

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра общей и технической физики

СПЕЦФИЗИКА

Физические основы полупроводниковой электроники

Методические указания для самостоятельной работы
студентов бакалавриата направления подготовки 13.03.02

Санкт-Петербург
2019

УДК 531/534 (073)

СПЕЦФИЗИКА (физические основы полупроводниковой электроники). Методические указания для самостоятельной работы.

Санкт-Петербургский горный университет / *сост.: Н.А. Тупицкая, А.Ю. Егорова*, СПб, 2019. — 31с.

Дисциплина «Спецфизика» посвящена рассмотрению физических основ полупроводниковой электроники, которая изучается студентами бакалавриата направления подготовки 13.03.02 - «Электроэнергетика и электротехника», профиль подготовки – «Электропривод и автоматика». Данные методические указания для самостоятельной работы студентов включают в себя два теоретического раздела, задачи для самостоятельного решения и расчетно-графическое задание.

Данные методические указания могут быть использованы студентами магистратуры направления подготовки 22.04.01 «Материаловедение и технологии материалов», профиль подготовки: «Материаловедение и технологии наноматериалов и покрытий» при изучении дисциплины «Теория электронного строения твердых тел».

Научный редактор: проф. *А.С. Мустафаев*

Рецензент: д.ф-м.н., проф. кафедры физической электроники

РГПУ им. Герцена *П.П. Серёгин*

© Санкт-Петербургский горный университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Научно-теоретической базой полупроводниковой электроники является физика полупроводников. Для изучения основ физики полупроводников необходимо разобраться с вопросами квантовой статистики, строения кристаллов, квантово-механическим описанием состояния электронов в твердом теле. Охватить все эти вопросы в рамках данного пособия не представляется возможным. Они рассмотрены в учебниках [1-2] и учебных пособиях [3-6]. Мы хотим обратить внимание изучающих данную дисциплину на важную тему – зонную теорию строения твёрдых тел, объясняющую многие принципиальные свойства полупроводников. Затем предлагаем изучить главу, посвящённую основам физики полупроводников.

После ознакомления с теоретическими главами нужно ответить на поставленные вопросы. В данных методических указаниях приводятся примеры решения задач по физике полупроводников и даны условия задач для самостоятельного решения. Студентам предлагается расчётно-графическое задание и излагается методика его выполнения.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЗОННОЙ ТЕОРИИ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Атомы большинства веществ, находящихся в твердом состоянии, образуют периодическую решетку, которую мы воспринимаем как кристалл. Механизм, связывающий атомы в молекулы, может связывать их в неограниченной периодической структуре.

Пусть первоначально имеется N изолированных атомов какого-либо вещества. Пока атомы изолированы друг от друга, т.е. существуют независимо, они имеют полностью совпадающие спектры энергетических уровней. Каждый электрон, входящий в состав атома, обладает определенной полной энергией, т.е. занимает определенный энергетический уровень.

Если атомы находятся на больших расстояниях друг от друга, (газ), то взаимодействие между атомами отсутствует, и энергетические уровни остаются неизменными, т.е. дискретными.

Заполнение энергетических уровней электронами осуществляется в каждом атоме независимо друг от друга.

По мере сближения атомов между ними возникает все усиливающееся взаимодействие, которое приводит к изменению положения энергетических уровней.

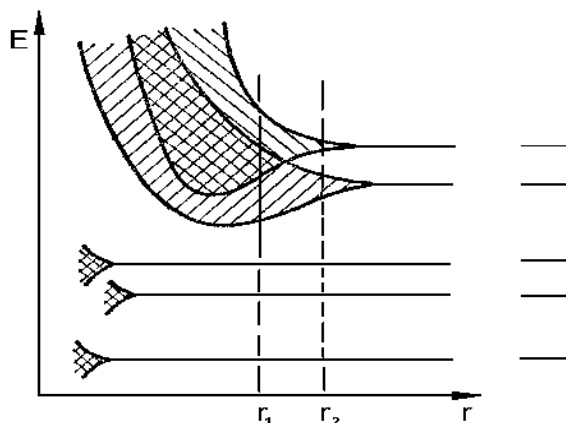


Рис.1.1 Схема расщепления энергетических уровней электронов в кристалле

в твердом теле атомы положены близко друг к другу и волновые функции соседних атомов перекрываются. Энергетические уровни электронов несколько смещаются и расщепляются, образуя энергетические зоны, состоящие из отдельных близко расположенных по энергии уровней. Вместо одного, одинакового для всех атомов, уровня возникает N очень близких, но различающихся по энергии уровней. На рисунке 1.1 показано расщепление энергетических уровней как функция межатомного расстояния r .

В зависимости от химических свойств атомов равновесное состояние между соседними атомами в кристалле может быть либо при $r = r_1$, либо $r = r_2$. Твердые тела, образованные при условии, когда $r = r_1$, это металлы. Второе условие реализуется в диэлектриках и полупроводниках. Для металлов характерно перекрытие энергетических уровней валентных электронов, для полупроводников и диэлектриков возникает зазор между ними.

Поскольку ширина зон порядка 1 эВ, а $N \sim 10^{20} \text{ см}^{-3}$, расстояние между уровнями столь мало, что энергетический спектр электрона в

кристалле в пределах одной зоны в большинстве случаев можно считать квазинепрерывным. На рисунке 1.2 изображена структура энергетических зон для диэлектриков (а), полупроводников (б), металлов (в).

Энергетическую зону или совокупность нескольких перекрывающихся энергетических зон, которые образовались в результате расщепления одного или нескольких энергетических уровней отдельных атомов, называют разрешенной зоной.

Электроны в твердом теле могут иметь только те значения энергии, которые соответствуют разрешенной зоне. Между разрешенными зонами находятся *запрещенные зоны, т.е. области значений энергий, которыми не могут обладать электроны в идеальном кристалле.*

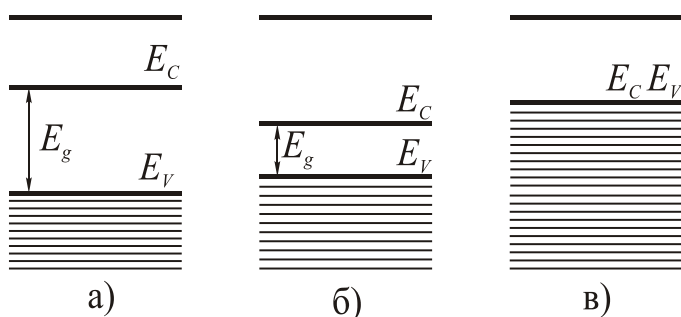


Рис.1.2 Структура энергетических зон для диэлектриков (а), полупроводников (б), металлов (в)

Ширина разрешенных энергетических зон не зависит от размеров кристалла, а определяется природой атомов (глубиной кулоновской потенциальной ямы и ее шириной) и симметрией кристаллической решётки (взаимным расположением потенциальных ям), т.е. перекрытием волновых функций электронов. Так как волновые функции внутренних оболочек атомов сильно локализованы вблизи ядра, то они почти не перекрываются и расщепление этих уровней практически отсутствует.

