

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В СРЕДЕ MATHCAD

**Цель лабораторной работы** – ознакомиться с основными приемами решения уравнений и систем уравнений численными методами.

#### Определение комплексных чисел

Решения некоторых уравнений содержат комплексные числа. MathCAD воспринимает комплексные числа в форме  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  – обычные числа. Комплексные числа могут также возникать в результате вычислений, даже если все исходные значения вещественны. Например, если вычислить  $\sqrt{-1}$ , MathCAD возвращает  $i$ . При вводе комплексных чисел нельзя использовать  $i$  саму по себе для ввода комплексной единицы. Нужно всегда печатать  $1i$ , в противном случае MathCAD истолкует  $i$  как переменную. Когда курсор покидает выражение, содержащее  $1i$ , MathCAD скрывает избыточную единицу. Некоторые операции над комплексными числами показаны на рис. 13.

$$r := 5 \qquad \Theta := \frac{3\pi}{5}$$

Определим комплексные переменные

$$i := \sqrt{-1} \qquad z1 := \sqrt{-1} \qquad z2 := r \cdot e^{(i\Theta)} \qquad z1 = i \qquad z2 = -1.545 + 4.755i$$

Выполним некоторые действия

$$\frac{z2}{z1} = 4.755 + 1.545i \qquad \operatorname{Re}(z2) = -1.545 \qquad \operatorname{Im}(z2) = 4.755$$

$$z3 := z2^3 \qquad z3 = 101.127 - 73.473i$$

Рис. 13

#### Решение систем линейных уравнений

Для решения систем линейных уравнений в системе MathCAD введена функция  $\text{lsolve}(A,B)$ , которая возвращает вектор  $\mathbf{X}$  для системы линейных уравнений  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$  при заданной матрице коэффициентов  $\mathbf{A}$  и векторе свободных членов  $\mathbf{B}$ . Если уравнений  $n$ , размер-

ность вектора  $\mathbf{B}$  должна быть  $n$ , а размерность матрицы  $\mathbf{A} - n \times n$ . Пример решения системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 0,24x_2 - 0,06x_3 &= 9 \\ 0,03x_1 - 3,3x_2 - 0,12x_3 &= 5 \\ 0,77x_1 + 0,32x_2 - 0,22x_3 &= 2 \end{aligned}$$

рассмотрен на рис. 14.

3

$A := \begin{bmatrix} -2 & 0.24 & -0.06 \\ 0.03 & -3.3 & -0.12 \\ 0.77 & 0.32 & -0.22 \end{bmatrix}$	Задание коэффициентов систем
$B := \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	Задание вектора свободных член
$X := \text{lsolve}(A, B) \quad X: \begin{bmatrix} -3.873 \\ -0.69 \\ -23.652 \end{bmatrix}$	Решение системы

Рис. 14

Многие уравнения, например трансцендентные, и системы из них не имеют аналитических решений. Однако они могут решаться численными методами с заданной погрешностью, определяемой переменной **TOL** (в меню Сервис → Опции рабочей области → Переменные).

Для простейших уравнений вида  $F(x) = 0$  решение находится с помощью функции `root(Выражение, Имя_переменной)`.

Эта функция возвращает значение переменной, при котором выражение дает 0. Функция реализует вычисления итерационным методом, причем можно задать начальное значение переменной. Это особенно полезно, если возможно несколько решений. Тогда выбор решения определяется выбором начального значения переменной. Первое применение этой функции позволяет найти первый корень  $X1$ . Для поиска второго корня  $X2$  первый исключается делением  $F(x)$  на  $(x-X1)$ . Соответственно, для поиска третьего корня  $X3$   $F(x)$  делится еще и на  $(x-X2)$ . Пример использования функции приведен на рис. 15.

$a_3 :- 2$     $a_2 :- -5$     $a_1 :- 43$     $a_0 :- -92$    Коэффициенты

$F(x) :- a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$    Задание полинома

Вычисление действительного корня

$x :- 2$     $x_1 :- \text{root}(F(x), x)$     $x_1: 4.018$

Вычисление других корней

$i :- \sqrt{-1}$     $x :- 1 + 1 i$     $x_2 :- \text{root}\left(\frac{F(x)}{x - x_1}, x\right)$     $x_2: -0.759 + 2.35i$

$x_3 :- \text{root}\left[\frac{F(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}, x\right]$     $x_3: -0.759 - 2.35i$

Рис. 15

Для поиска корней обычного полинома  $p(x)$  степени  $n$  можно использовать функцию

$\text{polyroots}(V)$ .

