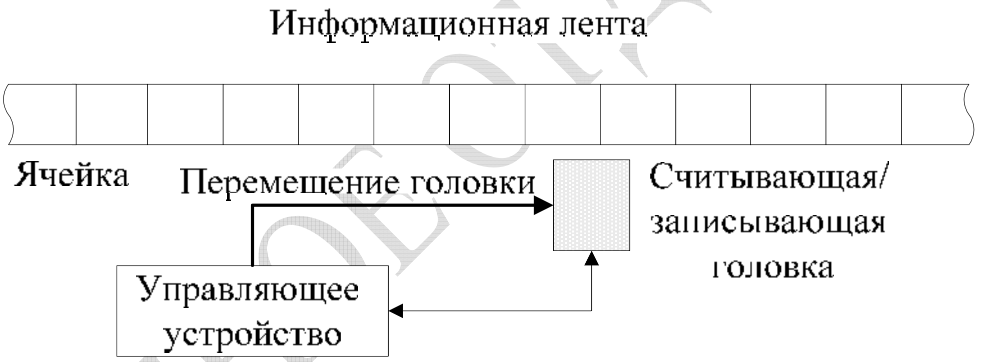

Рисунок 3 – Машина Тьюринга

Правила переходов для машины Тьюринга (по смыслу аналогичные правилам для конечных автоматов) сопоставляют различным парам вида (*состояние*, *символ*) тройки вида (*состояние'*, *символ'*, *сдвиг*). Пара (*состояние*, *символ*) описывает текущую ситуацию: состояние, в котором находится устройство плюс рассматриваемый в данный момент символ входной строки – символ, находящийся под указателем. В результате перехода машина оказывается в состоянии *состояние'*, а на ленту (ячейку, находящуюся под головкой) записывается символ *символ'*. Кроме того, головка сдвигается в соответствии с компонентой *сдвиг*. Различных инструкций сдвига всего три:

- *L*: сдвинуть головку на одну ячейку влево;
- *R*: сдвинуть головку на одну ячейку вправо;
- *H*: оставить текущее положение головки без изменения.

Конечные автоматы анализируют входную строку посимвольно – с первого и до последнего элемента по порядку – после её считывания работа автомата завершается. Машина Тьюринга способна перемещаться по строке сколько угодно, и по этой причине признаком завершения работы может служить лишь переход в допускающее или отвергающее состояние. Можно сконструировать машину Тьюринга, вообще никогда не заканчивающую работу. Зацикливание машины всегда означает неприменимость входной строки.

Детерминированные машины Тьюринга не содержат конфликтующих правил перехода. Также как конечный автомат, Машину Тьюринга можно изобразить с помощью графа. Ребра графа помечаются исходным и заменяемым символами ленты, а также командой перехода.

Формальное определение машины Тьюринга включает следующие элементы:

- конечное множество состояний (внутренняя память):

$$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\};$$

- конечное множество символов ленты (внешняя память):

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\};$$

- символы перемещения считывающей/записывающей головки:

$$D = \{L, R, H\};$$

- функция выхода:

$$\varphi: Q \times A \to A;$$

- функция перехода:

$$\psi: Q \times A \to Q;$$

- функция перехода:

$$\psi: Q \times A \to Q;$$

- функция перемещения указателя:

$$\psi: Q \times A \to D.$$

- особые состояния:

q_0 – начальное;

q_k – конечное (возможно несколько $q_{k1}, q_{k2}, \ldots q_{kl},$);

q_{yes} и q_{no} – допускающее и отвергающее (опционально).

Описание машины Тьюринга есть последовательность символов на информационной ленте, положение считывающей – записывающей головки относительно ячейки информационной ленты и текущее состояние управляющего устройства. Такое описание называют *конфигурацией* машины Тьюринга:

$K = \alpha q_i \beta$,

где α – слово, расположенное слева от указателя, β – слово, расположенное справа от указателя, q_i – текущее состояние машины Тьюринга. Символ, находящийся в ячейке непосредственно под считывающей/записывающей головкой, является первым символом слова β.