Ширина разрешенной зоны валентных электронов не превышает единиц электрон-вольт. *Количество уровней в зоне равно числу*

атомов, составляющих твердое тело, а энергетическое расстояние между этими уровнями обратно пропорционально количеству атомов. Как было сказано выше, энергетическая зона практически непрерывна. Достаточно ничтожно малого энергетического воздействия, чтобы вызвать переход электронов с одного уровня на другой, если там имеются свободные состояния.

Электроны, будучи фермионами (спиновое квантовое число $s=\pm\frac{1}{2}$), подчиняются принципу Паули, согласно которому на каждом энергетическом уровне может находиться не более двух электронов, причем с противоположно направленными спиновыми магнитными моментами. Соответственно, конечным оказывается и число электронов, заполняющих данную энергетическую зону.

При $T = 0$ нижние зоны заполнены полностью, а верхние – свободны. Самая верхняя из заполненных зон называется *валентной зоной*. Ближайшую к ней свободную зону называют *зоной проводимости*. Энергетический зазор между ними называется *запрещенной зоной*, а его величина – шириной запрещенной зоны ΔE . Электрические, оптические и другие свойства твердых тел определяются характером заполнения электронами разрешенных энергетических зон и наличием и шириной запрещенной зоны.

Например, для наиболее широко распространенных полупроводников – кремния, германия, арсенида галлия ширина запрещенной зоны составляет величины $\Delta E(\text{Si}) = 1,12$ эВ, $\Delta E(\text{Ge}) = 0,68$ эВ, $\Delta E(\text{GaAs}) = 1,43$ эВ. Для алмаза эта величина равна $\Delta E(C_{\text{алмаз}}) \approx 5$ эВ.

Зонные структуры металлов и неметаллов существенно различаются: в металлах валентная зона заполнена не полностью или перекрывается с зоной проводимости (рис. 1.2 в). Это позволяет считать, что ширина запрещенной зоны в металлах равна нулю.

В неметаллах запрещенная зона имеет конечную ширину. Формально считается, что у диэлектриков $\Delta E > 3$ эВ (рис. 1.2 а), а у полупроводников $\Delta E < 3$ эВ (рис. 1.2 б), однако это деление условно. Электроны полностью заполненной валентной зоны не могут принять участие в создании электрического тока. Для появления электропроводности необходимо часть электронов перевести из валентной зоны в зону проводимости. Энергии электрического поля недостаточно для например, нагревание твердого тела.

При нагревании твердого тела средняя кинетическая энергия тепловых колебаний атомов кристаллической решетки приблизительно равна kT (k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура.). При комнатной температуре эта величина составляет порядка 0,03 эВ, что существенно меньше ширины запрещенной зоны. Однако тепловая энергия неравномерно распределяется между частицами. В каждый момент времени имеется небольшое число атомов, у которых амплитуда и энергия тепловых колебаний значительно превышают среднее значение. Электронам таких атомов может быть передана энергия, достаточная для перехода из валентной зоны в зону проводимости. Чем выше температура и меньше ширина запрещенной зоны, тем больше таких переходов совершается. У диэлектриков ширина запрещенной зоны столь велика, что такие переходы практически не происходят, и они являются изоляторами.

При переходе электрона в зону проводимости появляется свободное состояние в валентной зоне, которое называется «дыркой». Это состояние может быть занято электроном от соседнего атома, что эквивалентно перемещению свободного состояния. Теперь на это состояние может перейти электрон от третьего атома. Таким образом, происходят эстафетные переходы электронов с уровня на уровень внутри разрешенной зоны.

Это эквивалентно движению дырки в направлении, противоположном движению электронов, т.е. дырка ведет себя как положительно заряженная частица. Заброс электрона из валентной зоны (вблизи ее «потолка») в зону проводимости и появление положительной дырки в валентной зоне способствует возникновению электропроводности в полупроводнике. Для ее реализации необходимо наличие внешнего электрического поля. Однако на электроны в кристалле действует не только внешнее, но и внутренне периодическое электрическое поле кристалла.

Действие этого поля можно учесть, введя понятие «эффективной» массы электрона и дырки. Получается, что электроны валентной зоны также могут принимать участие в электропроводности, при этом сложное перемещение коллектива электронов валентной зоны можно описать как движение свободной положительно заряженной квазичастицы – дырки, имеющей эффективную массу m_p^* . Таким

образом, в полупроводниках существуют отрицательно заряженные свободные носители заряда – электроны с массой m_n^* и положительно заряженные дырки с массой m_p^* .

2. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Полупроводники являются основным материалом для производства электронных приборов.

2.1. СОБСТВЕННЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКИ

Химически чистые полупроводники называются *собственными* полупроводниками. К ним относится ряд чистых химических элементов IV группы таблицы Менделеева: Ge, Si, $\text{Ge}_x\text{Si}_{1-x}$, $\alpha\text{-Sn}$; VI группы – Se, Te; и соединения A_{III}B_V – GaAs, GaP, InAs, InSb, InP; $\text{A}_{II}\text{B}_{VI}$ – PbS, PbSe, PbTe, ZnTe; тройные соединения – $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$.

Из зонной теории следует, что при температуре $T = 0$ К вероятность заполнения электронами всех состояний в валентной зоне равна 1, а в зоне проводимости – 0. Таким образом, при абсолютном нуле в зоне проводимости полупроводника электронов нет, а валентная зона полностью заполнена. Электроны валентной зоны не участвуют в токе проводимости, а полупроводник при $T = 0$ К представляет собой идеальный диэлектрик.

С ростом температуры начинают осуществляться тепловые забросы электронов из валентной зоны в зону проводимости с одновременным появлением дырок в валентной зоне. Таким образом, в собственных полупроводниках концентрации электронов n и дырок p равны, эта концентрация называется *собственной концентрацией* $n_i = n = p$.

Суммируя вышесказанное, отметим, что в собственных полупроводниках существуют два типа проводимости – электронный и дырочный, дающих практически равноценный вклад в проводимость всего полупроводника.

2.2. ЗОННАЯ СТРУКТУРА СОБСТВЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

До сих пор вы изучали упрощенную зонную структуру полупроводников, не затрагивая зависимость энергии электрона в кристалле от его импульса, определяемым его волновым вектором

$\vec{p}_e = \hbar\vec{k}$. Напомним, что зависимость энергии от волнового вектора \vec{k} называется дисперсионной кривой. Вид дисперсионной кривой реального кристалла зависит от вида материала.

