

Тема: «Краевая задача (граничная задача)»

Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать краевую задачу для дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ на отрезке $[a, b]$ при заданных краевых условиях $y(x_0) = y_0$ и $y(x_k) = y_1$. методом стрельбы, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

В краевой задаче требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения с дополнительными условиями, заданными при нескольких различных значениях независимой переменной.

Примером краевой задачи является двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \quad (13)$$

с граничными условиями, заданными на концах отрезка $[x_0, x_k]$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y(x_k) &= y_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Следует найти такое решение $y(x)$ на этом отрезке, которое принимает на концах отрезка значения y_0, y_1 . Если функция $f(x, y, y')$ линейна по аргументам y, y' , то задача (13), (14) - линейная краевая задача, в противном случае – нелинейная.

Кроме граничных условий (14) называемых граничными условиями первого рода, используются еще условия на производные от решения на концах – граничные условия второго рода:

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= y_0 \\ y'(x_k) &= y_1 \end{aligned} \quad (15)$$

или линейная комбинация решений и производных - граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot y(x_0) + \beta_0 \cdot y'(x_0) &= \gamma_0 \\ \alpha_1 \cdot y(x_k) + \beta_1 \cdot y'(x_k) &= \gamma_1. \end{aligned} \quad (16)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ - такие числа, что $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$.

Можно на разных концах отрезка использовать условия различных типов.

Метод стрельбы

Суть метода заключена в многократном решении задачи Коши для приближенного нахождения решения краевой задачи.

Пусть надо решить краевую задачу (13), (14) на отрезке $[x_0, x_k]$. Вместо исходной задачи формулируется задача Коши с уравнением (13) и с начальными условиями

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_k) &= \theta \end{aligned} \quad (17)$$

где θ - некоторое значение тангенса угла наклона касательной к решению в точке $x = x_0$.

Положим сначала некоторое начальное значение параметру $\theta = \theta_0$, после чего решим каким либо методом задачу Коши (13), (17). Пусть $y = y_0(x, y_0, \theta_0)$ решение этой задачи на интервале $[x_0, x_k]$, тогда сравнивая значение функции $y_0(x_k, y_0, \theta_0)$ со значением y_1 в правом конце отрезка можно получить информацию для корректировки угла наклона касательной к решению в левом конце отрезка. Решая задачу для нового значения $\theta = \theta_1$, получим другое решение со значением $y_1(x_k, y_0, \theta_1)$ на правом конце. Таким образом, значение решения на правом конце $y(x_k, y_0, \theta)$ будет являться функцией одной переменной θ . Задачу можно сформулировать таким образом: требуется найти такое значение переменной θ^* , чтобы решение $y(x_k, y_0, \theta^*)$ в правом конце отрезка совпало со значением y_1 из (14). Другими словами решение исходной задачи эквивалентно нахождению корня уравнения

$$\Phi(\theta) = 0, \quad (18)$$

где $\Phi(\theta) = y(x_k, y_0, \theta) - y_1$.

Уравнение (18) является «алгоритмическим» уравнением, так как левая часть его задается с помощью алгоритма численного решения соответствующей задачи Коши. Но методы решения уравнения (18) аналогичны методам решения нелинейных

уравнений. Следует заметить, так как невозможно вычислить производную функции $\Phi(\theta)$, то вместо метода Ньютона следует использовать метод секущих, в котором производная от функции заменена ее разностным аналогом. Данный разностный аналог легко вычисляется по двум приближениям, например θ_j и θ_{j+1} . Следующее значение искомого корня определяется по соотношению

$$\theta_{j+2} = \theta_{j+1} - \frac{\theta_{j+1} - \theta_j}{\Phi(\theta_{j+1}) - \Phi(\theta_j)} \Phi(\theta_{j+1}). \quad (19)$$

Итерации по формуле (19) выполняются до удовлетворения заданной точности.

