Министерство образования и науки Российской Федерации

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна»

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания 1 и 2 для студентов заочной формы обучения

Направления:
29.03.01 - Технология изделий легкой промышленности.
29.03.05 - Конструирование изделий легкой промышленности.
29.03.02– Технология и проектирование текстильных изделий.
38.03.06 – Торговое дело.
38.03.07 - Товароведение.
20.03.01 - Экономика

Мещерякова Г. П.
Наумова Е. В.
Мажара С. Ф.

Санкт-Петербург

2015

УТВЕРЖДЕНО
на заседании методического семинара
кафедры математики
протокол № от

Рецензент

Н. В. Дробатун

Оригинал подготовлен составителями и издан в авторской редакции

Подписано в печать______ Формат 60х80 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,3_. Тираж _100_. Заказ ___
Электронный адрес: http://alt-rinpo.sutd.ru/ Отпечатано в типографии СПГУТД.
191028, Санкт - Петербург, ул. Моховая, 26

При выполнении контрольной работы на титульном листе указывается:

Фамилия, имя, отчество;

номер студенческого билета;

название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта.

Номер варианта соответствует последней цифре номера студенческого билета. Например, номер кончается на 5, то для четного года поступления делаются 1.15, 2.15, 3.15, 4.15 задания, а при нечетном годе – 1.5, 2.5, 3.5, 4.5.

Перечень контрольных заданий по методичке кафедры математики
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 1 (методичка к/р 1,2)
Нечетный год поступления N 1(1 -10), 2(1 – 10), 3(1 – 10), 4(1 – 10).
Четный год поступления N 1(11 -20), 2(11 – 20), 3(11 – 20), 4(11 – 20).
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N 2 (методичка к/р 1,2)
Нечетный год поступления N 1 (1 -10), 2 (1 - 10), 3 (1 - 10), 4 (1 - 10), 5(1-10).
Четный год поступления N 1 (11 -20), 2 (11 - 20), 3 (11 - 20), 4 (11 - 20), 5(11 - 20).

Контрольная работа № 1

1. Определители второго и третьего порядков.

Для матрицы А размером 2×2 определитель находится по формуле: произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Для матрицы А размером 3×3 определитель находится по формуле

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22}\, a_{31} -$$

$$- a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11} a_{23}\, a_{32}.$$

2. Решение системы трех линейных уравнений методами Крамера и Гаусса.

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_b \end{cases} \qquad (1)$$

Вычислим определитель системы Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Как известно, если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет решение, и при том единственное. Если $\Delta = 0$, то система (1) либо не имеет решений, либо имеет бесчисленное множество решений.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\Delta \neq 0$.

1. Решение с помощью формул Крамера.

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то, согласно формулам Крамера, решение системы (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ x_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta}, \\ &\dots \\ x_n &= \frac{\Delta_n}{\Delta}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Определитель Δ_i (i=1, 2,…, n) отличается от определителя системы Δ тем, что $i^{ый}$ столбец Δ заменен столбцом из свободных членов, т.е. столбец $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ заменен на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Пример. Дана расширенная матрица системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & -9 \\ 4 & -3 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 14 \end{array}\right)$. Решить систему методом Крамера.

Решение. Запишем систему в стандартной форме

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -9 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}.$$

Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 4 & -3 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-18-28) - 5(24-7) - 4(16+3) = -138 - 85 - 76 = -299.$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 5 & -4 \\ 3 & -3 & 7 \\ 14 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -9 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 14 & 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -9(-18-28) - 5(18-98) - 4(12+42) = 414 + 400 - 216 = 598.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -9 & -4 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 14 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 14 & 6 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(18-98) + 9(24-7) - 4(56-3) = -240 + 153 - 212 = -229.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -9 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 14 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(18-98) + 9(24-7) - 4(56-3) = -162 - 265 - 171 = -598.$$

Решение системы: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -2,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1,\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$

Для того чтобы убедиться в правильности решения, подставим эти значения x_1, x_2, x_3 в исходную систему

$$\begin{cases} 3(-2) + 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -9 \\ 4(-2) - 3 \cdot 1 + 7 \cdot 2 = 3 \\ -2 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 14 \end{cases}.$$

2. **Решение методом Гаусса.** Пусть есть система (1) с определителем $\Delta \neq 0$. Нашей системе можно сопоставить расширенную матрицу, в которой содержится вся информация о системе

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right). \qquad (5)$$

Метод Гаусса состоит в том, что система (1) с помощью ряда элементарных преобразований сводится к новой системе, расширенная матрица которой имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n' \end{array}\right). \qquad (6)$$

Т.е. в результате преобразований все коэффициенты матрицы a_{ik} становятся равными нулю, кроме диагональных элементов, которые становятся равными единице: $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $a_{ik} = 1$ при $i = k$. Столбец свободных членов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ превращается в новый столбец $\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \dots \\ b_n' \end{pmatrix}$.

Если мы привели нашу матрицу к диагональному виду, то решение системы записывается очень просто:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1', \\ x_2 &= b_2', \\ &\dots \\ x_n &= b_n'. \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы сводится к совершению элементарных преобразований, в результате которых расширенная матрица (5) превращается в расширенную матрицу (6).

К элементарным преобразованиям системы (1) относятся следующие:

1) перемена местами уравнений (т.е. перемена местами строк расширенной матрицы);

2) умножение или деление любого уравнения системы (1) на число, отличное от 0 (т.е. умножение или деление строки расширенной матрицы на число, отличное от 0);

3) изменение любого уравнения системы (1) путем прибавления к нему другого уравнения системы, умноженного на число, отличное от 0 (т.е. изменение строки расширенной матрицы путем прибавления к ней другой строки, умноженной на число, отличное от 0).

Пример. Найти решение системы методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 21 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \end{cases}.$$

Решение. Определитель системы $\Delta = -145 \neq 0$. Таким образом, система имеет единственное решение. Найдем его методом Гаусса. Начальная расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 21 \\ 3 & 8 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Далее мы будем приводить нашу матрицу к диагональному виду и выписывать ее вид после каждого шага преобразований.

1-й шаг. Разделим 1-ю строку матрицы на 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 21 \\ 3 & 8 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

2-й шаг. 1-ю строку оставляем без изменения. Вместо 2-й строки записываем следующую ее комбинацию с 1-й: 1-ю строку умножаем на (-5), складываем ее со 2-й строкой, тогда новые числа, стоящие во 2-й строке расширенной матрицы, будут следующие:

$$a_{21} = 1(-5) + 5 = 0,\ a_{22} = (-2)(-5) + 1 = 11,$$

$$a_{23} = \left(-\frac{3}{2}\right)(-5) + 2 = \frac{19}{2},\ b_2 = 1(-5) + 21 = 16.$$

Вместо 3-й строки записываем следующую ее комбинацию с 1-й: 1-ю строку умножаем на (-3) и складываем ее с 3-й строкой, тогда

$$a_{31} = 1(-3) + 3 = 0,\ a_{32} = (-2)(-3) + 8 = 14,$$

$$a_{33} = \left(-\frac{3}{2}\right)(-3) + 1 = \frac{11}{2},\ b_3 = 1(-3) - 3 = -6.$$

Расширенная матрица примет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 11 & \frac{19}{2} & 16 \\ 0 & 14 & \frac{11}{2} & -6 \end{array}\right).$$

В результате первых 2-х шагов 1-й столбец $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ преобразовался в $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3-й шаг. Делим вторую строку на 11.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{19}{22} & \frac{16}{11} \\ 0 & 14 & \frac{11}{2} & -6 \end{array}\right).$$