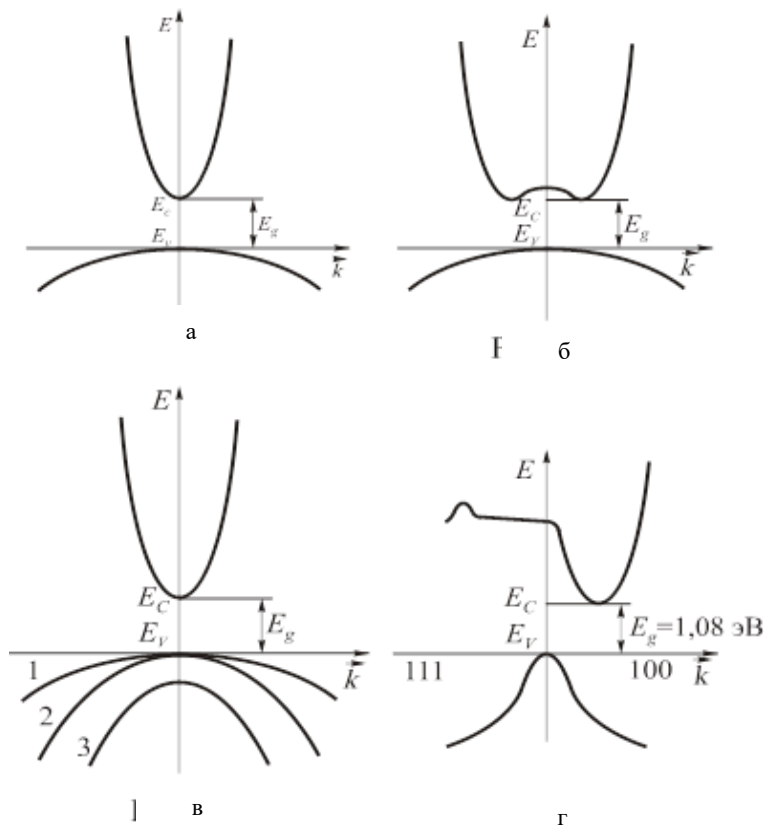


Рис. 2.1. Дисперсионные кривые

Он может отличаться по различным направлениям в кристалле. Это зависит от симметрии кристаллической решетки. Как правило, максимум дисперсионной кривой для валентной зоны расположен

при $\vec{k}=0$. Если минимум дисперсионной кривой для зоны проводимости лежит в той же точке, то полупроводник называется **прямозонным** (рис. 2.1 а). В противном случае полупроводник называется **непрямозонным** (рис. 2.1 б). К числу первых относятся InSb, InP, GaAs, к числу вторых – Si, Ge.

Дисперсионная кривая валентной зоны состоит, как правило, из нескольких ветвей (рис. 2.1 в). Дисперсионные кривые зоны проводимости также могут состоять из нескольких кривых, как, например, у кремния (рис. 2.1 г). Чем больше эффективная масса частицы, тем меньше кривизна дисперсионной кривой, поэтому ветвь 1 на рис. 2.1 (в) называется ветвью тяжелых дырок, а ветвь 2 – ветвью легких дырок (ветвь 3 – отщепленной ветвью).

Вид реальной зонной структуры полупроводника необходимо знать для объяснения некоторых явлений, особенно тех, где необходимо учитывать волновой вектор электрона.

2.3. ПРИМЕСНЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКИ

Добавление в собственный полупроводник примеси называется его **легированием**. Легирование проводят по разным причинам: во-первых, для создания полупроводников с заданными свойствами, во-вторых, для компенсации уже имеющихся в полупроводнике примесей, что бывает необходимо для управления оптическими свойствами полупроводника.

Рассмотрим сначала классический полупроводник IV группы (например, Ge), в который внесены атомы элемента V группы таблицы Менделеева (например, As). Атом примеси замещает в узле кристаллической решетки атом Ge. У мышьяка пять валентных электронов. Четыре из них образуют связи с соседними атомами Ge, а пятый – продолжает двигаться в поле атома мышьяка, ослабленного в Ge в $\epsilon=16$ раз (ϵ - диэлектрическая проницаемость). Радиус орбиты этого электрона увеличивается в 16 раз (рис. 2.2 а), а энергия его связи с атомом уменьшается примерно в $\epsilon^2=256$ раз. Поэтому этот «лишний» электрон имеет разрешенные по энергии состояния в запрещенной зоне. Эти состояния называются **донорными уровнями** (изображены пунктиром на рис. 2.2 б) и отстоят от дна зоны проводимости на расстоянии E_d по энергии. Так как энергия донорного уровня меньше ширины запрещенной зоны ($E_d < E_g$), то этот пятый электрон легко

оказывается в зоне проводимости в результате теплового заброса. Образующиеся при этом положительные заряды локализуются на

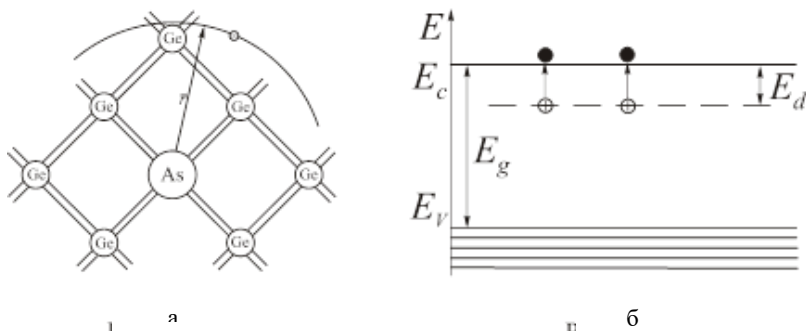


Рис. 2.2
Образование донорной примеси
а – внедрение атома As в решётку Ge
б – примесный (донорный) уровень в запрещённой зоне

неподвижных атомах примеси и в электропроводности не участвуют. У такого полупроводника количество электронов в зоне проводимости будет больше, чем количество дырок в валентной зоне ($n > p$). Поэтому данная примесь и называется **донором**, а полупроводник – **электронным, донорным** или ***n*-типа**.

Предположим теперь, что в Ge ввели в качестве примеси элемент III группы таблицы Менделеева, например, индий In. Для образования связей с четырьмя ближайшими соседями атому примеси не хватает одного электрона. Для заполнения внешней электронной оболочки к атому In переходит один из электронов атомов Ge, образуя на своем месте дырку (рис. 2.3 а). Отрицательный заряд локализуется таким образом на атоме индия и перестает участвовать в токе проводимости.

В подобном полупроводнике есть избыток дырок в валентной зоне по сравнению с электронами зоны проводимости ($p > n$), и преобладает дырочный тип проводимости. Такая примесь называется **акцептором**, а полупроводник – **акцепторным, дырочным** или ***p*-типа**. С точки зрения зонной структуры при легировании полупроводника акцептором в его запрещенной зоне появляются разрешенные

состояния – акцепторные уровни, отстоящие на E_a от потолка валентной зоны (рис 2.3 б).

