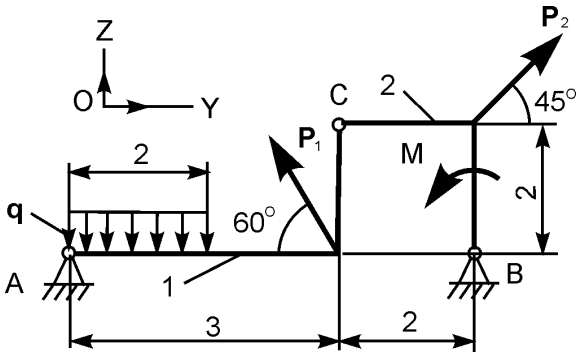
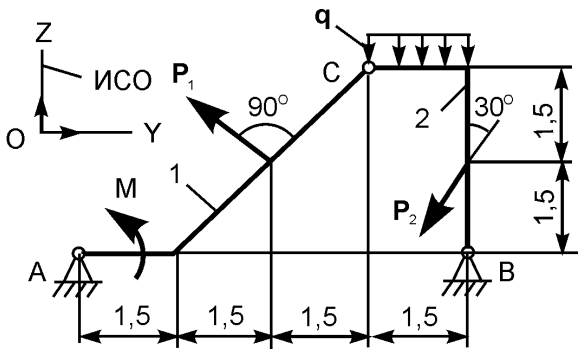
1.24. Варианты курсового задания С 3 «Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)»

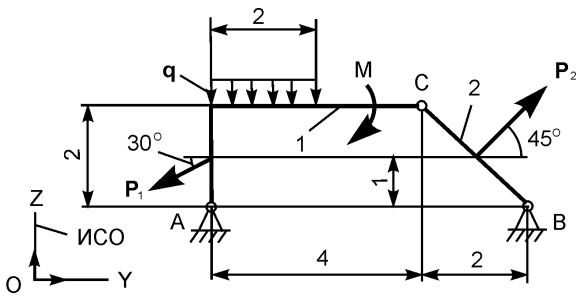
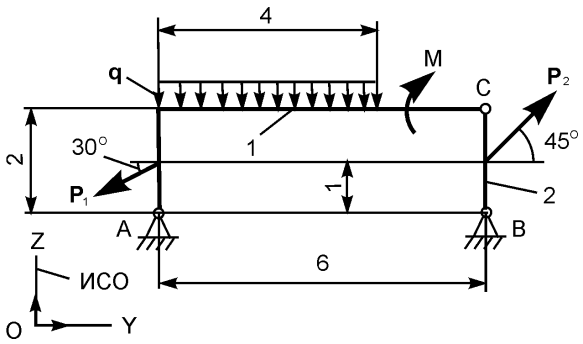
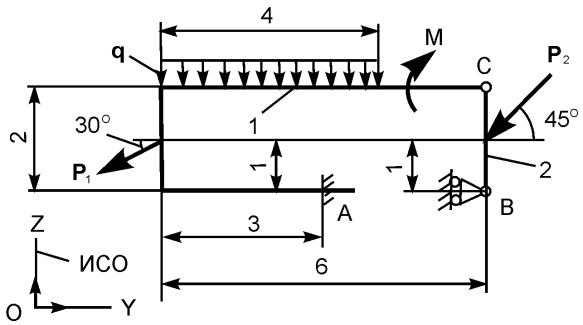
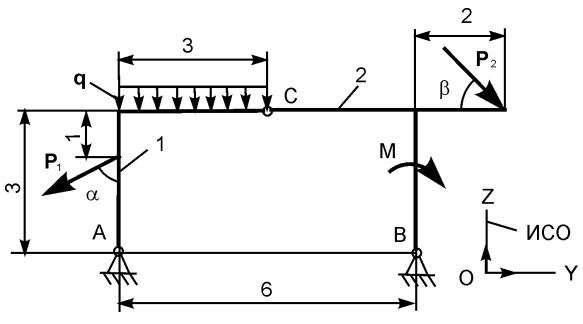
Методологию расчёта реакций внешних связей, наложенных на составную конструкцию, рассмотрим на примере выполнения курсового задания С 3, которое входит в контрольную работу обучающегося.