4-й шаг. 2-ю строку оставляем без изменения. Вместо 1-й строки записываем следующую ее комбинацию со 2-й: 2-ю строку умножаем на 2 и складываем ее с 1-й строкой, тогда

$$a_{11} = 0 \cdot 2 + 1 = 1,\ a_{12} = 1 \cdot 2 - 2 = 0,\ a_{13} = \frac{19}{11} - \frac{3}{2} = \frac{5}{22},\ b_1 = \frac{32}{11} + 1 = \frac{43}{11}.$$

Вместо 3-й строки записываем ее комбинацию со 2-й: 2-ю строку умножаем на (-14) и складываем ее с 3-й строкой, тогда

$$a_{31} = 0(-14) + 0 = 0,\ a_{32} = 1(-14) + 14 = 0,$$
$$a_{33} = \frac{19}{22}(-14) + \frac{11}{2} = -\frac{145}{22},\ b_3 = \frac{16}{11}(-14) - 6 = -\frac{290}{11}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & 1 & \frac{19}{22} & \frac{16}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{145}{22} & -\frac{290}{11} \end{array}\right).$$

В результате 3-го и 4-го шагов 1-й столбец матрицы не изменился, а 2-й превратился в $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5-й шаг. Делим 3-ю строку на $\left(-\frac{145}{22}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{43}{11} \\ 0 & 1 & \frac{19}{22} & \frac{16}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

6-й шаг. 3-ю строку оставляем без изменения. Вместо 1-й строки записываем ее комбинацию с 3-й: 3-ю строку умножаем на $\left(-\frac{5}{22}\right)$ и складываем ее с 1-й строкой, тогда

$$a_{11} = 0\left(-\frac{5}{22}\right) + 1 = 1,\ a_{12} = 0\left(-\frac{5}{22}\right) + 0 = 0,$$
$$a_{13} = 1\left(-\frac{5}{22}\right) + \frac{5}{22} = 0,\ b_1 = 4\left(-\frac{5}{22}\right) + \frac{43}{11} = 3.$$

Вместо 2-й строки записываем ее комбинацию с 3-й: 3-ю строку умножаем на $\left(-\dfrac{19}{22}\right)$ и складываем ее со 2-й строкой, тогда

$$a_{21}=0\left(-\frac{19}{22}\right)+0=0,\ a_{22}=0\left(-\frac{19}{22}\right)+1=1, a_{23}=1\left(-\frac{19}{22}\right)+\frac{19}{22}=0,\ b_2=4\left(-\frac{19}{22}\right)+\frac{16}{11}=-2.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

В результате 5-го и 6-го шагов 3-й столбец принял вид $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, решение системы следующее: $x_1=3,\ x_2=-2,\ x_3=4$. Проверка

$$\begin{cases} 2\cdot 3-4(-2)-3\cdot 4=2 \\ 5\cdot 3-2+2\cdot 4=21 \\ 3\cdot 3+8(-2)+4=-3 \end{cases}$$

Таким образом, смысл метода Гаусса состоит в том, что сначала 1-й столбец исходной матрицы приводим к виду $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, затем 2-й - к виду $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и, наконец, 3-й – к виду $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. При этом происходит преобразование столбца свободных членов.

Решение методом исключений. Метод исключений является модификацией метода Гаусса и удобен для небольших систем.

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2-3x_3=2 \\ 5x_1+x_2+2x_3=21 \\ 3x_1+8x_2+x_3=-3 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на коэффициент при x_1 из второго уравнения, т.е. на 5, а второе на коэффициент при x_1 из второго уравнения, т.е. на 2 и вычтем друг из друга. Потом умножим первое на коэффициент при x_1 из второго уравнения, т.е. на 3, а третье на 5 и снова вычтем

$$-\begin{array}{r} 10x_1-20x_2-15x_3=10 \\ 10x_1+\ 2x_2+\ 4x_3=42 \\ \hline -22x_2-19x_3=-32 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 6x_1-12x_2-9x_3=6 \\ 6x_1+16x_2+2x_3=-6 \\ \hline -28x_2-11x_3=12 \end{array}$$

Поменяем в первом уравнении знаки и запишем подсистему

$$\begin{cases} 22x_2 + 19x_3 = 32 \\ -28x_2 - 11x_3 = 12 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 28, второе на 22 и сложим. Слагаемые с x_2 сократятся и мы получим уравнение для x_3

$$(19 \cdot 28 - 11 \cdot 22)x_3 = 32 \cdot 28 + 12 \cdot 22$$

$x_3 = 4$, подставляя x_3 в первое уравнение подсистемы получим x_2

$22x_2 + 19 \cdot 4 = 32 \Rightarrow 22x_2 = -44$, $x_2 = -2$,

Подставляя x_2 и x_3 в первое уравнение системы найдем x_1

$2x_1 + 8 - 12 = 2 \Rightarrow x_1 = 3$

Объем вычислений при этом методе существенно меньше.

3. Системы координат

Пример. Найти расстояние между точками $M_1(1, -2, -3)$ и $M_2(-3, 1, 1)$. Определить координаты точки C, делящей отрезок M_1M_2 в отношении 2:3.

Решение.

1. Используя формулу

$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$,

получим $M_1M_2 = \sqrt{41}$.

2. Координаты точки C определим по формуле вида

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda},$$

где $\lambda = \frac{2}{3}$; $x_c = -\frac{3}{5}$; $y_c = \frac{-2 + \frac{2}{3} \cdot 1}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{4}{5}$; $z_c = \frac{-3 + \frac{2}{3} \cdot 1}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{7}{5}$.

4. Векторная алгебра

Пример 1. Даны точки $M_1(1, -2, -3)$, $M_2(-3, 1, 1)$. Найти длину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\}$. Следовательно $\vec{a}$ = {-3-1, 1+2, 1+3} ={-4, 3, 4}. Длина вектора находится по формуле $|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2 + (4)^4} = \sqrt{41}$

Пример 2. Найти угол φ между векторами $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{в} = \overrightarrow{M_1M_3}$, если $M_1(1, -2, -3)$, $M_2(-3, 1, 1)$, $M_3(3, 2, 2)$.

Решение. Для нахождения $cos\varphi$ используем формулу

$$cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

где $\vec{a} \bullet \vec{b}$ - скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $cos\varphi$:

$\overrightarrow{a}$ = (-3-1, 1+2, 1+3) =(-4, 3, 4), $\overrightarrow{b}$ = (3-1, 2+2, 2+3) = (2, 4, 5),

$$\cos\varphi = \frac{(-4)\cdot 2 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 4^2}\cdot\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2}} = 0{,}039,$$

$\varphi = 87^0 45'54''$.

Пример 3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1, -2, -3)$, $A_2(-3, 1, 1)$, $A_3(4, 3, -1)$, $A_4(3, 2, 2)$. Найти площадь грани $A_1 A_2 A_3$ и объем пирамиды.

Решение. Площадь треугольника $A_1A_2A_3$ найдем, используя геометрический смысл векторного произведения векторов

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|,$$

где $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$ - векторное произведение векторов.

Вначале находим $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -14\vec{i} + 20\vec{j} - 29\vec{k} = \{-14; 20; -29\},$$

а затем

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2 + 20^2 + (-29)^2} = \frac{\sqrt{1437}}{2} \text{ ед}^2.$$

Объем пирамиды найдем, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов

$$\overrightarrow{A_1A_2}\bullet\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -93,$$

следовательно, $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}\left|-93\right| = 15{,}5$ ед^3.

5. Уравнения линий на плоскости

Прямая на плоскости

Прямую на плоскости можно задать многими способами. При решении задач на прямую часто используются следующие типовые уравнения и соотношения:

1. Уравнения прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент ($k = tg\alpha$, α - угол наклона прямой к оси Ox), b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом k

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Заметим, что в случае $y_2 - y_1 = 0$, уравнение принимает вид $y - y_1 = 0$. Аналогично, если $x_2 - x_1 = 0$, уравнение прямой записывается $x - x_1 = 0$.