Итак, если дана краевая задача, например, в вышеприведенной формулировке, то в методе стрельбы она заменяется задачей Коши для того же уравнения (14) но с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = k = \operatorname{tg} \theta. \quad (20)$$

Здесь $y(x_0)$ – точка, которая является началом кривой решения $y(x)$ дифференциального уравнения, θ – угол наклона касательной к этой кривой в начальной точке.

Считая решение задачи Коши зависящим от начального условия $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \operatorname{tg} \theta$, будем подбирать такое значение θ , при котором кривая решения $y(x)$ в точке x даст совпадающий с (13) результат $y(x_k) = B$. Если это условие будет выполнено, то решение задачи Коши совпадет с решением краевой задачи.

Применительно к описанному подходу название "метод стрельбы" вполне оправдано, поскольку в нем производится как бы "пристрелка" по углу наклона кривой $y(x)$ в начальной точке.

Чтобы сократить количество попыток при поиске решения $y(x)$, применяют различные стратегии подбора параметра θ . Например, при использовании метода половинного деления действуют следующим образом. Вначале выполняют два пробных расчета при значениях параметра θ равных θ_1 и θ_2 . Эти значения выбирают таким образом, чтобы при $\theta = \theta_1$ решение давало в точке $x = x_k$ "перелет", то есть $y(x_k) > y_1$, а при $\theta = \theta_2$ – "недолет", то есть $y(x_k) < y_1$.

Далее, используя в начальном условии (20) значение $\theta_3 = (\theta_1 + \theta_2)/2$, вновь численно решают задачу Коши. Из трех полученных решений отбрасывают то, которое дает в точке $x = x_k$ наибольшее отклонение от y_1 . Затем от двух оставшихся значений параметра θ находят среднее θ_4 и вновь выполняют с этим значением расчет.

Повторение описанного процесса прекращают, когда разность двух последовательно найденных значений θ станет меньше некоторого заданного малого числа или достаточно малым будет отклонение $y(x_k)$ от y_1 . Подобный алгоритм может быть построен и с использованием метода Ньютона.

Пример 5. Методом стрельбы на отрезке $[0,1]$ с точностью $eps = 0,0001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = e^x + \sin(y), \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

Построить график решения.

Результаты решения в математическом пакете MATHCAD представлены на рис. 15-18.

```

x0 и xk - начальное и конечное значение отрезка интегрирования
a - значение y в точке x0
bk - значение y в точке xk
b1 и b2 - два пристрелочных значений
n - число точек интегрирования
eps - погрешность вычислений
f(x,y) - вектор_определяющий_правую_часть_уравнения

```

$$\begin{array}{l}
 x0 := 0 \quad xk := 1 \quad eps := 0.0001 \quad n := 10 \quad f(x,y) := \begin{pmatrix} y1 \\ e^x + \sin(y0) \end{pmatrix} \\
 a := 1 \quad bk := 2 \quad b1 := 1 \quad b2 := 0.8
 \end{array}$$

Рис. 15. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (задание исходных данных)

```

RK(x0, zk, n, a, b1) :=
  x0 ← x0
  a ← a
  b1 ← b1
  y0 ←  $\begin{pmatrix} a \\ b1 \end{pmatrix}$ 
  h ←  $\frac{zk - x0}{n}$ 
  for i ∈ 0..n - 1
    | xi+1 ← xi + h
    | k1i ← h · f(xi, yi)
    | k2i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k1_i}{2}$ )
    | k3i ← h · f(xi +  $\frac{h}{2}$ , yi +  $\frac{k2_i}{2}$ )
    | k4i ← h · f(xi + h, yi + k3i)
    | yi+1 ← yi +  $\frac{1}{6} \cdot (k1_i + 2 \cdot k2_i + 2 \cdot k3_i + k4_i)$ 
  Y<0> ← x
  Y<1> ← y
  Y