Конструкция состоит из двух тел. Определить реакции внешних связей, наложенных на составную конструкцию. Варианты расчётных схем конструкций и приложенные к ним нагрузки приведены в табл. 1.3.

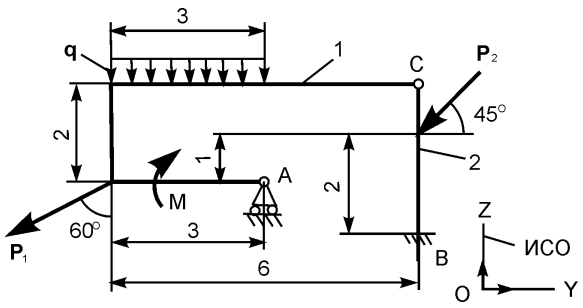
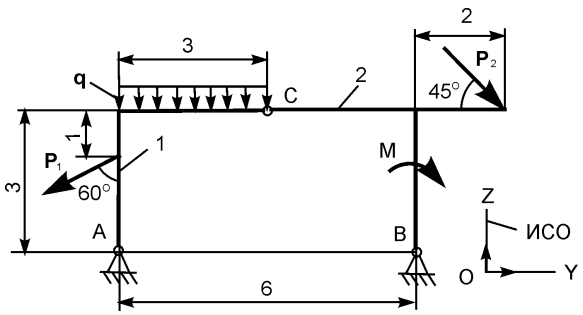
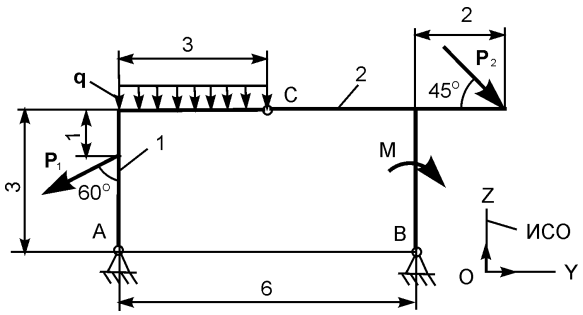
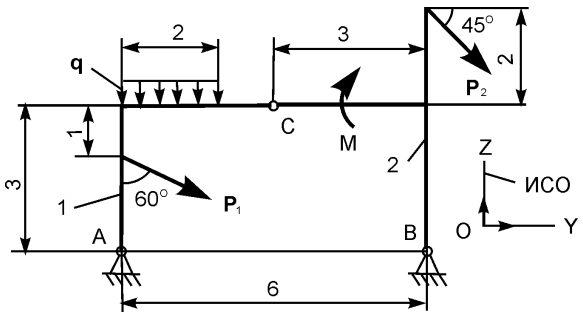
Таблица 1.3

Номер варианта	Расчётная схема	Исходные данные	Определяемые величины
1	2	3	4
1		P_1 = 10 кН; P_2 = 10 кН; M = 6 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?
2		P_1 = 6 кН; P_2 = 10 кН; M = 12 кН·м; q = 1 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
3		P_1 = 8 кН; P_2 = 10 кН; M = 3 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?
4		P_1 = 5 кН; P_2 = 12 кН; M = 4 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?
5		P_1 = 6 кН; P_2 = 8 кН; M = 3 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? M_A = ? R_B = ?
6		P_1 = 4 кН; P_2 = 6 кН; M = 10 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4
7		P_1 = 7 кН; P_2 = 8 кН; M = 15 кН·м; q = 2 кН/м	R_A = ? Z_B = ? Y_B = ? M_B = ?
8		P_1 = 8 кН; P_2 = 8 кН; M = 16 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?
9		P_1 = 10 кН; P_2 = 10 кН; M = 6 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?
10		P_1 = 10 кН; P_2 = 3 кН; M = 9 кН·м; q = 2 кН/м	Z_A = ? Y_A = ? Z_B = ? Y_B = ?

1.25. Пример выполнения курсового задания С 3

В качестве примера, иллюстрирующего порядок расчёта составной конструкции, рассматривается равновесие механической системы, состоящей из двух тел, соединенных между собой внутренним шарниром в точке D (рис. 1.62).