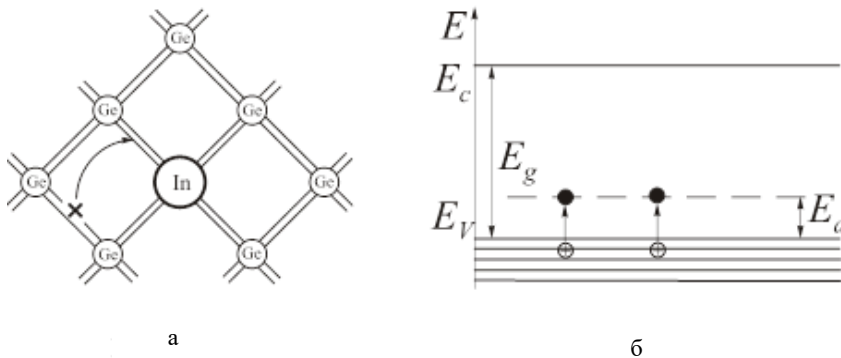


Рис. 2.3
 Образование акцепторной примеси
 а – внедрение атома In в решётку Ge
 б – примесный (акцепторный) уровень в запрещённой зоне

Мы рассмотрели упрощенную модель. На самом деле многие атомы примеси дают несколько примесных уровней в запрещенной зоне. Кроме того, атомы примеси вносят дефекты в кристаллическую решетку, нарушая ее периодичность. Это тоже приводит к появлению разрешенных состояний в запрещенной зоне. Если примесные уровни близки к соответствующим зонам, то они называются *мелкими*, а если находятся вблизи середины запрещенной зоны – то *глубокими*. Чем более мелкие уровни создает примесь, тем больше носителей тока будет в зонах при данной температуре.

Таким образом, можно управлять проводимостью полупроводника, меняя уровень его легирования. Для этого используются примеси, дающие мелкие уровни. Уже при достаточно низких температурах почти все они ионизованы, и концентрация свободных носителей примерно равна концентрации примеси.

Кроме того, вводя разные примеси (донорные и акцепторные), можно производить полупроводники с разным типом проводимости (электронным или дырочным), что необходимо для производства

полупроводниковых приборов. И, наконец, отметим, что сильное легирование может сделать полупроводник вырожденным и даже привести к изменению ширины запрещенной зоны.

А теперь рассмотрим, чем определяется концентрация носителей тока в соответствующих зонах, а значит, и проводимость полупроводника.

2.4. ПОЛОЖЕНИЕ УРОВНЯ ФЕРМИ И КОНЦЕНТРАЦИЯ СВОБОДНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Одним из основных параметров, характеризующих газ свободных носителей в полупроводниках, является уровень Ферми. В собственных и слаболегированных полупроводниках электронный (и дырочный) газ является невырожденным и описывается классической статистикой Максвелла – Больцмана. В этом случае концентрация свободных носителей зависит от положения уровня Ферми и температуры. Получим эту зависимость.

Примем за нулевой уровень отсчета энергии носителей дно зоны проводимости. Выделим в зоне проводимости узкий интервал энергии от E до $E+dE$. Концентрация электронов, энергия которых находится в данном интервале, определяется пол

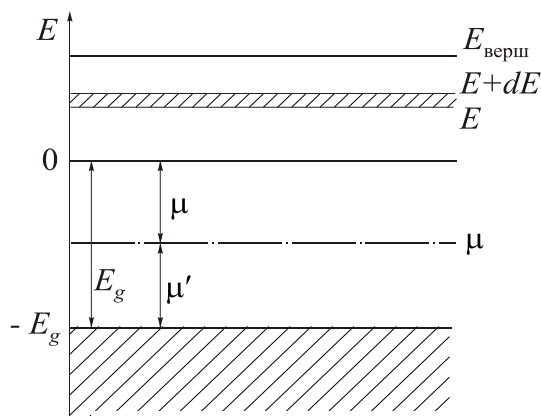


Рис. 2.4. Уровень Ферми в собственном полупроводнике

ной функцией распределения Максвелла – Больцмана и равна:

$$dn = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n)^{3/2} e^{\mu/kT} \sqrt{E} \cdot dE, \quad (2.1)$$

где m_n – эффективная масса электронов зоны проводимости. В невырожденных полупроводниках μ является величиной отрицательной. Это означает, что уровень Ферми в таких полупроводниках располагается ниже дна зоны проводимости. Обозначим расстояние от дна зоны проводимости до уровня Ферми и от уровня Ферми до потолка валентной зоны соответственно μ и μ' (рис. 2.4). В этом случае $\mu + \mu' = -E_g$ и, следовательно,

$$\mu' = -(E_g + \mu). \quad (2.2)$$

Полная концентрация электронов n , находящихся в зоне проводимости, получается интегрированием выражения (7.4) по всем значениям энергии от 0 до $E_{\text{верх}}$, то есть по всей зоне:

$$n = 4\pi \left(\frac{2m_n}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu}{kT}} \int_0^{E_{\text{верх}}} e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} \, dE \quad (2.3)$$

Так как с ростом E функция $e^{-\frac{E}{kT}}$ спадает очень быстро, то верхний предел интеграла можно заменить на бесконечность без совершения большой ошибки. Тогда интегрирование дает следующий результат:

$$n = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu}{kT}} = N_C e^{\frac{\mu}{kT}}, \quad (2.4)$$

где $N_C = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2}$ – **эффективная плотность состояний у дна** зоны проводимости. Подобным же образом можно рассчитать и концентрацию дырок в валентной зоне:

$$p = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g + \mu}{kT}} = N_V e^{\frac{\mu'}{kT}}, \quad (2.5)$$

где $N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2} \right)^{3/2}$ – **эффективная плотность состояний у потолка** валентной зоны.

В собственных полупроводниках носители тока образуются парами, и концентрации электронов в зоне проводимости и дырок в

валентной зоне равны $n_i = p_i$. Приравнивая правые части уравнений (2.4) и (2.5), получим:

$$N_c e^{\frac{\mu}{kT}} = N_v e^{-\frac{E_g + \mu}{kT}}. \quad (2.6)$$

Решая это уравнение относительно μ , получим зависимость уровня Ферми от температуры в собственных полупроводниках:

$$\mu = -\frac{E_g}{2} + \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_v}{N_c} = -\frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} \ln \frac{m_p}{m_n}. \quad (2.7)$$

При абсолютном нуле $\mu = -E_g/2$, т.е. уровень Ферми располагается точно посередине запрещенной зоны. С повышением температуры он смещается вверх (если $m_p > m_n$) или вниз (если $m_p < m_n$). Однако при разумных температурах это смещение настолько незначительно, что им можно пренебречь, считая, что уровень Ферми в собственных полупроводниках всегда располагается посередине запрещенной зоны.

Подставляя μ из (2.7) в (2.4) и (2.5), получим:

$$n_i = p_i = 2 \left(\frac{2\pi \sqrt{m_n m_p} kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2kT}} = \sqrt{N_c N_v} e^{-\frac{E_g}{2kT}}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что равновесная концентрация носителей тока в собственном полупроводнике определяется шириной запрещенной зоны и температурой полупроводника.