Если конфигурация K не заключительная, то к ней может быть применима только одна команда, которая переводит машину в новую конфигурацию. Так реализуется детерминизм и дискретность алгоритмического процесса.

Для удобства анализа вычислительных алгоритмов Э. Пост предложил ограничить множество символов внешнего алфавита A двумя символами, т.е. $A = \{|, \#\}$, где “|” – символ унарного кода числа, а “#” – символ пробела между числами, представленными в унарном коде. При этом любое целое положительное число может быть записано на информационную ленту последовательностью “|”, как показано ниже в таблице 4.

Таблица 4 – Запись десятичных чисел на ленте

Число в десятичной системе счисления	Слово в унарном коде на информационной ленте
0	$\|=\|^{0}$
1	$\|\|=\|^{1+1}$
2	$\|\|\|=\|^{2+1}$
i	$\|\|\|\ldots\|^{i+1}$

Существует три способа представления машины Тьюринга: совокупностью команд (протокол), таблицей соответствия и в виде графа.

Машина Тьюринга считается заданной, если заданы ее внешний и внутренний алфавиты, программа, начальная конфигурация и указано, какие из символов обозначают пустую ячейку и заключительное состояние.

Чтобы записать совокупность команд, нужно воспользоваться следующими правилами:

- начальному шагу алгоритма ставится в соответствие q_0 - начальное состояние;

- циклы реализуются так, что последнее действие цикла должно соответствовать переходу в то состояние, которое соответствует началу цикла;

- соседним шагам алгоритма соответствует переход в смежные состояния, которые соответствуют этим пунктам;

- последний шаг алгоритма вызывает переход в заключительное состояние.

На заключительном шаге должно быть получено значение заданной функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При протокольной записи все команды должны быть записаны упорядоченным списком.

Пример.

$q_0\, a_j \rightarrow q_i\, a_j\, R$,

$q_i\, a_k \rightarrow q_j\, a_i\, L$,

……………..

$q_l\, a_m \rightarrow q_k\, a_n\, H$.

При табличном описании каждая строка имеет имя текущего состояния машины, а столбец – имя символа внешней памяти (или наоборот).

Таблица 5 – Табличное описание машины Тьюринга

Состояние	Символы внешнего алфавита			
	a_i	a_k	…	a_m
q_0	$q_i\, a_j\, R$	…	…	…
q_i	…	$q_j\, a_i\, L$	…	…
…	…	…	…	…
q_l	…	…	…	$q_k\, a_n\, H$

Табличная форма описания машины более компактна и позволяет применять матричные методы анализа для оптимизации структуры алгоритма.

При описании машины Тьюринга графом вершинами являются состояния управляющего устройства, а дугами – переходы в те состояния, которые предусмотрены командой. При этом на дуге над символом «/» указывают считываемый символ, а под символом «/» – записываемый на ленту символ и компоненту команды по перемещению указателя. Начальное и конечные состояния могут выделяться.

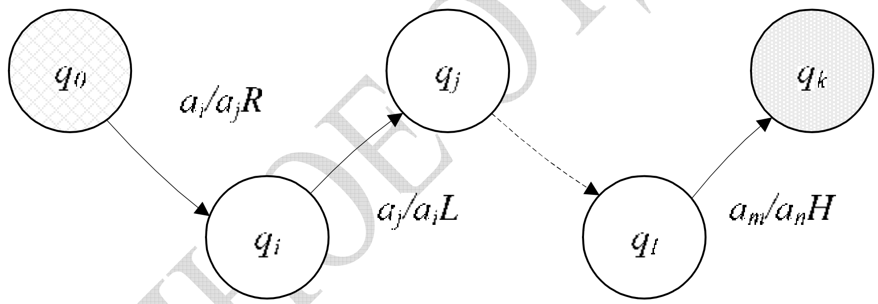

Рисунок 4 – Описание переходов машины Тьюринга в виде графа

Говорят, что машина Тьюринга вычисляет функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если выполняются следующие условия:

- для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принадлежащих области определения функции, машина Тьюринга из начальной конфигурации, имея на ленте представление аргументов, переходит в заключительную конфигурацию, имея на ленте результат (представление функции);

- для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не принадлежащих области определения функции, машина Тьюринга из начальной конфигурации работает бесконечно.