4. Расстояние d от точки M_0 до прямой $Ax+By+C=0$ определяется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

5. Угол φ, отсчитываемый против часовой стрелки от прямой $y=k_1x+b_1$ до прямой $y=k_2x+b_2$, определяется по формуле

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Из формулы следует:

1) прямые l_1 и l_2 параллельны, если $k_1=k_2$;

2) прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, если $k_2=-\frac{1}{k_1}$.

6. Уравнения биссектрис углов между прямыми $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеют вид

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

7. Точка пересечения медиан делит любую из них на части в отношении 2:1 (считая от вершины).

Пример. Даны вершины треугольника A(-3,-3), B(2,7) и C(5,1). Требуется написать уравнения сторон треугольника, определить угол А треугольника, найти уравнение медианы AK и высоты AM.

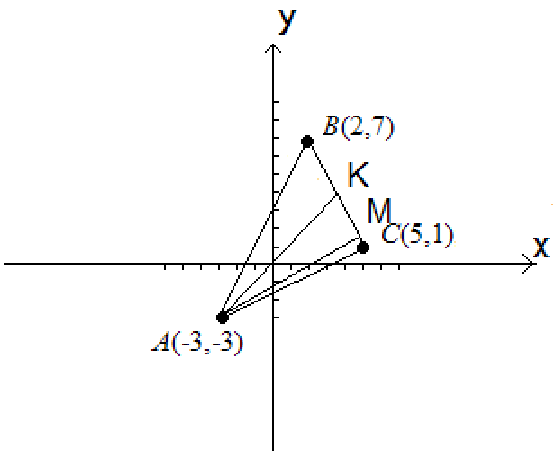


Рис. 1.

Решение. Чтобы написать уравнение стороны АВ треугольника, используем вид уравнения прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-x_a}{x_b-x_a}=\frac{y-y_a}{y_b-y_a}$$

AB: $\frac{x+3}{2+3}=\frac{y+3}{7+3}$ или $y = 2x + 3$.

Аналогично

AC: $\frac{x+3}{5+3}=\frac{y+3}{1+3}$ или $y = 0{,}5x - 1{,}5$

CB: $\frac{x-5}{2-5}=\frac{y-1}{7-1}$ или $y = -2x + 11.$

Тогда тангенс угла А определяется по формуле:

$tg\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$, $k_1=2$, $k_2 = 0{,}5$. Следовательно $tgA=\frac{2-0.5}{1+2\cdot 0.5}=0.75$

Ищем уравнение медианы АК. Для этого определяем координаты точки *К*, учитывая, что отрезок BC в точке *К* делится пополам и, следовательно,

$x_K=\frac{x_B+x_c}{2}=\frac{2+5}{2}=3.5;\ y_K=\frac{y_B+y_c}{2}=\frac{7+1}{2}=4$

АК $\frac{x+3}{3.5+3}=\frac{y+3}{4+3}$ или $y=\frac{14}{13}x+\frac{3}{13}$

Ищем уравнение высоты *АМ*, опущенного из вершины *А* на сторону BC:

$y+3=k(x+3)$, где $k=-\frac{1}{k_{BC}}=0.5$.

Следовательно, уравнение *АМ*: $y+3=0.5(x+3)$ или $y - 0{,}5x + 1{,}5 = 0$

Линии второго порядка

Ниже приведены канонические уравнения кривых второго порядка с центром симметрии (в случае параболы – вершиной) в начале координат (случай А) и в точке $C(x_0, y_0)$ (случай В).

	A	B
Окружность	$x^2+y^2=R^2$	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
Парабола	$x^2=2py$ $y^2=2px$	$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$ $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$

Пример 1. Пусть задано уравнение $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Является ли это уравнение уравнением окружности и, если да, то каков ее радиус и координаты центра?

Приведем данное уравнение к виду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Выделим полный квадрат относительно x, прибавляя и вычитая число 4

$x^2 + y^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) + y^2 - 4 = 0$ или $(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$. $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $R = 2$.

Пример 2. Дано уравнение кривой второго порядка $x^2+2y-4=0$. Определить тип кривой, найти ее параметры и сделать чертеж.

Решение. Сравнивая с табличными данными находим, что это парабола, вершига которой находится в точке $C(x_0, y_0)$. приводим уравнение параболы к виду $x^2=2(y-2)$.

$x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $p = 1$. Чертеж

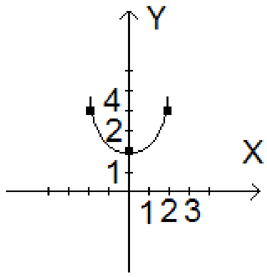


Рис. 2.

6. Плоскости и прямые в пространстве

Пример. Даны координаты вершин пирамиды

$A_1(1,-2,-3)$, $A_2(-3,1,1)$, $A_3(4,3,-1)$, $A_4(3,2,2)$.

Составить: 1. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

2. Уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. 1. Уравнение плоскости запишем, используя каноническое уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} (x-x_1) & (y-y_1) & (z-z_1) \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ (x_3-x_1) & (y_3-y_1) & (z_3-z_1) \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Подставив координаты точек A_1, A_2, A_3, получим

$$\begin{vmatrix} (x-1) & (y+2) & (z+3) \\ (-3-1) & (1+2) & (1+3) \\ (4-1) & (3+2) & (-1+3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1) & (y+2) & (z+3) \\ -4 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Разложив последний определитель по элементам первой строки, будем иметь

$$(x-1)(-14)-(y+2)(-20)+(z+3)(-29)=0$$

или

$$14x-20y+29z+33=0.$$

2. Уравнение высоты пирамиды представим в виде канонической системы уравнений прямой, проходящей через заданную точку A_4 с известным направляющим вектором $\vec{S}$. За направляющий вектор $\vec{S}$ возьмем нормальный вектор $\vec{N}$ плоскости $A_1A_2A_3$, т.е. $\vec{S}=(14,-20,29)$.

Уравнение высоты: $\dfrac{x-3}{14}=\dfrac{y-2}{-20}=\dfrac{z-2}{29}$.

Примечание. Если бы в уравнении прямой один из знаменателей оказался нулевым, например

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{-20}=\frac{z-2}{29},$$

то уравнение прямой следовало бы записать в виде пересекающейся системы плоскостей

$$\begin{cases} x-3=0, \\ \dfrac{y-2}{-20}=\dfrac{z-2}{29}. \end{cases}$$

Наконец, если бы в уравнении прямой два знаменателя обратились в ноль, например,

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{29},$$

это означало бы, что прямая является пересечением плоскостей $x-3=0$ и $y-2=0$ и ее уравнением будет система

$$\begin{cases} x-3=0, \\ y-2=0. \end{cases}$$

Контрольная работа 1. Задания.

1. Решить систему методами Крамера и последовательных исключений

1.1. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -4 & 13 \\ 2 & -3 & 5 & -10 \\ 6 & -2 & -3 & 9 \end{array}\right).$

1.2 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & 26 \\ 4 & 6 & 3 & -8 \end{array}\right).$

1.3. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right).$

1.4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & -23 \end{array}\right).$

1.5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & -11 \end{array}\right).$

1.6. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right).$

1.7. $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & -9 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \end{array}\right).$

1.8. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & -8 & -7 \\ 3 & -1 & -10 & -24 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right).$

1.11. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -15 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right).$

1.12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & -5 & 3 \\ 1 & 11 & 1 & 1 \end{array}\right).$

1.13. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right).$

1.14. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 3 & 10 \\ 5 & 2 & -2 & -13 \\ 1 & 1 & -3 & -15 \end{array}\right).$

1.15. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 9 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 & 12 \end{array}\right).$

1.16. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 9 & 1 \\ -1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & -3 & -5 & -19 \end{array}\right).$

1.17. $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & -11 & -13 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \\ 1 & -6 & 9 & 12 \end{array}\right).$

1.18. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 9 \\ 5 & -1 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right).$

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -1 & 24 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & -7 & 0 \end{array}\right)$.