Произведение концентраций электронов и дырок np для любого невырожденного полупроводника, согласно (2.4) и (2.5), равно:

$$np = N_c e^{\frac{\mu}{kT}} \cdot N_v e^{-\frac{E_g + \mu}{kT}} = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{kT}}. \quad (2.9)$$

В правой части полученного выражения стоит ни что иное, как n_i^2 [см. формулу (2.8)]. Таким образом,

$$n \cdot p = n_i^2. \quad (2.10)$$

Данное выражение справедливо и для примесного полупроводника. Оно называется **законом действующих масс**.

Перейдем к рассмотрению примесных полупроводников. На рис. 2.4 показано изменение положения уровня Ферми с ростом температуры в донорном (а) и акцепторном (б) полупроводниках.

В области низких температур в примесных полупроводниках происходит возбуждение практически лишь электронов, находящихся на донорных уровнях, или переходящих из валентной зоны на акцепторные уровни. положение уровня Ферми в этой области определяется следующим образом:

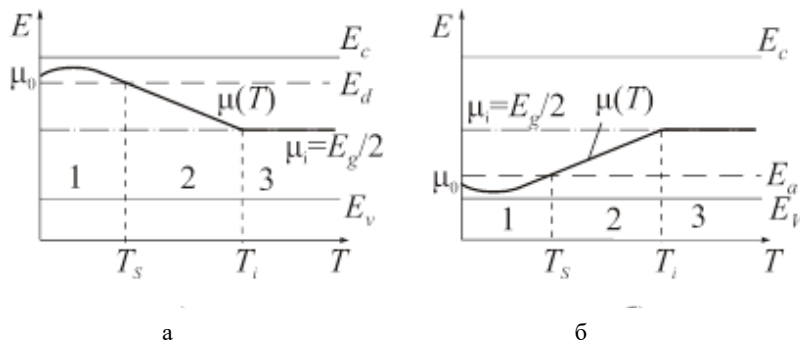


Рис. 2.4. Уровень Ферми в собственном полупроводнике

для электронного полупроводника
$$\mu = -\frac{E_d}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_d}{N_c}\right), \quad (2.11)$$

для дырочного полупроводника
$$\mu' = -\frac{E_a}{2} + \frac{kT}{2} \ln\left(\frac{N_a}{N_v}\right) \quad (2.12)$$

Здесь N_d и N_a – концентрации донорной и акцепторной примеси, соответственно.

Подставляя μ и μ' из (2.11) и (2.12) в (2.4) и (2.5) соответственно, получим выражения для концентрации n электронов в полупроводнике n -типа и дырок p в полупроводнике p -типа:

$$n = \sqrt{N_c \cdot N_v} e^{-\frac{E_d}{2kT}} \quad (2.13)$$

$$p = \sqrt{N_c \cdot N_v} e^{-\frac{E_a}{2kT}} \quad (2.14)$$

По мере повышения температуры концентрация электронов в зоне проводимости увеличивается, концентрация электронов на донорных уровнях уменьшается – донорные уровни истощаются. Также ведут себя и акцепторные уровни в дырочных полупроводниках. Данная область температур называется **областью истощения примесей** и обозначена на рис. 2.5 цифрой 2.

При полном истощении примесей концентрация электронов в зоне проводимости электронного полупроводника становится практически равной концентрации донорной примеси $n \approx N_d$, а концентрация дырок в дырочном полупроводнике – концентрации акцепторной примеси $p \approx N_a$. Температура истощения примеси T_s тем выше, чем выше энергия активации примеси E_d и E_a и ее концентрация.

При дальнейшем повышении температуры (область 3 на рис. 2.5) начинается все более интенсивное возбуждение собственных носителей, полупроводник все более приближается к состоянию собственного полупроводника, вследствие чего уровень Ферми приближается к положению уровня Ферми в собственном полупроводнике.

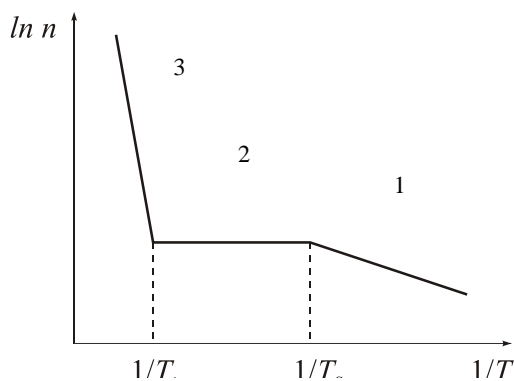


Рис. 2.5. Зависимость \ln концентрации электронов от обратной температуры

При достаточно высоких температурах концентрация собственных носителей может превзойти концентрацию примеси. Это соответствует переходу к собственной проводимости полупроводника. Температура T_i такого перехода тем выше, чем больше ширина запрещенной

зоны полупроводника и концентрация примеси в нем. Выше температуры T_i уровень Ферми в примесном полупроводнике совпадает с уровнем Ферми в собственном полупроводнике.

2.5. ПРОВОДИМОСТЬ СОБСТВЕННЫХ И ПРИМЕСНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

В полупроводниках присутствует два типа проводимости – электронная и дырочная, поэтому его электропроводимость равна:

$$\sigma = e(n \cdot u_n + p \cdot u_p), \quad (2.15)$$

где u_n и u_p – подвижности электронов и дырок, соответственно. У собственных полупроводников концентрации электронов и дырок равны $n=p=n_i$, и

$$\sigma = e(u_n + u_p)n_i = e(u_n + u_p)\sqrt{N_C \cdot N_V} \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}} = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}} \quad (2.16)$$

Если в полупроводнике присутствует некоторое количество примеси, то к собственной проводимости добавляется еще и примесная проводимость, определяемая примесными носителями:

а) для электронного полупроводника

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}} + \sigma_{0n} \cdot e^{-\frac{E_d}{2kT}} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{0n} = eu_n \sqrt{N_d \cdot N_C}$$

б) для дырочного полупроводника

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E_g}{2kT}} + \sigma_{0p} \cdot e^{-\frac{E_a}{2kT}} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{0p} = eu_p \sqrt{N_a \cdot N_V}$$

При низких температурах в полупроводниках преобладает примесная проводимость [второе слагаемое в уравнениях (2.17) и (2.18)], а при высоких – собственная (первое слагаемое).

2.6. ЭФФЕКТ ХОЛЛА

Эффект Холла — гальваномагнитный, т.е. обусловлен присутствием электрического и магнитного полей в полупроводнике.

Эффектом Холла называется возникновение в полупроводниковой или металлической пластине, помещенной в скрещенные электрическое и магнитное поля, поперечной разности потенциалов.

Поясним сказанное рисунком (рис. 2.6). Для указанной конфигурации плотности тока \vec{j} и магнитной индукции \vec{B} между гранями С и D возникает разность потенциалов, называемая ЭДС Холла:

$$V_x = R_x \cdot j \cdot B \cdot a, \quad (2.17)$$

где R_x — постоянная Холла.