Если начальная и заключительная конфигурации машины Тьюринга являются стандартными, то говорят, что машина Тьюринга правильно вычисляет функцию f.

Задание к контрольной работе № 3

1. Составить программу, таблицу соответствия и граф алгоритма для машины Тьюринга по заданной начальной и конечной конфигурации, используя алфавит $A = \{|, \#\}$.

2. Проверить решение на некоторых значениях аргументов.

Таблица 6 – Варианты заданий к контрольной работе № 3

Вариант	Машина Т: $q_0 \|^x \# \|^y \# \|^z \# \|^s \# \|^t \# \rightarrow$	Вариант	Машина Т: $q_0 \|^x \# \|^y \# \|^z \# \|^s \# \|^t \# \rightarrow$
1	$q_k \|^{(x+z)} \# \|^{(y \div s)}$	16	$q_k \|^{(x \div t)} \# \|^{(y+z)}$
2	$q_k \|^{(x+z)} \# \|^{(y \div s)}$	17	$q_k \|^{(x \div t)} \# \|^{(y+s)}$
3	$q_k \|^{(x+z)} \# \|^{(s \div t)}$	18	$q_k \|^{(x \div t)} \# \|^{(z+s)}$
4	$q_k \|^{(x+s)} \# \|^{(y \div z)}$	19	$q_k \|^{(y \div s)} \# \|^{(x+z)}$
5	$q_k \|^{(x+s)} \# \|^{(y \div t)}$	20	$q_k \|^{(y \div s)} \# \|^{(x+t)}$
6	$q_k \|^{(x+s)} \# \|^{(z \div t)}$	21	$q_k \|^{(y \div s)} \# \|^{(z+t)}$
7	$q_k \|^{(x \div z)} \# \|^{(y+s)}$	22	$q_k \|^{(y \div t)} \# \|^{(x+z)}$
8	$q_k \|^{(x \div z)} \# \|^{(y+t)}$	23	$q_k \|^{(y \div t)} \# \|^{(x+s)}\|$
9	$q_k \|^{(x \div z)} \# \|^{(s+t)}$	24	$q_k \|^{(y \div t)} \# \|^{(z+s)}$
10	$q_k \|^{(x+t)} \# \|^{(y \div z)}$	25	$q_k \|^{(y \div z)} \# \|^{(x+s)}$
11	$q_k \|^{(x+t)} \# \|^{(y \div s)}$	26	$q_k \|^{(y \div z)} \# \|^{(x+t)}$
12	$q_k \|^{(x+t)} \# \|^{(z \div s)}$	27	$q_k \|^{(y \div z)} \# \|^{(s+t)}$
13	$q_k \|^{(x \div s)} \# \|^{(y+z)}$	28	$q_k \|^{(z \div s)} \# \|^{(x+y)}$
14	$q_k \|^{(x \div s)} \# \|^{(y+t)}$	29	$q_k \|^{(z \div s)} \# \|^{(x+t)}$
15	$q_k \|^{(x \div s)} \# \|^{(z+t)}$	30	$q_k \|^{(z \div s)} \# \|^{(y+t)}$

Примечания.

1. В таблице заданий символ «÷» обозначает усечённое вычитание: $x \div y = x - y$ при $x \geq y$ и $x \div y = 0$ при $x < y$:

$$q_0|^{x+1}\#|^{y+1} \rightarrow \begin{cases} q_{k1}|^{(x-y)+1}\#, \text{если } x > y \\ q_{k2}|\#, \text{если } x \leq y \end{cases}$$

2. Внутренний алфавит A может быть расширен произвольным количеством символов, например, «(», «)» и другими.