```

Рис. 16. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (функция, возвращающая решение исходного уравнения методом Рунге-Кутты)

```

Firing(x0, zk, n, b1, b2) :=
  θ ←  $\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$ 
  F ←  $\begin{bmatrix} (RK(x0, zk, n, a, b1)_n, 1)_0 \\ (RK(x0, zk, n, a, b2)_n, 1)_0 \end{bmatrix}$ 
  for m ∈ 0..10
    | θm+2 ← θm+1 -  $\frac{\theta_{m+1} - \theta_m}{F_{m+1} - F_m} \cdot (F_{m+1} - bk)$ 
    | break if |Fm+1 - bk| < eps
    | otherwise
    | Fm+2 ← (RK(x0, zk, n, a, θm+2)n, 1)0
    | for j ∈ 0..n
    | | xj ← RK(x0, zk, n, a, θm+2)j, 0
    | | yj ← (RK(x0, zk, n, a, θm+2)j, 1)0
  Y1<0> ← x
  Y1<1> ← y
  Y1

```

Рис. 17. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (функция, возвращающая решение краевой задачи)

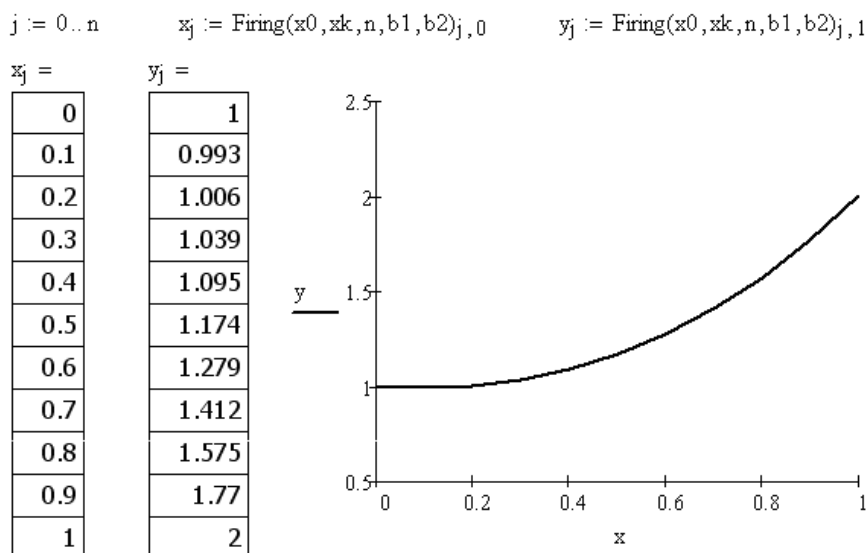


Рис. 18. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 5 методом стрельбы (числовое и графическое решение краевой задачи)

Задание 6. Методом стрельбы на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0,001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) + x^{2 \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)} \cdot y'(x) + \sin(y(x)) \cdot y(x) = \lg\left(\frac{x-1}{x+3}\right),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = -1, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 10.$$

Вариант 3.

$$y''(x) + \sqrt{x^4 + 2 \cdot x + 1} \cdot y(x) = \sin^2(2 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = -1, \quad y(x_k) = -3, \quad y''(x_0) = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.$$

Вариант 4.

$$y''(x) + 2 \cdot x \cdot \sin(y(x)) \cdot y'(x) + \ln(x+1) \cdot y(x) = x^3 \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 2,5, \quad y(x_k) = 1,5, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 2.$$

Вариант 5.

$$y''(x) + \frac{6 \cdot x}{\sin(x)} \cdot y'(x) + \operatorname{tg}(x) \cdot y(x) = x \cdot \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.$$

Вариант 6.

$$y''(x) + \operatorname{Arsh}(x) \cdot y'(x) + 3 \cdot x^2 \cdot y(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin(5 \cdot y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -3, \quad x_k = 4.$$

Вариант 7.

$$y''(x) + e^x \cdot \cos(y(x)) \cdot y'(x) + [\lg(x+6) + \sin(y(x))] \cdot y(x) = x^2 + \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0,5, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 3.$$

Вариант 8.

$$y''(x) + \operatorname{ch}(x) \cdot y'(x) + [\ln(|\sin(x+2)|) + \sin(y(x))] \cdot y(x) = x^2 \cos(y(x)),$$

$$y(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = -4, \quad x_k = 0.$$

Вариант 9.