1.19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & -10 & -6 \\ 5 & -1 & 8 & 16 \end{array}\right)$.

1.10. $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right)$.

1.20. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 21 \\ 9 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right)$.

2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти:
   1) длину ребра A_1A_2;
   2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
   3) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
   4) уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
   5) площадь грани $A_1A_2A_3$;
   6) объем пирамиды.

2.1.	$A_1(5, 1, 0)$,	$A_2(1, 5, 4)$,	$A_3(2, -1, 0)$,	$A_4(2, 4, 7)$.
2.2.	$A_1(3, -1, 3)$,	$A_2(4, 5, -2)$,	$A_3(2, 7, 1)$,	$A_4(2, 3, 5)$.
2.3.	$A_1(0, 2, 4)$,	$A_2(4, -1, 2)$,	$A_3(5, 1, -3)$,	$A_4(3, 2, 6)$.
2.4.	$A_1(6, 2, 0)$,	$A_2(-3, 3, 4)$,	$A_3(4, 1, 2)$,	$A_4(2, 2, 5)$.
2.5.	$A_1(5, 0, 2)$,	$A_2(0, 4, 1)$,	$A_3(9, 1, -2)$,	$A_4(4, 2, 6)$.
2.6.	$A_1(0, 1, 4)$,	$A_2(2, 0, -3)$,	$A_3(5, 1, 6)$,	$A_4(5, 2, 8)$.
2.7.	$A_1(3, 2, 5)$,	$A_2(4, 5, 2)$,	$A_3(6, -3, 0)$,	$A_4(5, -1, 3)$.
2.8.	$A_1(0, 3, 1)$,	$A_2(3, -2, 3)$,	$A_3(5, 0, -1)$,	$A_4(6, 5, 4)$.
2.9.	$A_1(3, 3, 2)$,	$A_2(4, 1, 0)$,	$A_3(2, 0, 1)$,	$A_4(4, 3, 6)$.
2.10.	$A_1(1, 6, 0)$,	$A_2(3, 0, -4)$,	$A_3(5, 3, 2)$,	$A_4(2, 3, 2)$.
2.11.	$A_1(2, 0, 2)$,	$A_2(5, 6, 5)$,	$A_3(3, 3, 0)$,	$A_4(4, 2, 4)$.
2.12.	$A_1(3, 2, 0)$,	$A_2(1, 1, 3)$,	$A_3(0, 3, 2)$,	$A_4(2, 2, 6)$.
2.13.	$A_1(6, -1, 1)$,	$A_2(2, 3, 4)$,	$A_3(3, -3, 0)$,	$A_4(4, 4, 7)$.
2.14.	$A_1(3, 0, 4)$,	$A_2(4, 6, -1)$,	$A_3(2, 8, 2)$,	$A_4(0, 4, 8)$.
2.15.	$A_1(1, -1, 1)$,	$A_2(6, 1, 1)$,	$A_3(3, 4, 1)$,	$A_4(2, 1, 4)$.
2.16.	$A_1(2, 0, 1)$,	$A_2(1, 3, 4)$,	$A_3(3, 4, 3)$,	$A_4(1, 2, 6)$.
2.17.	$A_1(3, 1, 1)$,	$A_2(1, 4, 1)$,	$A_3(1, 1, 7)$,	$A_4(3, 4, 9)$.
2.18.	$A_1(3, 4, 5)$,	$A_2(4, 7, 2)$,	$A_3(6, 1, 0)$,	$A_4(5, 1, 3)$.
2.19.	$A_1(3, 1, 0)$,	$A_2(1, 4, 3)$,	$A_3(4, 5, 2)$,	$A_4(2, 3, 6)$.
2.20.	$A_1(2, 7, 5)$,	$A_2(4, 1, 2)$,	$A_3(5, 3, 0)$,	$A_4(3, 4, 3)$.

В задачах 3.1 – 3.20 по аналитической геометрии сделать **чертеж.**

3. Даны координаты вершин треугольника А, В, С. Найти уравнения сторон АВ и

АС, угол между ними, уравнения медианы СК и высоты АМ. Сделать чертеж

№	A	*B*	*C*	№	A	B	C
3.1.	(-5, 3)	(1,6)	(5, 1)	3.11	(1, 5)	(4, 0)	(-5,-4)
3.2.	(-7, 1)	(5, 0)	(2, 5)	3.12	(4, 2)	(2, 0)	(-1, 2)
3.3.	(5, 1)	(0, 4)	(-2, 2)	3.13	(0, -2)	(-2, 1)	(3, 4)
3.4.	(5, 2)	(-1, 0)	(3, 4)	3.14	(-1, 2)	(1, 1)	(-5, 3)
3.5.	(2, -2)	(3, -4)	(2, -1)	3.15	(4, 2)	(-3, 3)	(2, -1)
3.6.	(1, 0)	(2, 5)	(-1, 1)	3.16	(4, 4)	(5, 1)	(-1, 0)
3.7.	(0, -3)	(1,4)	(-2, -1)	3.17	(-2, 4)	(5, 1)	(0, -3)
3.8.	(-2, 1)	(3, 1)	(0, -2)	3.18	(2,5)	(-1, 1)	(0,3)
3.9.	(-3, 3)	(7, 5)	(4, 1)	3.19	(1, 5)	(-5, 3)	(1,3)
3.10	(2, 0)	(5, -2)	(8, 2)	3.20	(1,4)	(-2,1)	(0, -3)

4. Указать тип кривой второго порядка, найти ее параметры и сделать чертеж.

4.1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.	4.11. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$
4.2. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$	4.12. $x^2=6y-2$
4.3. $y^2=8x+2$	4.13. $x^2+y^2-4x-6y=0$
4.4. $x^2+y^2-2y=0$	4.14. $y^2=8x-4$
4.5. $x^2=3-6y$	4.15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$
4.6. $y^2=2-8x$	4.16. $9x^2+4y^2=36$
4.7. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$	4.17. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
4.8. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$	4.18. $9x^2-25y^2=225$
4.9. $x^2+y^2+2x-4y=0$	4.19. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$
4.10. $x^2+4y-2=0$	4.20. $x^2+y^2+2y=0$

Контрольная работа №2

Введение в математический анализ. Функция и ее свойства.

Пример 1. Найти область определения функции *D(f)*

$$y=\sqrt{-3x}+\frac{1}{\sqrt{3+x}}.$$

Решение. Если числовая функция задана аналитически (в виде формулы $y=f(x)$) и область ее определения не указана, то считают, что эта область есть множество всех действительных значений аргумента, при которых выражение $f(x)$- действительное число. Для существования заданной функции $\sqrt{-3x}$ необходимо, чтобы имело место неравенство $x\le 0$. Для существования функции $1/\sqrt{3+x}$ должно иметь место неравенство $3+x>0$, откуда $x>-3$. Область определения исходной функции $-3<x\le 0$ или $D(f)=]-3;0]$.

Пример 2. Найти область определения функций:

$$y_1=x^3+1;\qquad y_2=\frac{x+1}{x-3};\qquad y_3=\sqrt{x-3};$$

$$y_4=\sqrt{9-x^2};\quad y_5=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}};\quad y_6=\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{x-3}.$$

Решение. Для приведенных выше функций области определения удовлетворяют условиям: 1. $-\infty<x<\infty$; 2. $x\ne 3$; 3. $x\ge 3$; 4. $-3\le x\le 3$; 5. $-3<x<3$; 6. $-3\le x<3$.