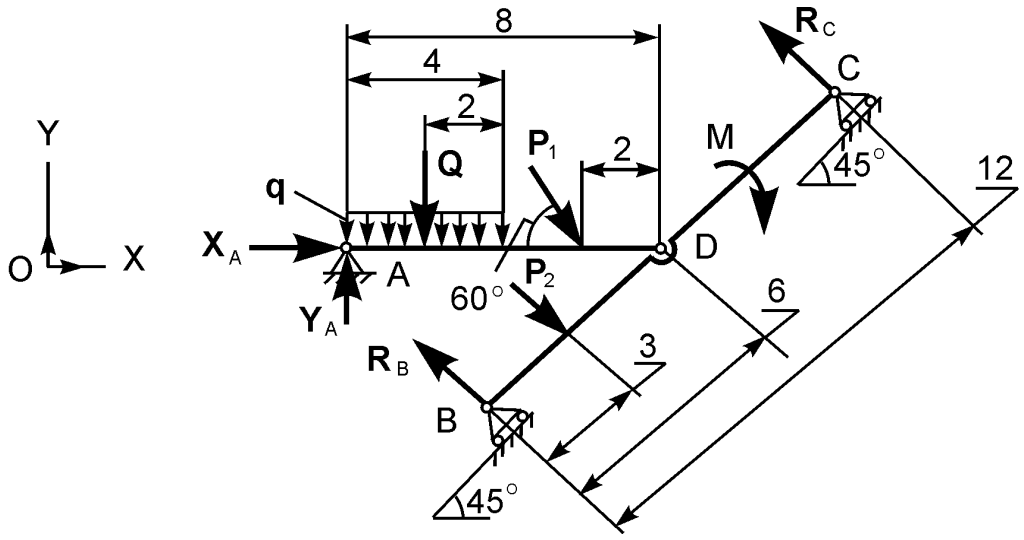


Рис. 1.62

Дано: $P_1 = 2$ кН; $P_2 = 4$ кН; $M = 6$ кН·м; $q = 2$ кН/м.

Определить реакции внешних связей в точках A, B, C.

Решение.

Распределённая нагрузка интенсивностью **q** заменяется сосредоточенной силой **Q**, модуль которой равен:

$$Q = q \cdot L = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}.$$

К механической системе, состоящей из тел 1 и 2, приложены активные силы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, **Q** и активная пара сил с алгебраическим моментом M, а также реакции $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_c$ внешних связей. Так как система сил, действующих на совокупность тел 1 и 2 плоская произвольная, то составляются три уравнения равновесия.

$$\Sigma F^E_{iOX} + \Sigma R^E_{iOX} = 0 =$$

$$= P_1 \cdot \cos(60^o) + P_2 \cdot \sin(45^o) + X_A - R_B \cdot \sin(45^o) - R_c \cdot \sin(45^o) = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F^E_{iOY} + \Sigma R^E_{iOY} = 0 =$$

$$= - Q - P_1 \cdot \sin(60^o) - P_2 \cdot \cos(45^o) + Y_A +$$

$$+ R_B \cdot \cos(45^o) + R_c \cdot \cos(45^o) = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma M_D(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_D(\mathbf{R}_i^E) = 0 =$$

$$= Q \cdot 6 + P_1 \cdot \sin(60^o) \cdot 2 + P_2 \cdot 3 - M - Y_A \cdot 8 - R_B \cdot 6 + R_C \cdot 6 = 0. \quad (3)$$

Так как имеются три уравнения равновесия, в которые входят четыре неизвестные реакции $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_C$, то такая система уравнений не решается. Поэтому конструкцию расчленяют по внутренней связи в точке D и рассматривают равновесие каждого тела в отдельности.

На рис. 1.63 изображено тело 1, которое находится в покое под действием активных сил **Q**, $\mathbf{P}_1$, реакций внешних связей $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$ и реакций внутренних связей $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$.

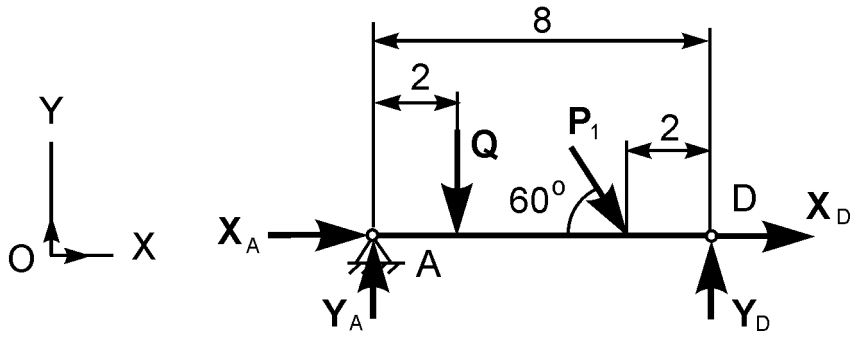


Рис. 1.63

Следует отметить, что для тела 1 силы **Q**, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$ являются внешними силами.