Рассмотрим физическую природу эффекта Холла. На электрон, движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле, действует сила Лоренца

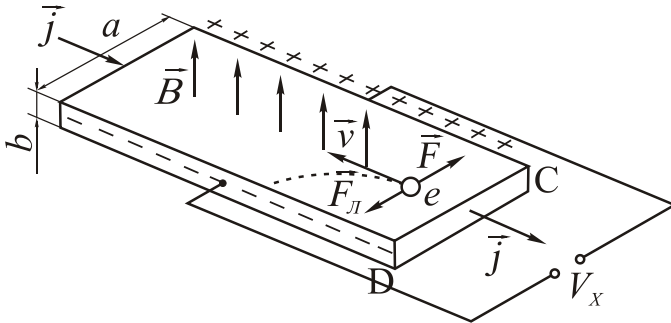


Рис. 2.6

$F_x = evB$ (так как $\vec{v} \perp \vec{B}$). Эта сила отклоняет электрон к грани D, заряжая ее отрицательно. На противоположной грани C накапливаются нескомпенсированные положительные заряды. Это приводит к возникновению электрического поля, направленного от C к D:

$$E_x = V_x/a. \quad (2.18)$$

Поле E_x действует на электроны с силой $F = eE_x$, направленной против силы Лоренца. Когда $F = F_L$, поперечное электрическое поле уравнивает силу Лоренца, и дальнейшее накопление электрических зарядов на боковых гранях пластины прекращается. Из условия равновесия $eV B = eE_x$ найдем:

$$E_x = vB. \quad (2.19)$$

Учитывая, что $V_x = aE_x$ и $v = j/en$, получим:

$$V_x = \frac{1}{en} Bja. \quad (2.20)$$

Таким образом, теория явления приводит к выражению для V_x , установленному американским ученым Холлом экспериментально. Постоянная Холла оказывается при этом равной

$$R_x = \frac{1}{en} \quad (2.21)$$

При выводе формул (3.45) и (3.46) допускалось, что все носители тока движутся с одной скоростью \vec{v} . Если учесть распределение носителей по скоростям, то более точный результат будет

$$R_x = \frac{A}{en}, \quad (2.22)$$

где A — постоянная, зависящая от механизма рассеяния носителей. В ковалентных кристаллах основным механизмом рассеяния является рассеяние на акустических фононах и $A = 3\pi/8 \approx 1,17$. В ионных кристаллах — рассеяние на оптических фононах и $A = 1,11$. При рассеянии на ионах примеси (которое сказывается при низких температурах) — $A = 1,93$.

В полупроводниках, в которых проводимость осуществляется как электронами, так и дырками:

$$R_x = \frac{A}{e} \cdot \frac{u_p^2 \cdot p - u_n^2 n}{u_p p + u_n n} \quad (2.23)$$

где u_p и u_n — подвижности дырок и электронов соответственно.

В зависимости от того, какой из слагаемых числителя больше, знак постоянной Холла может быть и положительным, и отрицательным.

Эффект Холла используют при исследовании полупроводниковых материалов и производстве полупроводниковых приборов. Измерив абсолютное значение и знак постоянной Холла, можно определить концентрацию и тип носителей тока в полупроводнике.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Вычислить положение уровня Ферми относительно дна зоны проводимости в полупроводнике с концентрацией ионизированных доноров 10^{23} м^{-3} . При температуре 300 К плотность состояний у дна зоны проводимости $2,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$.

Дано:

$$N_d = 1,0 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$N_c = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$(E_F - E_c) = ?$$

Решение:

По условию задачи мы имеем дело с донорным полупроводником (n -типа), который находится при температуре $T > T_s$, где T_s — температура, при которой происходит полное истощение примеси:

$$T_s = \frac{E_d}{k \ln(3N_c / N_d)}. \quad (1)$$

Обычно энергия ионизации доноров порядка $E_d \sim 0,01 \text{ эВ}$. Используя это значение и численные значения N_c и N_d , можно оценить величину T_s . Проведя вычисления по формуле (1), получим: $T_s \sim 20 \text{ К}$, т.е. $T \gg T_s$.

Концентрация электронов в зоне проводимости при полном истощении донорных примесей становится равной концентрации примеси ($n = N_d$). Она определяется выражением:

$$n = N_c \exp[(E_F - E_c)/kT], \quad (2)$$

следовательно, в нашем случае:

$$\frac{N_c}{N_d} = \exp[-(E_F - E_c)/kT] \quad (3)$$

Прологарифмируем выражение (3):

$$\ln \frac{N_c}{N_d} = [-(E_F - E_c)/kT]. \quad (4)$$

$$\text{Отсюда } E_F - E_c = -kT \ln(N_c / N_d) \quad (5)$$

Подставляя в выражение (5) численные значения величин, проведем вычисления и определим положение уровня Ферми:
 $(E_F - E_c) = -0,143 \text{ эВ}$

Задача 2.

Некоторый примесный полупроводник имеет решетку типа алмаза и обладает только дырочной проводимостью. Определить концентрацию носителей и их подвижность, если постоянная Холла равна $3,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Удельная проводимость полупроводника 110 См/м .

Дано:

p – полупроводник

$R_H = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{Кл}$

$\gamma = 110 \text{ См/м}$

$p - ? \quad b_p - ?$

Решение. Концентрация p дырок связана с постоянной Холла, которая для полупроводников с решеткой типа алмаза, обладающих носителями только одного знака, выражается формулой

$$R_n = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{ep},$$

где e – элементарный заряд.

Отсюда

$$p = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{eR_n}. \quad (1)$$

Выпишем все величины в единицах СИ: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $R_n = 3,8 \cdot 10^{-4}$ м³/Кл. Подставим числовые значения величин в формулу (1) и произведем вычисления

$$p = \frac{3 \cdot 3,14}{8} \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,8 \cdot 10^{-4}} \text{ м}^{-3} = 1,19 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Удельная проводимость γ полупроводников выражается формулой

$$\gamma = e(n b_n + p b_p), \quad (2)$$

где n и p – концентрации электронов и дырок; b_n и b_p – их подвижности. При отсутствии электронной проводимости первое слагаемое в скобках равно нулю и формула (2) примет вид:

$$\gamma = e p b_p.$$

Отсюда искомая подвижность

$$b_p = \frac{\gamma}{ep}. \quad (3)$$

Подставим в (3) выражение p по формуле (1)

$$b_p = \frac{8}{3\pi} \gamma R_n. \quad (4)$$

Подставив в (4) значения γ и R_n в единицах СИ и произведя вычисления, получим

$$b_p = \frac{8}{3 \cdot 3,14} 110 \cdot 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/(\text{Вс}) = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2/(\text{Вс})$$

Задача 3

При нагревании арсенид-галлиевого образца, находившегося при температуре 0 градусов Цельсия, его проводимость возросла в 4 раза. До какой температуры был произведен нагрев образца?