Следовательно,

$$D(f_1)=]-\infty;\infty[;\ D(f_2)=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[;$$

$$D(f_3)=[3;\infty[;\ D(f_4)=[-3;3];$$

$$D(f_5)=]-3;3[;\ D(f_6)=[-3;3[.$$

Пример 3. Найти область определения функции

$$y=\log_2\log_3\log_4 x.$$

Решение. Для существования функции $\log_4 x$ необходимо, чтобы $x>0$. Для существования функции $\log_3(\log_4 x)$ надо, чтобы $\log_4 x>0$, откуда $x>1$. Для существования функции $\log_2(\log_3\log_4 x)$ необходимо, чтобы $\log_3\log_4 x>0$, откуда $\log_4 x>0$ и $x>1$.

Таким образом, получены условия

$$\begin{cases} x>0 \\ x>1 \\ x>4 \end{cases} \Rightarrow\quad D(f)=]4;\infty[.$$

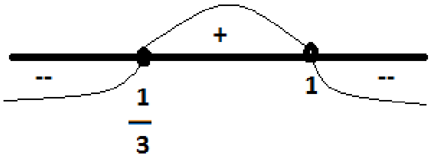
Пример 4. Найти область определения функции

$$y=\arccos\frac{2x}{1-x}.$$

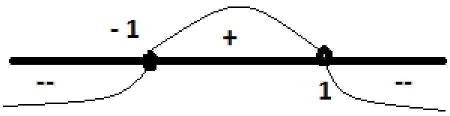
Решение. Так как $D(\arccos)=[-1;1]$, то $-1\le\frac{2x}{1-x}\le 1$. Решив неравенство, найдем область определения функции

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1-x} \le 1 \\ \dfrac{2x}{1-x} \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{1-x} - 1 \le 0 \\ \dfrac{2x}{1-x} + 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-1}{1-x} \le 0, \\ \dfrac{x+1}{1-x} \ge 0. \end{cases}$$

Применим метод интервалов (рис. 3)



1. $x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left]1; +\infty\right[$



2. $x \in [-1; 1[$

Рис. 3.

Система неравенств имеет решение $-1 \le x \le \frac{1}{3}$.

Следовательно, $D(f) = \left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

Пример 5. Определить, являются ли функции

1. $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$; 2. $y = \sqrt[5]{(x+5)^2} + \sqrt[5]{(x-5)^2}$;

3. $y = \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$; 4. $y = tgx + \cos x$

четными или нечетными.

Решение. Для определения свойств четности или нечетности функции следует проверить выполнение следующих положений:

1. Является ли область определение симметричной относительно начала координат, т.е. если $x_0 \in D(f)$, то и $(-x_0) \in D(f)$;

2. Выполняются ли равенства $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$. При выполнении первого равенства функция окажется четной с графиком, симметричным относительно оси ординат, во втором – нечетной с графиком, симметричным относительно начала координат.

Для указанных в задаче функций:

1. $y(-x) = \lg\dfrac{1-x}{1-(-x)} = \lg\dfrac{1-x}{1+x} = \lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\lg\dfrac{1+x}{1-x} = -y(x)$,

то функция $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$ - нечетная;

2. $y(-x) = \sqrt[5]{(-x+5)^2} + \sqrt[5]{(-x-5)^2} = \sqrt[5]{(-1)^2(x-5)^2} + \sqrt[5]{(-1)^2(x+5)^2} =$
$= \sqrt[5]{(x-5)^2} + \sqrt[5]{(x+5)^2} = y(x)$,

то функция $f(x)$ является четной;

3. $y(-x)=\lg(x+\sqrt{1+(-x)^2})=\lg\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lg\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=$

$$=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lg\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1}=-\lg\left(\sqrt{1+x^2}+x\right),$$

следовательно, функция нечетная;

4. $y(-x)=tg(-x)+\cos(-x)=-tgx+\cos x\neq\pm f(x)$,

следовательно, функция $y=tgx+\cos x$ не является ни четной, ни нечетной.

Пример 6. Найти период функции
$y=\sin 2\pi x$.

Решение. При решении задач на нахождение периода функции следует использовать следующее.

Функция является периодической, если существует такое число $T\neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $x-T$ и $x+T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.

В этом случае T есть период функции $f(x)$.

Так как $\sin 2\pi x=\sin(2\pi x+2\pi)=\sin(2\pi(x+1))$, то период T=1.

Предел и непрерывность функции

Практически предел функции находят не на основании определения предела функции, а на основании теорем о пределе функции.

Теорема. Если при $x\to a$ существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$, то:

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$;
4. $\lim\limits_{x\to a}kf(x)=k\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$, где k - постоянный множитель.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3^x}{\sqrt{x+8}}$.

Решение. Так как

$\lim\limits_{x\to 1}(x^3+3^x)=(1)^3+3^1=4$, а $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+8}=\sqrt{1+8}=3$,

то по теореме о пределе частного получаем, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3^x}{\sqrt{x+8}}=\dfrac{4}{3}$.

Но не всегда можно применять теоремы о пределах без предварительного преобразования функций, стоящих под знаком предела. При этом возможны следующие неопределенные ситуации: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}.

Приемом раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ является деление числителя и знаменателя на наивысшую степень x.

При неопределенности вида $\frac{0}{0}$ требуется выполнить преобразование функции, выделив в числителе и знаменателе дроби множитель, стремящийся к нулю. Затем сократить дробь на этот общий множитель.

Неопределенности же вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ путем преобразований приводят к одному из рассмотренных случав $\left(\frac{\infty}{\infty} \text{ или } \frac{0}{0} \right)$. Поясним сказанное на примерах.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x}$.

Решение. Наивысшая степень x вторая, делим числитель и знаменатель на x^2. Получим

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{2}{x}} = \frac{3}{5}$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0$.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

Решение. Имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Получим

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \cos x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x \to 0$ стремятся к нулю. Преобразуем функцию, выделим общий множитель

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x (\cos^2 x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{-\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{-\sin x} = \frac{2}{0} = \infty.$$

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} ctg^3 x (\cos x - \cos^3 x)$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 0} ctg^3 x = \infty$, а $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - \cos^3 x) = 0$, то имеет место неопределенность вида $\infty \cdot 0$.

Выполним преобразования

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^3 x \cdot \cos x (1 - \cos^2 x)}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \cos^4 x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^3 x} =$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} = \infty.$$

Пример 12. Найти точки разрыва функции.

$$y = \begin{cases} x, & x \le -2, \\ 4 - x^2, & \text{если} \quad -2 < x \le 0, \\ 4 - x, & x > 0. \end{cases}$$

Решение. На интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$ и $(0;+\infty)$ функция непрерывна. Проверке подлежат только точки $x = -2$ и $x = 0$.

Для того чтобы убедиться, что функция непрерывна в точке, требуется проверить, равны ли между собой односторонние пределы и равны ли они значению функции в этой точке. Рассмотрим точку $x = -2$. $f(-2) = -2$.

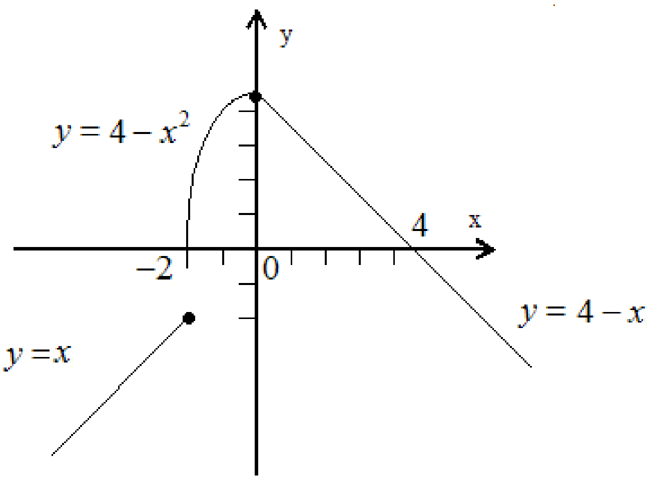


Рис. 4.

Вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x \to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} x = -2, \quad \lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} (4 - x^2) = 0.$$

Так как односторонние пределы не совпадают, $x = -2$ - точка разрыва функции.

Рассмотрим точку $x = 0$. $f(0) = 4$,

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (4 - x^2) = 4, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (4 - x) = 4,$$

$x = 0$ - точка непрерывности функции, выполнены все условия непрерывности.

$x = 0$ - точка непрерывности функции, выполнены все условия непрерывности (рис. 4).

Производная

Пример 1. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

1. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$; 2. $y = 4\cos^3 x$; 3. $y = e^{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$; 4. $\begin{cases} x = k\sin t + \sin kt, \\ y = k\cos t + \cos kt. \end{cases}$

Решение.

1. $y' = \dfrac{(\cos x)' \cdot (1 - \sin x) - \cos x(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} =$

$$=\frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$

2. $y=4\cos^3 x$ есть сложная функция.

$y=4u^3$, где $u=\cos x$.

Производная сложной функции имеет вид

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ или $y'=f'(u)\cdot u'(x)$.

Следовательно,

$$y'=4\cdot 3u^2(-\sin x)=12\cos^2 x(-\sin x)=-12\cos^2 x\cdot\sin x.$$

3. $y=e^{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$ - сложная функция.

$y=e^u$, где $u=v^2$, а $v=1+\sqrt[3]{x}$,

$$y'=\left(e^u\right)'_u\cdot\left(v^2\right)'_v\cdot v'=e^u\cdot 2v\cdot(1+\sqrt[3]{x})'=e^{(1+\sqrt[3]{x})^2}\cdot 2(1+\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$ 4.

4. $\begin{cases} x=k\sin t+\sin kt, \\ y=k\cos t+\cos kt. \end{cases}$

Функция y от независимой переменной x задана через посредство вспомогательной переменной (параметра t). Производная от y по x определяется формулой

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\left(dy/dt\right)}{\left(dx/dt\right)}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Находим производные от y и x по параметру t:

$$x'_t=k\cos t+k\cos kt=k(\cos t+\cos kt)=2k\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2},$$

$$y'_t=-k\sin t-k\sin kt=-k2\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2},$$

$$y'=\frac{-2k\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}{2k\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}=-tg\,\frac{t+kt}{2}=-tg\,\frac{(k+1)t}{2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^2-4x$ в точке, где $x=1$.

Решение. Уравнение касательной к кривой в точке $M(x_0,y_0)$

$$y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0),$$

$$x_0=1,\quad y(x_0)=y(1)=1^2-4=-3.$$

Для определения углового коэффициента касательной $y'(x_0)$ находим производную

$y' = 2x - 4$,

$y'(x_0) = y'(1) = 2 - 4 = -2$.

Подставляя значения x_0, y_0, $y'(x_0)$ в уравнение, получим

$y + 3 = -2(x - 1)$ или $2x + y + 1 = 0$.

Уравнение нормали

$$y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0),$$

$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)$ или $x - 2y - 7 = 0$.

Пример 3. Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x = A\sin\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в момент времени $t = \frac{2\pi}{\omega}$.

Решение. Найдем скорость v и ускорение a движения в любой момент времени t

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t; \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t.$$

При $t = \frac{2\pi}{\omega}$

$$v = A\omega\cos\left(\omega\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\omega, \quad a = -A\omega^2\sin\left(\omega\frac{2\pi}{\omega}\right) = 0.$$

Дифференциал, производные высших порядков

Пример 1. Найти дифференциалы функций

1. $y = x^3 - 3^x$; 2. $z = \ln\left(1 + e^{10x}\right) + arcctge^{5x}$,

вычислить $dz\big|_{x=0;dx=0,1}$.

Решение. Находим производную данной функции и, умножив ее на дифференциал независимой переменной, получим искомый дифференциал данной функции:

1. $dy = y' \cdot dx = (x^3 - 3^x)'dx = (3x^2 - 3^x\ln 3)dx$;

2. $$dz = z' \cdot dx = \left[\frac{\left(1 + e^{10x}\right)'}{1 + e^{10x}} - \frac{\left(e^{5x}\right)'}{1 + \left(e^{5x}\right)^2}\right]dx =$$

$$= \left[\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} - \frac{5e^{5x}}{1 + e^{10x}}\right]dx = \frac{5e^{5x}(2e^{5x} - 1)}{1 + e^{10x}}dx.$$

Свойства дифференцируемых функций

Пример 1 . Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$; 3. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x + 1)\,e^{-x^2}$.

Решение. Убедившись, что имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, применяем затем правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^4-16)'}{(x^3+5x^2-6x-16)'}=$

$$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^3}{3x^2}+10x-6=\frac{32}{26}=\frac{16}{13};$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos ax)'}{(1-\cos bx)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a\cos ax)'}{(b\cos bx)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^2\cos ax}{b^2\cos bx}=\frac{a^2}{b^2};$$

здесь правило Лопиталя применено дважды.

3. $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln\sin 5x)'}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{\frac{1}{\sin 5x}\cos 5x\cdot 5}=$

$$=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\cos x\cdot\sin 5x}{5\cos 5x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to +0}\frac{\cos x}{5\cos 5x}\cdot\lim\limits_{x\to +0}\frac{(\sin 5x)'}{(\sin x)'}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim\limits_{x\to +0}\frac{5\cos 5x}{\cos x}=\frac{1}{5}\cdot 5=1;$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\,e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+x)'}{(e^{x^2})'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x}=0\cdot$

Исследование поведения функций

Пример 1. Исследовать и построить график функции

$$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\,.$$

Решение.

1. Заданная функция определена и непрерывна на всей числовой оси $D(f)=(-\infty;\infty)$.

2. Функция нечетная, ибо $y(-x)=-y(x)$, ее график будет симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно построить график для $x\in[0;\infty)$.

3. График функции пересекается с осями координат только в начале координат, так как $y(0)=0$.

4. Исследуем функцию на наличие асимптот:

а) вертикальных асимптот график функции не имеет;

б) невертикальная асимптота имеет уравнение $y=kx+b$.

$$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^4}+\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^4}} = 0.$$

Таким образом, уравнение асимптоты $y = 0$.

5. Исследуем функцию на экстремум

$$y' = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{(x-1)}-\sqrt[3]{(x+1)}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

y' нигде не обращается в нуль; y' не существует в точках $x = \pm 1$, которые являются критическими.

Исследуем знак производной на интервале $[0; \infty)$ (рис.5)

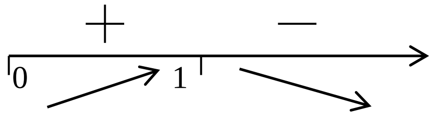


Рис. 5.

$x = 1$ есть точка максимума, $y_{\max} = y(1) = \sqrt[3]{4}$.

6. Исследуем график функции на выпуклость и вогнутость

$$y'' = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{4}{3}} = \frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}.$$

$y'' = 0$ в точке $x = 0$; y'' не существует в точках $x = \pm 1$. Эти точки могут быть абсциссами точек перегиба.

Исследуем знак второй производной на интервале $[0; \infty)$ (рис.6)

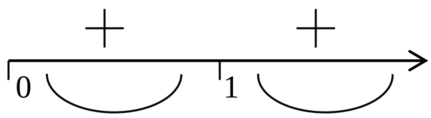


Рис. 6

$x = 1$ не является точкой перегиба.