Пример выполнения контрольной работы № 3

Составить машину Тьюринга, результатом работы которой является сравнение длин двух слов, записанных на ленте:

Таблица 7 – Конфигурации машины Тьюринга для сравнения двух слов

Машина	Заключительная конфигурация	Условие
$T^{(1)}: q_0 \|^{x+1} \# \|^{y+1} \rightarrow$	$q_{k1} \|^{(x-y)}$	$x > y$
$T^{(2)}: q_0 \|^{x+1} \# \|^{y+1} \rightarrow$	$q_{k2} \|^{(y-x)}$	$x < y$
$T^{(3)}: q_0 \|^{x+1} \# \|^{y+1} \rightarrow$	$q_{k3}\ \#$	$x = y$

Особенность данной задачи состоит в том, что первое слово может быть больше, меньше или равно второму слову. При этом машина Тьюринга должна переходить в три различных состояния для организации ветвящегося процесса вычисления.

При запуске машины из начального состояния q_0, стирается первый символ командой $q_0| \rightarrow q_1 \# R$. Далее осуществляется движение вправо по ленте до конца первого аргумента x с помощью команды $q_1| \rightarrow q_1|R$.

Когда встретится разделяющий аргументы символ «#», он заменяется на символ «)» командой $q_1\# \rightarrow q_2)R$. Добавляемый в алфавит символ «)» используется как разделитель аргументов, а также как признак отсутствия оставшихся значащих символов «|» у одного из двух или обоих аргументов.

Выполняется проход по ленте вправо до последнего значащего символа второго аргумента y (если остался) командами $q_2| \rightarrow q_2|R$ и $q_2\# \rightarrow q_3\#L$. На данный момент граф алгоритма и таблица соответствия выглядят следующим образом:

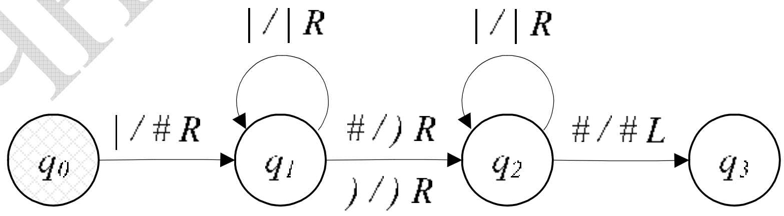

Рисунок 5 – Графическое представление первых команд алгоритма

Таблица 8 – Табличное представление первых команд алгоритма

Состояние	Символы внешнего алфавита		
	|	#	)
q_0	$q_1 \# R$		
q_1	$q_1 \| R$	$q_2) R$	$q_2) R$
q_2	$q_2 \| R$	$q_3 \# L$	

При достижении состояния q_3 организуется ветвление алгоритма. Если значащих символов второго аргумента не осталось, то обозревается ячейка ленты с символом «)», и ситуация соответствует условию $x > y$. Следовательно, всё содержимое ленты слева от текущей ячейки до символа # представляет результат без одного значащего символа.

Необходимо заменить на ленте символ «*)*» символом «|» с помощью команды $q_3) \rightarrow q_6|L$, затем выполнить позиционирование указателя на первый значащий символ результата командами $q_6| \rightarrow q_6|L$ и $q_6\# \rightarrow q_7\#R$. Далее машина останавливается в состоянии q_{k1} командой $q_7| \rightarrow q_{k1}|H$.