Она, как показано на рис. 16, возвращает вектор корней многочлена (полинома) степени  $n$ , коэффициенты которого находятся в векторе  $V$ , имеющем длину, равную  $n + 1$ .

$V_0 :- -12$     $V_1 :- 8$     $V_2 :- -33$     $V_3 :- 25$     $V_4 :- 41$

$\text{polyroots}(V) :$  
$$\begin{bmatrix} -1.395 \\ 0.01 + 0.524i \\ 0.01 - 0.524i \\ 0.764 \end{bmatrix}$$

Рис. 16

Функцию  $\text{root}$  можно использовать и в составе функции пользователя, создаваемой специально для решения конкретной задачи. Например, как показано на рис. 17, с ее помощью можно организовать решение уравнения при различных значениях параметра  $a$ .

$$\overline{\text{GH}}(a, x) := \text{root}(e^{x-3} - a x^3, x)$$

$$\overline{a} := 1..5 \quad x_0 := 0 \quad x_a := \text{GH}(a, x_{a-1})$$

a	x <sub>a</sub>
1	0.426
2	0.326
3	0.281
4	0.252
5	0.233

Рис. 17

### Решение систем нелинейных уравнений

При решении систем нелинейных уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом – директивой `Given`, имеющей следующую структуру:

`Given`

Уравнения

Ограничительные условия

Выражения с функциями `Find` и `Minerr`

Рекомендуется дополнять блок проверкой решения системы.

В блоке может использоваться одна из следующих функций:

– `Find(v1,...,vn)` – возвращает значение одной или ряда переменных для точного решения;

– `Minerr(v1,...,vn)` – возвращает значение одной или ряда переменных для приближенного решения.

Между этими функциями существуют принципиальные различия. Первая функция используется тогда, когда решение реально существует (хотя и не является аналитическим). Вторая функция пытается найти максимальное приближение даже к несуществующему решению путем минимизации среднеквадратической погрешности решения.

Ограничительные условия вводятся следующими операторами:

Выражение	Назначение оператора
$e1 > e2$	e1 больше e2
$e1 < e2$	e1 меньше e2
$e1 \geq e2$	e1 больше или равно e2
$e1 \leq e2$	e1 меньше или равно e2
$e1 \neq e2$	e1 не равно e2
$e1 = e2$	e1 равно e2

В решающих блоках для определения условия равенства используется знак логического равенства  $=$ , извлекаемый из меню или вводимый комбинацией клавиш **Ctrl +**.

Функции Find и Minerr, как показано на рис. 18, могут использоваться для решения одного уравнения.

<pre>x := 1 Given x<sup>5</sup> := 3</pre>	<pre>x0 := Find(x)</pre>	<pre>x0 :=</pre>	<p>Использовать знак присваивания в блоке Given нельзя. Поэтому система отвечает на попытку решением сообщением об ошибке, выделяя задачу красным цветом</p>
<pre>x := 1 Given x<sup>5</sup> = 3</pre>	<pre>x0 := Find(x)</pre>	<pre>x0 = 1.246</pre>	<p>Задание уравнения в виде логического равенства позволяет найти решение</p>
<pre>x := 1 Given x<sup>5</sup> = 3</pre>	<pre>x0 := Minerr(x)</pre>	<pre>x0 = 1.246</pre>	<p>Решение с помощью функции minerr также позволяет найти решение</p>

Рис. 18

Для нахождения начальных приближений поиска вещественных корней весьма полезно построить графики кривых, входящих в систему уравнений. Полученные точки пересечения можно использовать для дальнейшего поиска корней. Пример такого решения приведен на рис. 19.

При использовании функции Minerr при решении систем нелинейных уравнений нужно проявлять осторожность и обязательно предусматривать проверку решений. Полезно как можно точнее указывать начальное приближение к решению.