Основываясь на полученных результатах исследования, строим график функции на интервале $[0; \infty)$, затем симметрично полученному графику относительно начала координат на интервале $(-\infty; 0)$ (рис.7)

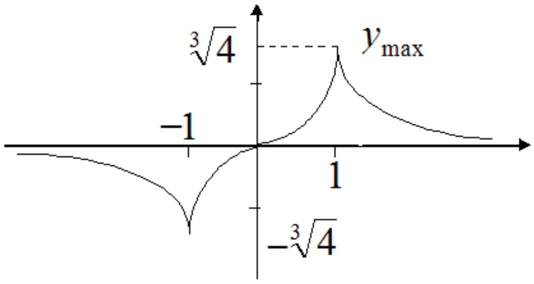


Рис. 7

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на отрезке [-4; 4].

Решение. 1. Найдем критические точки функции y, лежащие внутри отрезка [-4; 4], и вычислим ее значения в этих точках: $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0$ в точках $x = -1$ и $x = 3$. Эти точки лежат внутри отрезка [-4; 4] и являются критическими. Других критических точек нет, так как производная существует всюду. Значение функции в критических точках: $y(-1) = 40$ и $y(3) = 8$.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка [-4; 4]: $y(-4) = -41$ и $y(4) = 15$.

3. Сравнивая все вычисленные значения функции во внутренних критических точках и на концах отрезка, заключаем: наибольшее значение функции y на отрезке [-4; 4] равно 40 и достигается ею во внутренней критической точке $x = -1$, а ее наименьшее значение равно -41 и достигается на левой границе отрезка $x = -4$.

$$y_{наиб} = y(-1) = 40,$$

$$y_{наим.} = y(-4) = -41.$$

Функции нескольких переменных

Литература. [1], гл.VШ, § 1 - 4.

1. Частные производные.

Литература. [1], гл. VIII, § 5, 6, упр. 1-10.

Пример. $z = \ln\frac{x}{y}.$

1. Найти область определения функции.

2. Проверить, что $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y = 0.$

3. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot x^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot y^2 = -2.$

Решение.

1. Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение, следовательно

$$\frac{x}{y} > 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \textbf{ или } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}.$$

Сделаем чертеж

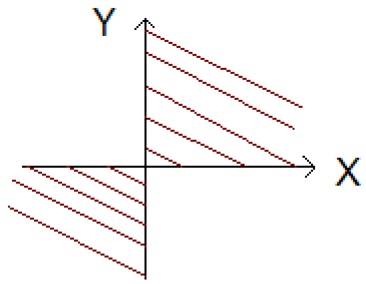


Рис. 3.

2. При вычислении частной производной по x рассматриваем функцию z как функцию только от переменной x, а при дифференцировании по y - как функцию только от y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln \frac{x}{y}\right)_x' = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln \frac{x}{y}\right)_y' = \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot x - \frac{1}{y} \cdot y = 1 - 1 = 0.$$

3. При вычислении второй производной по x также рассматриваем функцию z как функцию только от переменной x, а при дифференцировании по y - как функцию только от y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)_x' = (x^{-1})_x' = \frac{-1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{-1}{y}\right)_y' = \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{-1}{x^2} \cdot x^2 - \frac{1}{y^2} \cdot y^2 = -2.$$

Контрольная работа 2. Задания

1. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж функции.

1.1. $y=\begin{cases} x^2+1, & \text{если} \quad x\le 1, \\ 2x, & \text{если} \quad 1<x\le 3, \\ x+2, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$	1.11. $y=\begin{cases} x+1, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 2-x, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$
1.2. $y=\begin{cases} 2^x, & \text{если} \quad x\le 1, \\ x-1, & \text{если} \quad 1<x\le 4, \\ -x+1, & \text{если} \quad x>4. \end{cases}$	1.12. $y=\begin{cases} -x^2+2, & \text{если} \quad x\le 0, \\ -x, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ -\sqrt{x}, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$
1.3. $y=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{если} \quad 0\le x<1, \\ 4-2x, & \text{если} \quad 1\le x<3, \\ -2, & \text{если} \quad x\ge 3. \end{cases}$	1.13. $y=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ tgx, & \text{если} \quad 0<x\le \frac{\pi}{4}, \\ 2, & \text{если} \quad x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$
1.4. $y=\begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 1, & \text{если} \quad 0<x<3, \\ x, & \text{если} \quad x\ge 3. \end{cases}$	1.14. $y=\begin{cases} -2, & \text{если} \quad x\le -1, \\ -x^2, & \text{если} \quad -1<x\le 1, \\ x, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$
1.5. $y=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ \frac{4}{x}, & \text{если} \quad 0<x<4, \\ 1, & \text{если} \quad x\ge 4. \end{cases}$	1.15. $y=\begin{cases} -2, & \text{если} \quad x\le 0, \\ -3x+3, & \text{если} \quad 0<x\le 1, \\ \lg(x), & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$
1.6. $y=\begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad \frac{\pi}{2}<x<\pi, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x\ge \pi. \end{cases}$	1.16. $y=\begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ x, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$
1.7. $y=\begin{cases} x^3, & \text{если} \quad x\le 0, \\ -x, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ x-2, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$	1.17. $y=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad x\le -2, \\ x^2, & \text{если} \quad -2<x\le 1 \\ 2-x, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$
1.8. $y=\begin{cases} 2^x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 2-x, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ x-2, & \text{если} \quad x<2. \end{cases}$	1.18. $y=\begin{cases} 6+2x, & \text{если} \quad x\le -3, \\ -\sqrt{9-x^2}, & \text{если} \quad -3<x\le 3, \\ x, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

1.9. $y=\begin{cases} -x^3, & \text{если} \quad x\le 0, \\ x, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ 2-x, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$	1.19. $y=\begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad x\le 0, \\ 1-x, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ x^2, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$
1.10. $y=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0, \\ tgx, & \text{если} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{если} \quad x\ge\frac{\pi}{2}. \end{cases}$	1.20. $y=\begin{cases} -2x, & \text{если} \quad x\le\frac{1}{2}, \\ \log_2 x, & \text{если} \quad \frac{1}{2}<x\le 4, \\ x, & \text{если} \quad x>4. \end{cases}$

2. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций.

№	а	б	в	г
2.1	$y=\frac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$	$y=e^{2\cos x}$	$y=\ln\sin(2x+5)$	$x=\cos\left(\frac{t}{2}\right)$, $y=t-\sin t$
2.2	$y=x^2\sqrt{1-x^2}$	$y=\frac{4\sin x}{\cos^2 x}$	$y=arctg\, e^{2x}$	$x=t^3+8t$, $y=t^5+2t$
2.3	$y=\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2x+3}$	$y=\sqrt[3]{x^2+3\ln x}$	$y=\arcsin^2 4x$	$x=\frac{1+t}{t}$, $y=\frac{t-1}{t}$
2.4	$y=\sqrt{(1+x^2)(1-x)}$	$y=\frac{1}{tg^2 2x}$	$y=\arcsin\sqrt{1-3x}$	$x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$
2.5	$y=\sqrt[9]{4x^5+2}$	$y=arctg\left(\frac{1-x}{x-3}\right)$	$y=e^{-x^2}\ln(1-3x)$	$x=t^3+1$, $y=t^2+t+1$
2.6	$y=x\cdot\sqrt{a^2-x^2}$	$y=2+3\cos^2 x$	$y=\frac{x\ln x}{x-1}$	$x=2tg\, t$, $y=2\sin^2 t+\sin 2t$
2.7	$y=arctg\sqrt{x}$	$y=x\sqrt{x^2+a^2}$	$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$x=2t+3t^2$, $y=t^2+2t^3$
2.8	$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$y=2tg^3(x^2+1)$	$y=3^{arctg\, x}$	$x=3\cos^2 t$, $y=2\sin^3 t$
2.9	$y=\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$	$y=\frac{1}{2}tg^2 x+\ln\cos x$	$y=arctg\sqrt{1-x^2}$	$x=\frac{1+t}{t^3}$, $y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}$
2.10	$y=\frac{x}{10^{\sqrt{x}}}$	$y=\ln\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$	$y=x^3 arctg\sqrt{x+2}$	$x=3\cos t$, $y=4\sin^2 t$