$$y''(x) + \left[\frac{2}{x} + y(x) \right] \cdot y'(x) + \sin(x) \cdot y^2(x) = \sqrt{x^2 + 4} + y(x),$$

$$y(x_0) = 4, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 6.$$

Вариант 10.

$$y''(x) + x^4 \cdot y'(x) + 2 \cdot x^3 \cdot \sin(y(x) + 1) \cdot y(x) = e^{x \cdot \cos(y(x))},$$

$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3.$$

Вариант 11.

$$y''(x) + [6 \cdot x^3 + \cos(y(x))] \cdot y'(x) + \operatorname{cth}\left(\frac{1}{x+1}\right) \cdot y(x) =$$

$$= \ln(x-2) + \sin(y(x)),$$

$$y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 4, \quad x_0 = 15, \quad x_k = 2,5.$$

Вариант 12.

$$y''(x) + \cos\left(y(x) + \frac{4}{x+1}\right) y'(x) + e^{\cos(y(x))} \cdot y(x) = \frac{x^2}{x+1} + \sin^2(y(x)),$$

$$y(x_0) = 8, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 0, \quad x_k = 8.$$

Вариант 13.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + x \cdot \cos(x + y(x)) \cdot y'(x) + e^{\sin(4 \cdot x + y(x))} \cdot y(x) = \\
& = \sqrt{x^3 + 2 \cdot x^2 + 1} + \sin^2(y(x)), \\
& y(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 3.
\end{aligned}$$

Вариант 14.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + [4 \cdot x + \cos^3(y(x))] \cdot y'(x) + [1 + \sqrt{|\sin(x + y(x)) + 3|}] \cdot y(x) = \\
& = \frac{1}{x + 5} \cdot \sin(y(x)), \\
& y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = -2, \quad x_k = 2.
\end{aligned}$$

Вариант 15.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + \ln(x + 2) \cdot y'(x) + x^2 \cdot \cos(y(x) + 2) \cdot y(x) = \\
& = \sqrt[3]{x^2 + 2} + \sin^3(y(x)), \\
& y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 2, \quad x_0 = 8, \quad x_k = 10.
\end{aligned}$$

Вариант 16.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + [3 \cdot x + \sin(y(x))] \cdot y'(x) + x^3 \cdot \lg(3 \cdot x) \cdot y(x) = \\
& = 3 \cdot e^{3 \cdot x} + \cos(3 \cdot y(x)), \\
& y(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 6, \quad x_0 = 0,5, \quad x_k = 3,5.
\end{aligned}$$

Вариант 17.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + \frac{x + 1}{y(x) + 3} \cdot y'(x) + [\operatorname{tg}(x) + \cos(y(x))] \cdot y(x) = \\
& = e^x + \cos^3[y(x) + 1], \\
& y(x_0) = 3, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = -1,5, \quad x_k = 1,5.
\end{aligned}$$

Вариант 18.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + y'(x) + [\cos(y(x) + \cos(x))] \cdot y(x) = x^2 \cdot e^x + \sin(2 \cdot y(x)), \\
& y(x_0) = -20, \quad y(x_k) = 200, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 4.
\end{aligned}$$

Вариант 19.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + \sqrt{x^2 + 4 \cdot x + 7} \sin[4 \cdot y(x)] \cdot y'(x) + \left[e^{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos[y(x)] \right] \cdot y(x) = \\
& = \frac{x^2 + 1}{y(x) - 3}, \\
& y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 4, \quad x_k = 8.
\end{aligned}$$

Вариант 20.

$$\begin{aligned}
& y''(x) + \frac{\lg(x)}{y(x) + 1} \cdot y'(x) + x^3 \cdot \cos[y(x)] \cdot y(x) = x^{\sin[x + y(x)]}, \\
& y(x_0) = 0, \quad y(x_k) = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_k = 5.
\end{aligned}$$