Система сил, действующая на тело 1, плоская произвольная, поэтому для неё составляется три уравнения равновесия.

$$\Sigma F^E_{iOX} + \Sigma R^E_{iOX} = 0 =$$

$$= 0 = P_1 \cdot \cos(60^o) + X_A + X_D = 0; \qquad (4)$$

$$\Sigma F^E_{iOY} + \Sigma R^E_{iOY} = 0 =$$

$$= - Q - P_1 \cdot \sin(60^o) + Y_A + Y_D = 0; \qquad (5)$$

$$\Sigma M_D(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_D(\mathbf{R}_i^E) = 0 =$$

$$= Q \cdot 6 + P_1 \cdot \sin(60^o) \cdot 2 - Y_A \cdot 8 = 0. \qquad (6)$$

На рис. 1.63 реакции $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$ внутренней связи показывают, как тело 2 действует на тело 1 в точке D.

Рассматривается равновесие тела 2, на которое действуют активная сила $\mathbf{P}_2$, активная пара сил с алгебраическим моментом M, реакции $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_C$ внешних связей в точках B и C и реакции $\mathbf{X}_D^I$, $\mathbf{Y}_D^I$ внутренней связи в точке D (рис. 1.64).

Реакции $\mathbf{X}_D^I$, $\mathbf{Y}_D^I$ показывают, как тело 1 действует на тело 2 в точке D. По аксиоме равенства действия и противодействия эти реакции направлены противоположно одноименным реакциям, показанным на рис. 1.63.

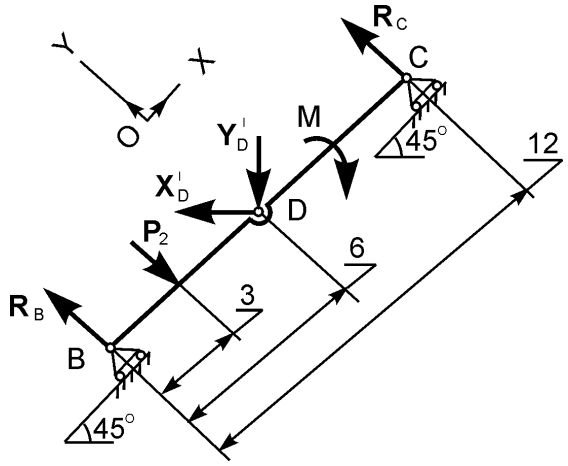


Рис. 1.64

$$\mathbf{X}_D = -\mathbf{X}_D^I;\ \mathbf{Y}_D = -\mathbf{Y}_D^I;\ X_D = X_D^I;\ Y_D = Y_D^I.$$

По отношению к телу 2 активные нагрузки **P**, M и реакции $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_C$, $\mathbf{X}_D^I$, $\mathbf{Y}_D^I$ являются внешними нагрузками.

Таким образом, на тело 2 действует плоская произвольная система сил, поэтому составляют три уравнения равновесия. С целью сокращения формы записи уравнений равновесия использована система отсчёта OXY, одна из осей которой направлена вдоль стержня BC.

$$\Sigma F_{iOX}^E + \Sigma R_{iOX}^E = 0 =$$
$$= -X_D^I\cdot\cos(45^o) - Y_D^I\cdot\cos(45^o) = 0; \qquad (7)$$
$$\Sigma F_{iOY}^E + \Sigma R_{iOY}^E = 0 =$$
$$= -P_2 + R_B + X_D^I\cdot\sin(45^o) - Y_D^I\cdot\sin(45^o) + R_c = 0; \qquad (8)$$
$$\Sigma M_D(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_D(\mathbf{R}_i^E) = 0 =$$
$$= P_2\cdot 3 - M - R_B\cdot 6 + R_C\cdot 6 = 0. \qquad (9)$$

Таким образом, по рис. 1.62, 1.63, 1.64 составлено девять уравнений равновесия, в которые вошли шесть неизвестных реакций. С целью сокращения времени расчёта целесообразно использовать уравнения равновесия, составленные для тел 1 и 2 механической системы.