2.11	$y=x^2\sqrt{1+x}$	$y=\sin x\cdot e^{\cos x}$	$y=\sin^2 2x$	$x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$
2.12	$y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4}$	$y=\ln(1-\sin x)$	$y=arctg(tg^2x)$	$x=3t-t^3$, $y=3t^2$
2.13	$y=\frac{(1-x)}{1+x^2}$	$y=tg\,\frac{1-e^x}{1+e^x}$	$y=\arcsin\sqrt{1+2x}$	$x=a\sin^3 t$, $y=a\cos^3 t$
2.14	$y=5\sqrt[5]{x^2+x+\frac{1}{x}}$	$y=2^x e^{-x}$	$y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}$	$x=2t-t^3$, $y=2t^2$
2.15	$y=\frac{\arcsin 4x}{1-2x}$	$y=\sqrt[3]{1+\sin^2 x}$	$y=\ln\sqrt{1-x^2}$	$x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.
2.16	$y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$	$y=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x$	$y=arctg\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$	$x=t+\ln\cos t$, $y=t-\ln\sin t$
2.17	$y=\sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^3}}$	$y=\lg(x-\cos x)$	$y=\cos\frac{\arcsin x}{2}$	$x=e^t\sin t$, $y=e^t\cos t$
2.18	$y=\frac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$	$y=\sin^3 x-x\cos x$	$y=x^m\ln x$	$x=\ln t$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)$
2.19	$y=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x$	$y=\frac{1}{\cos(x-\cos x)}$	$y=\sqrt{arctg(x^2+1)}$	$x=\frac{1+t^3}{t^2-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$
2.20	$y=x^2\sqrt[3]{x^6-8x}$	$y=\frac{\sin^3 x}{\cos x^2}$	$y=arctg^3(1+x)$	$x=\ln(1+t^2)$, $y=t-arctg\,t$

3.Найти указанные пределы, использую правило Лопиталя.

	а	б
3.1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-3x-9}$
3.2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x+4x^2}{x^3-3x^2+7}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$
3.3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-13x-7}{14-9x+x^2}$
3.4	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-2x+1}{1-3x^2+x^4}$	$\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$
3.5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^6-x^3-2x}{2x^6-1}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$
3.6	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x^2-3x^3}{1-3x+6x^3}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{2}{1-x^2}\right)$

3.7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$
3.8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-2x+1}{1-3x^2+x^5}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{3x^2-8x-3}$
3.9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$
3.10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-2x+11}{5x^7+3x^4+2}$	$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{14-9x+x^2}{2x^2-13x-7}$
3.11	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{2x^2-7x-15}$
3.12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x^2-3x^3}{1-3x+6x^3}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x}\right)$
3.13	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^5-2x^2+5}{5x^5+2x-1}$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$
3.14	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^6+6x^5+5}{3x^6-1+x^3}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{(x-4)^2}$
3.15	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{2x^2+9x+9}$
3.16	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-2x+11}{5x^6+x^4+2}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-4}$
3.17	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-6x-3}{x^3-2x^2+4}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+9x+10}{x^2-x-6}$
3.18	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-x+1}{5x^2+6x-2}$	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$
3.19	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x-8}$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+2x-1}$
1.20.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1}{x^3-1}$	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{12x-8x^2-4}{2x^2-x}$

4. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

4.1. $y=2x^3-6x+5$;	4.11. $y=\dfrac{1}{21}x^3-\dfrac{3}{7}x^2-x$;
4.2. $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2$;	4.12. $y=\dfrac{2}{9}x^3-\dfrac{1}{3}x^2-4x$;
4.3. $y=\dfrac{1}{9}x^3-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{5}{3}x$;	4.13. $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+\dfrac{7}{3}$;

4.4. $y = 4x^4 - 8x^2 + 5$;	4.14. $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7$;
4.5. $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10$;	4.15. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{7}{4}$;
4.6. $y = \frac{1}{63}x^3 - \frac{2}{21}x^2 - x$;	4.16. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 5$;
4.7. $y = \frac{1}{120}x^4 - \frac{2}{45}x^3 - \frac{7}{20}x^2$;	4.17. $y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + x$;
4.8. $y = \frac{1}{45}x^3 + \frac{1}{15}x^2 - x$;	4.18. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 14$;
4.9. $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$;	4.19. $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 8x$;
4.10. $y = \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2$;	4.20. $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$;

5. Дана функция двух переменных

Проверить, удовлетворяет ли функция двух переменных $z = f(x, y)$ указанному дифференциальному уравнению первого порядка.

5.1	$z = y \cdot \sin(x^2 - y^2)$,	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$
5.2	$z = y \cdot e^{x^2 - y^2}$,	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$
5.3	$z = x \cdot \sin(x^2 - y^2)$,	$x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + xy\frac{\partial z}{\partial x} = xy$;
5.4	$z = tg^3(2x - 3y)$,	$3\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.5	$z = e^{\frac{x}{y^2}}$,	$2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.6	$z = x \cdot e^{y^2 - x^2}$,	$x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + xy\frac{\partial z}{\partial x} = zy$;
5.7	$z = \ln(x^2 + xy + y^2)$,	$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$
5.8	$z = y\ln(x^2 - y^2)$,	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$
5.9	$z = x \cdot e^{y^2 - x^2}$,	$\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x^2}$

5.10.	$z = e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{y}$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.11	$z = e^{\frac{y}{x}}$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.12	$z = \sin \frac{x}{y}$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.13	$z = \ln(e^x + e^y)$,	$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$
5.14	$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.15	$z = tq \frac{x}{y}$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.16	$z = tg \frac{y}{x}$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.17	$z = \frac{x^3 - y^3}{x^3 - 4y^3}$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.18	$z = \sin(x^2 + y^2)$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.19	$z = \ln(x^2 + y^2)$,	$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
5.20	$z = \frac{y}{x^2 - y^2}$,	$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

Библиографический список

1. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. –М.: Наука, 2005.
2. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике, Айрис Пресс, т.1, 2, 2011 г.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. - М.: Наука, 2009.
4. Минорский В.П. , Сборник задач по высшей математике, 2009 г.
5. Данко П.Е., Попов А.Г. и др., Высшая математика в упражнениях и задачах, т.т. 1-2, 2007 г.

Вопросы к зачету

№ п/п	**Формулировка вопроса**
1	Матрицы и определители
2	Системы линейных уравнений. Формулы Крамера
3	Векторы в геометрической и координатной форме (свойства и действия)
4	Произведения векторов

5	Прямая на плоскости, различные виды её уравнения
6	Угол между прямыми, условия их параллельности и перпендикулярности
7	Кривые второго порядка(окружность, эллипс, гипербола, парабола), их канонические уравнения, свойства, чертёж
8	Плоскость в пространстве, различные виды её уравнения
9	Прямая в пространстве, различные виды её задания
10	Предел функции. Теоремы о пределах. Раскрытие неопределённостей
11	Производная, её определение, геометрический и механический смысл, правила вычисления
12	Дифференциал функции, его геометрический смысл
13	Производные и дифференциалы высших порядков
14	Теоремы Ролля и Лагранжа, их геометрический смысл
15	Правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей
16	Применение понятия производной для исследования свойств функции: - возрастание и убывание, - точки экстремума, - выпуклость и вогнутость её графика, - точки перегиба графика, - асимптоты (вертикальные и наклонные)
17	Функции двух переменных (определение, область определения, способы задания, частные производные)