Построим графики

$x := -7, -6.9.. 7$

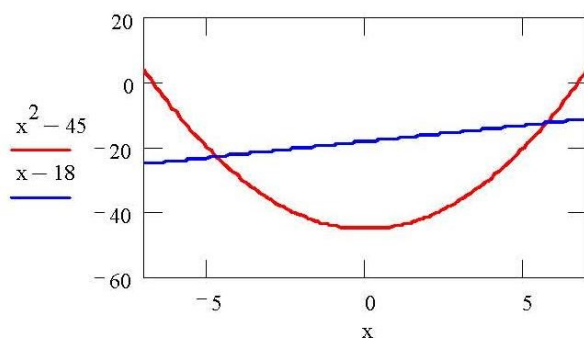


График показывает, что две кривые пересекаются в точках с приближительными координатами -5 и +5.

Ищем первое решение при

$x := -5$   $y := 0$

Given

$$y = x^2 - 45$$

$$y = x - 18$$

$$\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} := \text{Find}(x, y)$$

$$\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.72 \\ -22.72 \end{bmatrix}$$

Первое решение

$$(x0)^2 - 45 = -22.72$$

$$x0 - 18 = -22.72$$

Проверка решения вычислением  $y$

Найдем второе решение, введя ограничение  $x > 0$

$x := 5$   $y := 0$

Given

$$y = x^2 - 45$$

$$y = x - 18 \quad x > 0$$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix} := \text{Find}(x, y)$$

$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.72 \\ -12.28 \end{bmatrix}$$

Второе решение

$$(x1)^2 - 45 = -12.28$$

$$x1 - 18 = -12.28$$

Проверка решения вычислением  $y$

Рис. 19

## Порядок выполнения работы

1. Войти в систему MathCAD. Внимательно ознакомиться с описанием лабораторной работы. Выполнить некоторые рассмотренные примеры. После завершения изучения описания удалить с листа рассмотренные примеры.

2. Выполнить средствами пакета MathCAD последовательность заданий из указанного преподавателем варианта. Решения задач оформить в виде единого документа. Каждую задачу обязательно сопровождать комментариями.

2.1. Определить все корни уравнения.

1.  $x + \ln(x + 2) = 0;$

2.  $x^5 - x - 0,2 = 0;$

$$3. x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0;$$

$$4. x^3 - 0,2x^2 - 0.2x - 1,2 = 0;$$

$$5. \frac{2\sin^2 x}{3} - \frac{3\cos^2 x}{4} = 0;$$

$$6. 5x^3 + 12x^2 + 3x + 4 = 0;$$

$$7. x^2 - \sin 5x = 0;$$

$$8. x^4 - 4x^3 + x^2 - 5x + 4 = 0;$$

$$9. 1,8x^4 - \sin 10x = 0;$$

$$10. x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0.$$

2.2. Определить для заданного варианта все корни нелинейного уравнения с помощью функции *root*.

$$1. x^3 - x - 10 = 0;$$

$$6. \frac{2\sin x}{3} - \frac{3\cos x}{4} = 0;$$

$$2. 10\sin(x/2) = 0;$$

$$7. \cos(x) + \sin(2x) = 0;$$

$$3. x^4 - x^2 + 5 = 0;$$

$$8. 8x^3 - 2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$4. \sin 2x + \cos 2x = 0;$$

$$9. \sin x - \cos x = 0;$$

$$5. x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0;$$

$$10. \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{3} = 0.$$

2.3. Составить программу для решения системы линейных уравнений, используя функцию *lsolve*. Значения коэффициентов  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  и свободных членов  $D_i$  для заданного варианта взять из табл. 8. Выполнить проверку решения:

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1; \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2; \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 = D_3. \end{cases}$$

Таблица 8

Номер варианта	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$D_1$	$D_2$	$D_3$
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	-10	11	12
2	2	-3	4	5	6	7	8	-9	10	11	12	13
3	3	4	-5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	4	5	6	-7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	5	6	7	8	-9	10	11	12	13	14	15	16
6	6	7	8	9	10	-11	12	13	14	15	16	17
7	7	8	9	10	11	12	-13	14	15	16	17	18
8	8	9	10	11	12	13	14	-15	16	17	18	19
9	9	10	11	12	13	14	15	16	-17	18	19	20
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	-19	20	21

2.4. Составить программу решения системы линейных уравнений. Выполнить проверку решения.