Содержимое ленты соответствует машине $T^{(1)}$, заключительная конфигурация $q_{k1}|^{(x-y)}$. Граф машины Тьюринга для этой ветви алгоритма и таблица соответствия показаны ниже:

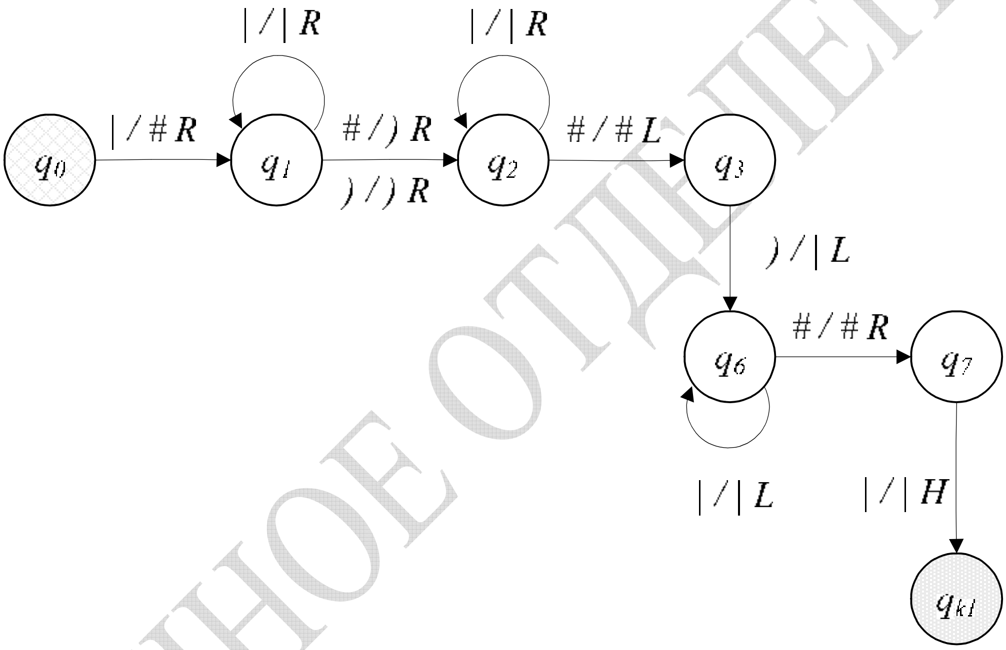

Рисунок 6 – Графическое представление алгоритма для условия $x > y$

Таблица 9 – Табличное представление алгоритма для условия $x > y$

Состояние	Символы внешнего алфавита		
	|	#	)
q_0	$q_1 \# R$		
q_1	$q_1 \| R$	$q_2) R$	$q_2) R$
q_2	$q_2 \| R$	$q_3 \# L$	
q_3			$q_6 \| L$
…			
q_6	$q_6\|L$	$q_7\#R$	
q_7	$q_{k1}\|H$		

Если значащие символы «|» у второго аргумента остались, крайний правый из них удаляется: $q_3|\rightarrow q_4\#L$. Осуществляется движение указателя влево до символа # командами $q_4|\rightarrow q_4|L$, $q_4)\rightarrow q_4)L$ и $q_4\#\rightarrow q_5\#R$:

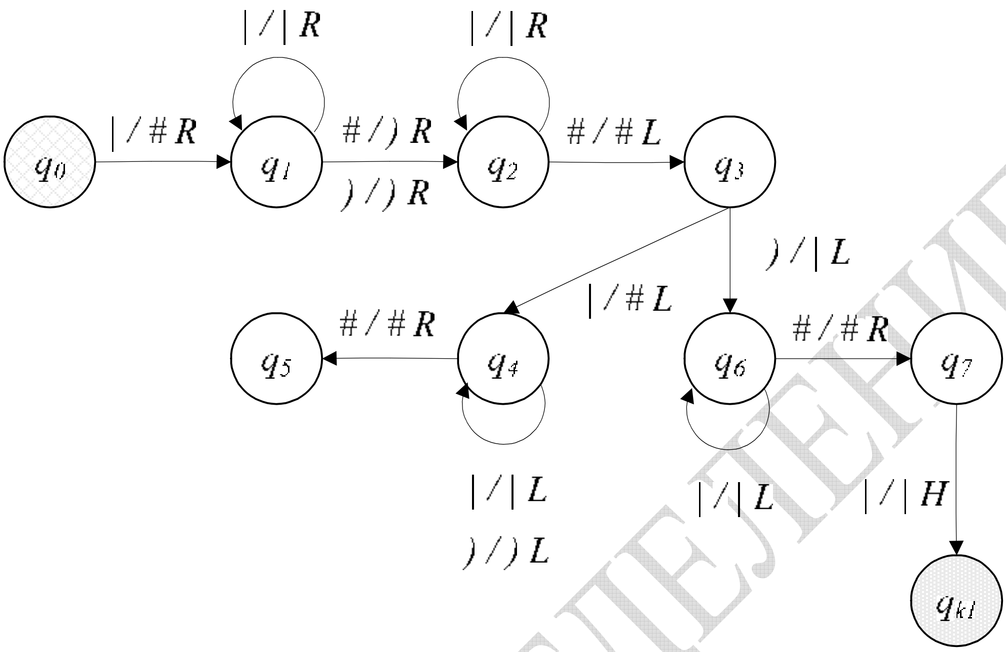

Рисунок 7 – Графическое представление разветвления алгоритма

Таблица 10 – Табличное представление разветвления алгоритма

Состояние	Символы внешнего алфавита		
	|	#	)
q_0	$q_1\#R$		
q_1	$q_1\|R$	$q_2)R$	$q_2)R$
q_2	$q_2\|R$	$q_3\#L$	
q_3	$q_4\#L$		$q_6\|L$
q_4	$q_4\|L$	$q_5\#R$	$q_4)L$
q_5			
q_6	$q_6\|L$	$q_7\#R$	
q_7	$q_{k1}\|H$		

Если остались значащие символы у первого аргумента, организуем цикл командой $q_5|\rightarrow q_1\#R$. В противном случае необходимо уточнить ситуацию: $x = y$ или $x < y$. Стирается с ленты вспомогательный символ «)», и указатель перемещается вправо командой $q_5)\rightarrow q_8\#R$.

Если значащих символов не осталось – это ситуация $x = y$, машина останавливается командой $q_8\#\rightarrow q_{k3}\#H$, заключительная конфигурация $q_{k3}\#$. Иначе, выполняется команда $q_8|\rightarrow q_{k2}|H$. Содержимое ленты соответствует машине $T^{(2)}$, заключительная конфигурация $q_{k2}|^{(y-x)}$.