Из уравнения (6) определяется проекция реакции $\mathbf{Y}_A$ на координатную ось OY:

$$Y_A = (Q\cdot 6 + P_1\cdot\sin(60^o)\cdot 2)/8 = (8\cdot 6 + 2\cdot 0{,}866\cdot 2)/8 = 6{,}433 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5) имеем

$$Y_D = -Y_A + Q + P_1\cdot\sin(60^o) = -6{,}433 + 8 + 2\cdot 0{,}866 = 3{,}299 \text{ кН}.$$

Из уравнения (7) определяется проекция реакции $\mathbf{X}_D$ внутренней связи в точке D на координатную ось OX:

$$X_D = X_D^I = -Y_D = -3{,}299 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4) определяется проекция реакции $\mathbf{X}_A$ на ось OX:

$$X_A = - P_1 \cdot \cos(60^o) - X_D = - 2 \cdot 0,5 - (-3,299) = 2,299 \text{ кН}.$$

С учётом выражения (7) уравнения (8) и (9) несложно преобразовать в систему уравнений (8^I), (9^I):

$$R_B - P_2 + 2 \cdot X_D \cdot \cos(45^o) + R_C = 0; \qquad (8^I)$$

$$- R_B + P_2 \cdot (3/6) - (M/6) + R_C = 0. \qquad (9^I)$$

Складывая левые и правые части этих уравнений, получим уравнение

$$- 0,5 \cdot P_2 - (M/6) + 2 \cdot X_D \cdot \cos(45^o) + 2 \cdot R_C = 0. \qquad (10)$$

Из уравнения (10) находим модуль реакции R_C:

$$R_C = (0,5 \cdot P_2 + (M/6) - 2 \cdot X_D \cdot \cos(45^o))/2 =$$
$$= (0,5 \cdot 4 + (6/6) - 2 \cdot (- 2,299) \cdot 0,707)/2 = 3,832 \text{ кН}.$$

Возвращаясь к уравнению (9^I), находим модуль реакции R_B:

$$R_B = P_2 \cdot (3/6) - (M/6) + R_C = 4 \cdot (3/6) - (6/6) + 3,832 = 4, 832 \text{ кН}.$$

Таким образом, при совместном решении уравнений (4) – (9) определяются реакции $\mathbf{X}_A$, $\mathbf{Y}_A$, $\mathbf{R}_B$, $\mathbf{R}_C$ внешних связей в точках A, B, C и реакции $\mathbf{X}_D$, $\mathbf{Y}_D$, $\mathbf{X}_D{}^I$, $\mathbf{Y}_D{}^I$ внутренней связи механической системы в точке D.

Для проверки полученных результатов расчётов используются уравнения (1), (2), (3):

$$\Sigma F^E_{iOX} + \Sigma R^E_{iOX} = 0 =$$
$$= P_1 \cdot \cos(60^o) + P_2 \cdot \sin(45^o) + X_A - R_B \cdot \sin(45^o) - R_c \cdot \sin(45^o) = 0 =$$
$$= 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,707 + 2,299 - 4,832 \cdot 0,707 - 3,832 \cdot 0,707 = 0; \qquad (1)$$

$$\Sigma F^E_{iOY} + \Sigma R^E_{iOY} = 0 =$$
$$= - Q - P_1 \cdot \sin(60^o) - P_2 \cdot \cos(45^o) + Y_A +$$
$$+ R_B \cdot \cos(45^o) + R_c \cdot \cos(45^o) = 0 =$$
$$= - 8 - 2 \cdot 0,866 - 4 \cdot 0,707 + 6,433 +$$
$$+ 4,832 \cdot 0,707 + 3,832 \cdot 0,707 = 0; \qquad (2)$$

$$\Sigma M_D(\mathbf{F}_i^E) + \Sigma M_D(\mathbf{R}_i^E) = 0 =$$
$$= Q \cdot 6 + P_1 \cdot \sin(60^o) \cdot 2 + P_2 \cdot 3 - M - Y_A \cdot 8 - R_B \cdot 6 + R_C \cdot 6 = 0 =$$
$$= 8 \cdot 6 + 2 \cdot 0,866 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 6 - 6,433 \cdot 8 - 4,832 \cdot 6 + 3,832 \cdot 6 = 0. \qquad (3)$$

Проверка показала, что расчёты проведены правильно.