<p>Дано:</p> $T_1 = 273 \text{ K}$ $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 4$ $E_g = 1,43 \text{ эВ} = 1,43 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ $= 2,3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$	<p>Решение.</p> <p>Удельная проводимость полупроводников связана с температурой T соотношением:</p> $\sigma = \sigma_0 e^{\frac{-E_g}{2kT}},$
$T_2 = ?$	

где σ_0 — величина, не зависящая от температуры, E_g — ширина запрещенной зоны, k — постоянная Больцмана.

Таким образом

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{e^{\frac{-E_g}{2kT_1}}}{e^{\frac{-E_g}{2kT_2}}} = \exp\left[\frac{E_g}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = 4.$$

Прологарифмируем выражение и получим:

$$\frac{E_g}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \ln 4,$$

откуда

$$T_2 = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{2k \ln 4}{E_g}\right)^{-1}.$$

Подставим числовые значения, произведем вычисления:

$$T_2 = \left(\frac{1}{273} - \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 1,38}{2,3 \cdot 10^{-19}} \right)^{-1} = 291,5 \text{ K}.$$

3.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Собственный полупроводник при температуре 300 К имеет сопротивление равное $2 \cdot 10^5 \text{ Ом}$. Если его нагреть до температуры 400 К, то его сопротивление уменьшится до $0,5 \cdot 10^5 \text{ Ом}$. Найти ширину запрещенной зоны.

2. Определить значение дрейфового тока, протекающего через кремниевый стержень длиной 5 см и с поперечным сечением $0,5 \times 0,5 \text{ см}^2$, к концам которого приложена разность потенциалов 6 В. Кремний *n*-типа проводимости. Концентрация электронов проводимости в нем равна 10^{22} м^{-3} , концентрация собственных носителей равна $2,05 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$. Температура $T = 300 \text{ К}$.

3. Определить при $T = 300 \text{ К}$: а) удельное сопротивление собственного образца кремния; б) удельное сопротивление такого образца с донорной примесью, когда один атом донорной примеси приходится на каждые 10^8 атомов кремния?

4. Образец германия *n*-типа имеет удельное сопротивление $0,015 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ и значение постоянной Холла $5,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{Кл}$. Определить концентрацию основных носителей и их подвижность. Дырочной проводимостью пренебречь.

5. Удельная проводимость антимионида индия *p*-типа $2 \cdot 10^3 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, а подвижность дырок в нем $0,4 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Определить постоянную Холла и концентрацию дырок. Электронной проводимостью пренебречь.

6. Образец германия содержит в качестве примесей 10^{20} донорных атомов в 1 м^3 и $7 \cdot 10^{19}$ акцепторных атомов в 1 м^3 . При комнатной температуре образца удельное сопротивление собственного германия равно $0,6 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Определить плотность полного дрейфового тока, если к образцу приложено электрическое поле напряженностью

200 В/м. Подвижность электронов $\mu_n = 0,38 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, подвижность дырок $\mu_p = 0,18 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

7. Образец германия собственного типа проводимости при температуре 27°C обладает удельным сопротивлением $0,47 \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Определить удельную проводимость германия при температуре 127°C . Ширину запрещенной зоны принять равной $0,7 \text{ эВ}$ независимо от температуры.

8. Во сколько раз изменится сопротивление германиевого образца, если его охладить от комнатной температуры 20°C до температуры жидкого азота (77 К). Ширину запрещенной зоны считать равной $0,72 \text{ эВ}$ независимо от температуры.

9. Пластину фосфида галлия охлаждают от комнатной температуры 22°C до температуры жидкого азота (77 К). Как и во сколько раз изменится проводимость? Ширину запрещенной зоны считать равной $2,27 \text{ эВ}$ независящей от температуры.

10. Пластина арсенида галлия p -типа находится при температуре 0°C . Во сколько раз возрастет концентрация дырок в валентной зоне при нагреве пластины на 10 градусов? Ширину запрещенной зоны арсенида галлия принять равной $1,43 \text{ эВ}$.

11. Как и во сколько раз изменится удельная проводимость германиевой пластины собственного типа проводимости, если ее поместить в термостат, температура которого возрастает от 0 до 70 градусов Цельсия. Ширину запрещенной зоны германия принять равной $0,72 \text{ эВ}$, не зависящей от температуры.

12. Температура чистого кремния 320 К . При нагревании удельная проводимость возросла вдвое. Ширина запрещенной зоны кремния при 320 К равна $1,1 \text{ эВ}$. Найти температуру кремниевого образца.

13. До какой температуры нужно нагреть образец из кремния, находящегося при температуре 0 градусов Цельсия, чтобы его проводимость возросла в 4 раза?

3.3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вопросы и задачи, содержащиеся в пособии, охватывают существенную часть курса физики твердого тела, входящего в спецкурсы физики: «физика конденсированного состояния» и «физические основы полупроводниковой электроники» и способствуют более глубокому усвоению теоретического материала данного раздела.

Выполнение расчетно-графической работы предполагает достаточно большой объем самостоятельной работы студента.

При выполнении расчетно-графической работы (РГР) по физике твердого тела необходимо оформить отчет в печатном виде на листах формата А4 следующего содержания.

1. Титульный лист – согласно правилам Горного университета.
2. Теоретические основы работы:
 - 2.1. Явление, изучаемое в РГР.
 - 2.2. Определение основных физических понятий, объектов, процессов и величин, касающихся данной работы.
3. Расчетная часть:
 - 3.1. Задание в соответствии с вариантом.
 - 3.2. Расчет с пояснениями.
 - 3.3. Графики.
4. Анализ результатов. Заключение.

Анализ и выводы по результатам работы должны отражать суть изучаемого физического явления.

3.4. ЗАДАНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Тема: расчет температурной зависимости концентрации носителей тока примесного полупроводника

Полупроводниковая пластина помещена в скрещенные электрическое и магнитное поля (рис.4.1).

l – длина проводника, d – толщина проводника, j – плотность тока через проводник, B – вектор магнитной индукции, U_n – холловская разность потенциалов.

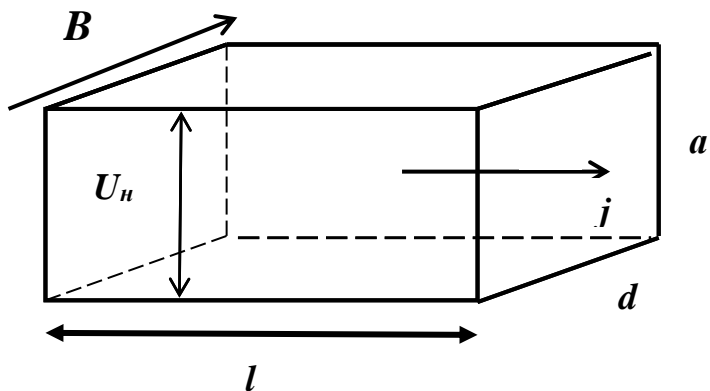


Рис. 3.1

Задача

Полупроводниковая пластина (образец кремния) с примесной проводимостью, имеющая размеры: a , d , l , помещена в магнитное поле с магнитной индукцией B . Через образец пропускается электрический ток силой I . Температура пластины 350 К. Определить неизвестные величины, указанные в таблице: силу тока I , плотность тока j , сопротивление образца R , удельное сопротивление ρ , удельную проводимость γ . Подвижность электронов принять равной $0,15 \text{ м}^2/\text{Вс}$, дырок – $0,05 \text{ м}^2/\text{Вс}$.