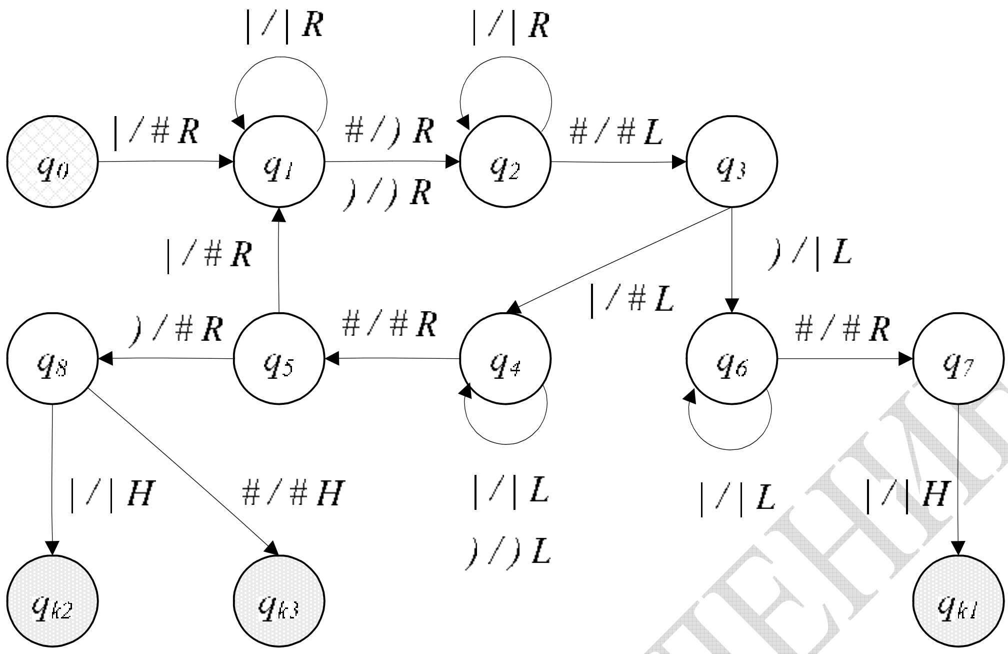

Рисунок 8 – Граф алгоритма сравнения длин двух слов

Таблица 11 – Табличное представление алгоритма сравнения длин двух слов

Состояние	Символы внешнего алфавита		
	$\vert$	#	)
q_0	$q_1 \# R$		
q_1	$q_1 \vert R$	$q_2) R$	$q_2) R$
q_2	$q_2 \vert R$	$q_3 \# L$	
q_3	$q_4 \# L$		$q_6 \vert L$
q_4	$q_4 \vert L$	$q_5 \# R$	$q_4) L$
q_5	$q_1 \# R$		$q_8 \# R$
q_6	$q_6 \vert L$	$q_7 \# R$	
q_7	$q_{k1} \vert H$		
q_8	$q_{k2} \vert H$	$q_{k3} \vert H$	

Проверка: пусть $x+1$ = ||, $y+1$ = ||. Тогда на информационной ленте машины Тьюринга будут проведены следующие преобразования:

#||#||# → #|#||# → #|#||# → #|)||# → ... → #|)||# → #|)|# → #|)|# → #|)|# →
q_0↑ q_1↑ q_1↑ q_2↑ q_2↑ q_3↑ q_4↑ q_4↑

→ #|)|# → #|)|# → #)|# → #)|# → #)|# → #)|# → #)# → #)# → #)# →### → #
q_4↑ q_5↑ q_1↑ q_2↑ q_2↑ q_3↑ q_4↑ q_4↑ q_5↑ q_8↑ q_{k3}↑H

Полученный результат q_{k3}# соответствует исходным данным $x = y$.

Проверка: пусть $x+1$ = ||, $y+1$ = ||||. Тогда на информационной ленте машины Тьюринга будут проведены следующие преобразования:

$$\underset{q_0\uparrow}{\#||\#|||\#} \to \underset{q_1\uparrow}{\#|\#|||\#} \to \underset{q_1\uparrow}{\#|\#|||\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#|)|||\#} \to \ldots \to \underset{q_2\uparrow}{\#|)|||\#} \to \underset{q_3\uparrow}{\#|)|||\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#|)|||\#} \to \ldots$$

$$\to \underset{q_4\uparrow}{\#|)|||\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#|)|||\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#|)|||\#} \to \underset{q_5\uparrow}{\#|)|||\#} \to \underset{q_1\uparrow}{\#)|||\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#)|||\#} \to \ldots \to \underset{q_2\uparrow}{\#)|||\#} \to \underset{q_3\uparrow}{\#)|||\#} \to$$

$$\to \underset{q_4\uparrow}{\#)||\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#)||\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#)||\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#)||\#} \to \underset{q_5\uparrow}{\#)||\#} \to \underset{q_8\uparrow}{\#||\#} \to \underset{q_{k2}\uparrow H}{\#||\#}$$

Полученный результат $q_{k2}|^{(y-x)}$ соответствует исходным данным $x < y$.