Результаты проведенных расчётов помещают в таблицу.

Таблица

Проекции реакций внешних связей на координатные оси				Проекции реакции внутренней связи на координатные оси	
X_A, кН	Y_A, кН	R_B, кН	R_C, кН	X_D, кН	Y_D, кН
2,299	6,433	4,832	3,832	–3,299	3,299

Таким образом, если необходимо определить реакции внешних связей для составной конструкции, то следует расчленить конструкцию по внутренней связи и рассмотреть равновесие каждого тела.

Для решения некоторых задач на составную конструкцию может быть использована теорема о равновесии трёх непараллельных сил.

***Теорема**. Линии действия трёх непараллельных взаимно уравновешивающихся сил, лежащих в одной плоскости, пересекаются в одной точке.*

На рис. 1.65 изображена составная конструкция из двух тел, соединённых между собой внутренним шарниром в точке D.

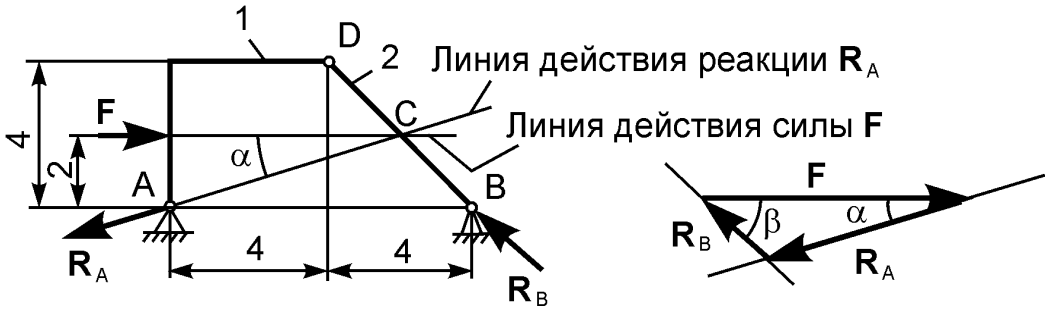


Рис. 1.65

Дано. На тело 1 действует активная сила **F**. Тело 2 загружено только по его концам B и D. Исходя из этого, тело 2 можно считать невесомым стержнем.

Определить реакции внешних связей.

Решение. На механическую систему, состоящую из двух тел, действуют три взаимно уравновешивающиеся внешние силы: активная сила **F** и реакции $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$ в шарнирно-неподвижных опорах A и B. Так как тело 2 является невесомым стержнем, то линия действия реакции $\mathbf{R}_B$ проходит по стержню 2. Линии действия силы **F** и реакции $\mathbf{R}_B$ пересекаются в точке C. Так как три силы **F**, $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ не параллельны и лежат в одной плоскости, то линия действия реакции $\mathbf{R}_A$ тоже должна проходить через точку C.

Система сил (**F**, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$) уравновешенная, поэтому силовой треугольник, построенный на этих силах, должен быть замкнут (см. рис. 1.65). Для определения величин реакций используется теорема синусов:

$$F/\sin(\alpha+\beta) = R_B/\sin(\alpha) = R_A/\sin(\beta).$$

Величина угла α находится из рис. 1.65 по формулам:

$$\mathrm{tg}(\alpha) = 2/6 = 0{,}333;\ \ \alpha = \mathrm{arctg}(0{,}333) = 18{,}434^{\circ}.$$

Величина угла $\beta = 45^o$. Это так же видно из рис. 1.65. Окончательно находим:

$$R_A = \frac{F \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot 0{,}704}{0{,}894} = 31{,}633 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{F \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{40 \cdot 0{,}316}{0{,}894} = 14{,}138 \text{ кН}.$$

Действительное направление реакций $\mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_B$ показано на силовом треугольнике.

Эту задачу можно решить и по изложенному ранее алгоритму. Однако такое решение требует больших расчётных работ.