$$1. \begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 6x_1 - x_2 - x_3 = 11,33 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 0,427x_1 - 3,210x_2 - 1,307x_3 = 2,425 \\ 4,270x_1 - 0,513x_2 + 1,102x_3 = -0,176 \\ 0,012x_1 + 1,273x_2 - 4,175x_3 = 1,423; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 10x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15 \\ x_1 - 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 3,1 \\ 0,1x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 0,15x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2,1x_4 = -4,7; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 4,13x_1 + 2,87x_2 - 1,94x_3 + 0,61x_4 = 0,32 \\ 1,27x_1 + 7,23x_2 - 0,15x_3 + 1,74x_4 = -4,16 \\ 0,19x_1 + 2,75x_2 + 3,14x_3 - 0,76x_4 = 2,33 \\ 2,87x_1 + 4,33x_2 - 2,41x_3 - 3,422x_4 = 2,79; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0,5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 5,4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7,5; \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 3,3 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 7,9x_1 + 5,6x_2 + 5,7x_3 - 7,2x_4 = 6,68 \\ 8,5x_1 - 4,8x_2 + 0,5x_3 + 3,5x_4 = 9,95 \\ 4,3x_1 + 4,2x_2 - 3,2x_3 + 9,3x_4 = 8,6 \\ 3,2x_1 - 1,4x_2 - 8,9x_3 + 8,3x_4 = 1. \end{cases}$$

2.5. Выполнить задание для своего варианта, используя соответствующий оператор решения, предварительно определив начальные приближения с помощью построения графика.

1. Найти все корни уравнения  $x^2 + \frac{25x^2}{5+2x} - \frac{74}{49} = 0$ .

2. Решить уравнение  $x^5 + 1 = 0$ .

3. Решить уравнение  $x^4 - 8x + 63 = 0$ .

4. Найти все четыре корня уравнения  $15x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x - 1 = 0$ .

5. Решить уравнение  $8x^4 + 8x^3 - x - 190 = 0$ .

6. Решить уравнение  $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = 4,5$ .

7. Решить уравнение  $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$ .

8. Найти все корни уравнения  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 1$ .

9. Решить уравнение  $(x-4)^3(x-5)^3 + 2(x-5)^3 + (x-4)^3 = 0$ .

10. Найти все корни уравнения  $x^3 + 2x - 5\sqrt{3} = 1$ .

2.6. Найти все решения для системы уравнений предварительно определив начальные приближения с помощью построения графиков:

1. 
$$\begin{cases} y = 2x^3 + 5 \\ y = 3x; \end{cases}$$

6. 
$$\begin{cases} y = 2,1x^3 - 3,3x + 6 \\ y = x + 5,6; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y = x^3 - 2x + 4 \\ y = 2x + 3,6; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y = x^4 - x^2 \\ y = 0,05x - 0,18; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = 2,8x^3 - 3x \\ y = 2,2x; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y = -3,51x^3 - 6,1x + 2 \\ y = 1,08x - 1,9; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y = 2x^3 + 3,8x - 6,2 \\ y = 1,2x - 5; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y = 2,8x^3 - 6,2x - 3 \\ y = 2x - 0,12; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y = 1,18x^3 - 2,8x \\ y = 2,1x - 0,12; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y = -2,7x^3 + 6,1x \\ y = -1,8x + 0,51. \end{cases}$$

2.7. Составить для заданного варианта программу для решения системы нелинейных уравнений, используя функцию *find* или *minner*.

$$1. \begin{cases} y = \cos x + 1 \\ y = \cos(x - 1); \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} y = x^4 + 12 \\ y = (2x + 1)^3; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y = 10,5x^2 + 1 \\ y = 5(x + 1)^3; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} y = x^4 - 15 \\ y = (2x + 1)^3; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y = \sqrt{\frac{x+11}{x}} \\ y = (2x + 1)^3; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} y = (x + 2)^2 \\ y = x^3 + 2x; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} y = \sin 2x \\ y = \cos(x + 1); \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} y = 5(x + 1)^3 \\ y = \sqrt{x^2 + 1} - x; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} y = \sqrt{x^3 - 1} \\ y = 5(x + 1)^2; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} y = \sqrt{x + 10} \\ y = (x + 1)^2 0. \end{cases}$$

3. Оформите протокол лабораторной работы средствами MathCAD.