Проверка: пусть $x+1$ = ||||, $y+1$ = ||. Тогда на информационной ленте машины Тьюринга будут проведены следующие преобразования:

$$\underset{q_0\uparrow}{\#||||\#||\#} \to \underset{q_1\uparrow}{\#|||\#||\#} \to \ldots \to \underset{q_1\uparrow}{\#|||\#||\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#|||)||\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#|||)||\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#|||)||\#} \to \underset{q_3\uparrow}{\#|||)||\#} \to$$

$$\to \underset{q_4\uparrow}{\#|||)|\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#|||)|\#} \to \ldots \to \underset{q_4\uparrow}{\#|||)|\#} \to \underset{q_5\uparrow}{\#|||)|\#} \to \underset{q_1\uparrow}{\#||)|\#} \to \underset{q_1\uparrow}{\#||)|\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#||)|\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#||)|\#} \to$$

$$\to \underset{q_3\uparrow}{\#||)|\#} \to \underset{q_4\uparrow}{\#||)\#} \to \ldots \to \underset{q_4\uparrow}{\#||)\#} \to \underset{q_5\uparrow}{\#||)\#} \to \underset{q_1\uparrow}{\#|)\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#|)\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#|)\#} \to \underset{q_2\uparrow}{\#|)\#} \to \underset{q_3\uparrow}{\#|)\#} \to$$

$$\to \underset{q_6\uparrow}{\#||\#} \to \underset{q_6\uparrow}{\#||\#} \to \underset{q_7\uparrow}{\#||\#} \to \underset{q_{k1}\uparrow H}{\#||\#}$$

Полученный результат $q_{k1}|^{(x-y)}$ соответствует исходным данным $x > y$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адаменко, А.Н. Логическое программирование и Visual Prolog / А.Н. Адаменко, А.М. Кучуков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 990 с.
2. Битюцкий, В.П. Математическая логика. Исчисления высказываний и предикатов: учебное пособие / В.П. Битюцкий, Н.В. Папуловская. – Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. технич. ун-та, 2005. – 44 с.
3. Верещагин, Н.К. Математическая логика и теория алгоритмов. Вычислимые функции / Н.К. Верещагин, А. Шень. – М. : МЦМНО, 2008. – 192 с.
4. Галушкина, Ю.И. Конспект лекций по дискретной математике / Ю.И. Галушкина, А.Н. Марьямов. – М. : Айрис-пресс, 2007. – 176 с.
5. Гуц, А.К. Математическая логика и теория алгоритмов / А. К. Гуц. – М. : Либроком, 2009. – 120 с.
6. Ершов, Ю.Л. Математическая логика: учебное пособие / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – СПб.: Лань, 2004. – 336 с.
7. Зюзьков, В.М. Математическая логика и теория алгоритмов / В.М. Зюзьков, А.А. Шелупанов. – М. : Горячая линия-Телеком, 2007. – 176 с.
8. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие / В.И. Игошин. – 2-е изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с.
9. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие / В. И. Игошин. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 304 с.
10. Ковальски, Р. Логика в решении проблем: Пер. с англ. / Р. Ковальски. – М.: Наука, 1990. – 277 с.
11. Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М. : Наука, 1984. – 223 с.
12. Лихтарников, Л.М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения: учебное пособие / Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.
13. Чистякова, Т.Б. Разработка логических моделей представления знаний для объектов химической технологии в инструментальной среде ПРОЛОГ : учебное пособие / Т.Б. Чистякова, О.Г. Бойкова, И.В. Новожилова. – СПб. : Химиздат, 2007. – 240 с.
14. Шапорев, С.Д. Математическая логика. Курс лекций и практических занятий : учебное пособие / С.Д. Шапорев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 416 с.

Кафедра систем автоматизированного проектирования и управления

Методические указания к выполнению контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
направления подготовки «Информатика и вычислительная техника»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Пётр Иванович Комаров
Владимир Юрьевич Плонский
Андрей Васильевич Козлов

Отпечатано с оригинал макета. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$
Печ. л. 2,75. Тираж 100 экз.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный технологический институт
(технический университет)»

190013, г. Санкт-Петербург, Московский пр., д. 26