Рассчитайте концентрацию примесей при данной температуре.

Таблица 3.1

№ Вар.	Тип проводимости	a , мм	l , мм	d , мм	R , Ом	B мТл	I , А	j , $\text{А}\cdot\text{м}^{-2}$	γ , $\text{См}\cdot\text{м}^{-1}$	ρ , Ом·м
1	n	0,1	40	0,15	?	200	?	6,7	0,24	?
2	n	0,11	39	0,14	?	240	?	13	?	5
3	n	0,12	38	0,13	?	220	?	8	?	2,5

№ Вар.	Тип проводимости	a , мм	l , мм	d , мм	R , Ом	B мТл	I , А	j , А·м ⁻²	γ , См·м ⁻¹	ρ , Ом·м
4	n	0,13	37	0,12	?	250	?	8,3	?	10
5	n	0,14	36	0,11	?	260	?	9,1	0,11	?
6	n	0,15	35	0,1	?	270	0,15	?	0,22	?
7	p	0,16	34	0,1	?	280	0,16	?	0,2	5
8	p	0,17	33	0,08	?	290	0,17	?	0,3	?
9	p	0,18	32	0,09	?	300	0,1	?	0,32	?
10	p	0,19	31	0,07	?	310	0,11	?	0,33	3
11	p	0,2	30	0,06	?	320	?	10	0,4	?
12	p	0,21	29	0,05	?	33	?	12,4	?	10
13	p	0,22	28	0,04	?	340	?	15,9	0,11	?
14	p	0,23	27	0,03	?	350	?	21,7	0,22	?
15	n	0,24	26	0,02	?	360	?	33,3	0,2	5
16	n	0,25	25	0,01	?	370	0,17	?	0,3	?
17	n	0,26	24	0,2	?	380	0,18	?	0,32	?
18	n	0,27	23	0,21	?	390	0,19	?	?	2,5
19	n	0,28	22	0,22	?	400	0,2	?	0,1	10
20	n	0,29	21	0,23	?	290	0,21	?	?	?
21	n	0,3	20	0,1	?	300	?	7,3	?	?
22	p	0,31	19	0,11	?	310	?	6,74	?	5
23	p	0,32	18	0,12	?	320	?	2,7	?	?
24	p	0,33	17	0,13	?	33	?	2,56	?	?
25	p	0,34	16	0,14	?	340	?	2,5	0,33	3
26	p	0,35	15	0,15	?	350	0,13	?	0,1	10
27	p	0,36	14	0,1	?	360	0,14	?	0,2	5
28	p	0,37	13	0,15	?	370	0,15	?	0,4	2,5
29	p	0,38	12	0,16	?	380	0,16	?	0,1	10
30	n	0,4	11	0,17	?	290	0,17	?	?	?

Используя формулы для зависимостей концентрации носителей тока от температуры: (2.8), 2(13), и 2(14), рассчитайте кон-

центрации носителей тока в диапазоне температур 50-500 К.

Считать энергию активации донорной примеси равной $E_D = 0,45$ эВ. Энергию активации акцепторной принять равной $E_a = 0,166$ эВ. Температура истощения примеси $T_s = 50$ К. Температура перехода к собственной проводимости принять равной $T_i = 340$ К.

Постройте график зависимости концентрации от температуры в указанном диапазоне температур.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Трофимова, Т.И. Курс физики: учеб.пособие / Т.И. Трофимова. - М.: Высш. шк., 2001 и др. г. изд.
2. Епифанов, Г.И. Физические основы микроэлектроники: учеб.пособие / Г.И. Епифанов – М.: книга по требованию, 2012. – 190 с.7
3. Физика конденсированного состояния: учебно-методический комплекс. Санкт-Петербургский горный университет/ сост.: Ю.И. Кузьмин, Н.А. Тупицкая, А.Ю. Егорова.– СПб, 2017. — 158с.
4. Чуркин, Ю.В. Физика твердого тела: учеб.пособие/ Ю.В. Чуркин, С.В. Субботин. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008.
5. Шерстюк, А. И. Физика твердого тела: письм. лекции/ А. И. Шерстюк. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2003.
6. Физика конденсированного состояния. Учебно-методический комплекс. Санкт-Петербургский горный университет / сост.: Ю.И. Кузьмин, Н.А. Тупицкая, А.Ю. Егорова, СПб, 2017. — 191 с.

Дополнительная литература

7. Верещагин, Н.К. Физика твердого тела: учеб.пособие для втузов/ Н. К. Верещагин [и др.] – М.: Высшая школа, 2001.
8. Гуревич, А. Г. Физика твердого тела: учеб.пособие для вузов/ А. Г. Гуревич. – СПб.: Невский диалект. БХВ-Петербург, 2004.
9. Пщелко, Н.С. Физические основы полупроводниковой электроники, учеб.пособие / Н. С. Пщелко, А. С. Мустафаев, К. Л. Левин — [Электронный ресурс], контрольный номер

RU/IS/BASE/463508393 — СПб: Нац. минер-сырьевой ун-т «Горный», 201, с. 254.

10. Физика. Физика твердого тела: Методические указания к расчетно-графическим работам и варианты заданий/ Национальный минерально-сырьевой университет «Горный». Сост.: Ю.И. Кузьмин, Н.С. Пщелко. – СПб, 2015, с. 32.

11. Физика твердого тела: методические указания к выполнению контрольной работы, задания на контрольную работу/сост.: А. И. Шерстюк, Д. Г. Летенко. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2003.

12. Физика. Физика твердого тела: методические указания к выполнению лабораторных работ/ сост.: К.Ф. Комаровских [и др.] – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006.

13. Бонч-Бруевич, В.Л.. Физика полупроводников / В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Элементы зонной теории твёрдых тел.....	3
2. Основы физики полупроводников.....	8
2.1. Собственные полупроводники.....	8
2.2. Зонная структура собственных полупроводников.....	8
2.3. Примесные полупроводники.....	10
2.4. Положение уровня Ферми и концентрация собственных носителей тока в полупроводниках.....	13
2.5. Проводимость собственных и примесных полупроводников....	18
2.6. Эффект Холла.....	19
3. Задания для самостоятельной работы.....	21
3.1. Примеры решения задач.....	21
3.2. Задачи для самостоятельного решения.....	26
3.3. Методические указания для выполнения расчетно-графической работы.....	27
3.4. Задание для расчетно-графической работы.....	27
Библиографический список.....	30

