,ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

Тема: Нелинейные уравнения и системы уравнений в Mathcad

Функция поиска корней polyroots

Для поиска корней обычного полинома *p(x)* степени *n* MathCAD содержит очень удобную функцию **polyroots(V)**

Многие уравнения, например трансцендентные, и системы из них не имеют аналитических решений. Однако они могут решаться численными методами с заданной погрешностью (не более значения, заданного системной переменной (TOL). Для простейших уравнений вида F(x)=0 решение находится с помощью функции **Root(Выражение, Имя_переменной).** Эта функция возвращает значение переменной с указанным уровнем точности, при котором выражение дает 0.

При решении систем нелинейных уравнений используется специальный вычислительный блок, открываемый служебным словом — директивой **Given** — и имеющий следующую структуру:

Given

Уравнения

Ограничительные условия

Выражения с функциями **Find и Minerr**

В блоке используется одна из следующих двух функций:

Find(vl, v2, ..., vn) — возвращает значение одной или ряда переменных для точного решения;

Minerr(vl, v2, ..., vn) — возвращает значение одной или ряда переменных для приближенного решения.

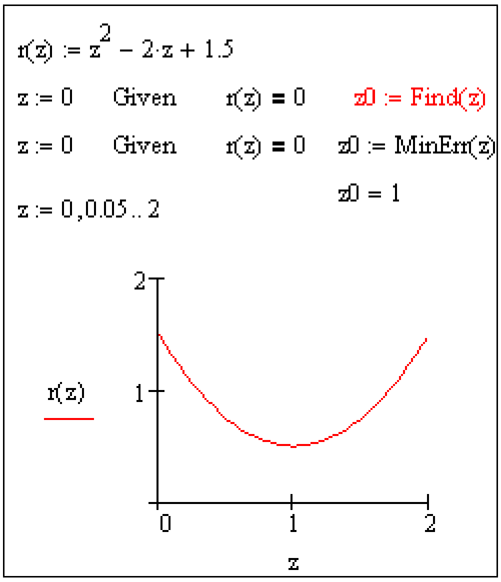


Рис.1

Между этими функциями существуют принципиальные различия. Первая функция используется, когда решение реально существует (хотя и не является аналитическим). Вторая функция пытается найти максимальное приближение даже к несуществующему решению путем минимизации среднеквадратичной погрешности решения.

При использовании функции **Minerr** для решения систем нелинейных уравнений надо проявлять известную осторожность и обязательно предусматривать проверку решений. Нередки случаи, когда решения могут оказаться ошибочными, чаще всего из-за того, что из нескольких корней система предлагает нереальный (или не представляющий интереса) корень. Полезно как можно точнее указывать начальные приближения к решению.

Пример №1

Найти корни алгебраического уравнения $f(x)=0$, где $f(x)=1{,}01x^3-2{,}003x^2-112{,}09x+76{,}03$

Способ №1

$$k := \begin{pmatrix} 76.03 \\ -112.09 \\ -2.003 \\ 1.01 \end{pmatrix} \qquad x1 := \mathrm{polyroots}(k) \qquad x1 = \begin{pmatrix} -9.942 \\ 0.673 \\ 11.252 \end{pmatrix}$$

Способ №2

$$y(x) := \sum_{i=0}^{3} \left(x^i \cdot k_i\right) \qquad y(x) \rightarrow \frac{7603}{100} - \frac{11209}{100}\cdot x - \frac{2003}{1000}\cdot x^2 + \frac{101}{100}\cdot x^3$$

$x := -10 \qquad \mathrm{root}(y(x), x) = -9.942$

$x := 1 \qquad \mathrm{root}(y(x), x) = 0.673$

$x := 10 \qquad \mathrm{root}(y(x), x) = 11.252$

Способ №3

Given $\quad x := -10 \qquad y(x) = 0$

$x := \mathrm{Find}(x) \qquad x = -9.942$

Given $\quad x := 1 \qquad y(x) = 0$

$x := \mathrm{Find}(x) \qquad x = 0.673$

Given $\quad x := 10 \qquad y(x) = 0$

$x := \mathrm{Find}(x) \qquad x = 11.252$

Рис.2

Пример №2

Найти корни трансцендентного уравнения $f(x) = 0$, где $f(x) = 2arctgx - x + 3$

$y(x) := 2 \cdot \text{atan}(x) - x + 3$

$x := 1$

$\text{root}(y(x), x) = 5.8$

$x := 1$

Given $\quad 2 \cdot \text{atan}(x) - x + 3 = 0$

$x := \text{Find}(x) \qquad x = 5.8$

$x := -10 .. 10$

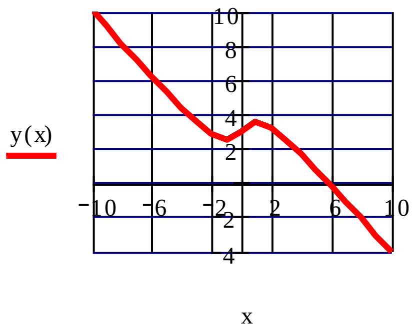


Рис.3

Пример №3

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ 3x-4y=1 \end{cases}.$

Первый способ (с помощью ключевого слова **solve** на панели **Символьная**)

$x := x$ $y := y$

$3x - 4\cdot y = 1$ $x^2 + y^2 = 8$

$3x - 4\cdot y = 1 \text{ solve}, y \rightarrow \frac{3\cdot x}{4} - \frac{1}{4}$

$x^2 + y^2 = 8 \text{ solve}, y \rightarrow \begin{pmatrix} -\sqrt{x^2-8}\cdot i \\ \sqrt{x^2-8}\cdot i \end{pmatrix}$

$x1 := \frac{3\cdot x}{4} - \frac{1}{4} = -\sqrt{x^2-8}\cdot i \text{ solve}, x \rightarrow \frac{3}{25} - \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25}$

$y1 := \frac{3\cdot x1}{4} - \frac{1}{4} \rightarrow -\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25}$

$x2 := \frac{3\cdot x}{4} - \frac{1}{4} = \sqrt{x^2-8}\cdot i \text{ solve}, x \rightarrow \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25} + \frac{3}{25}$

$y2 := \frac{3\cdot x2}{4} - \frac{1}{4} \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25}$

Второй способ (с помощью блока решений Given-Find)

Given $x^2 + y^2 = 8$ $3x - 4\cdot y = 1$

$\text{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25} + \frac{3}{25} & \frac{3}{25} - \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25} \\ \frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25} & -\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25} \end{pmatrix}$

Ïðîâåðêà

$\left(\frac{4\cdot\sqrt{199}}{25} + \frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25}\right)^2 = 8$ $3\cdot\left(\frac{3}{25} - \frac{4\cdot\sqrt{199}}{25}\right) - 4\cdot\left(-\frac{3\cdot\sqrt{199}}{25} - \frac{4}{25}\right) = 1$

Пример4 При каких $a \in R$ система $\begin{cases} a^3x+2ay=3 \\ 4x+ay=4a \end{cases}$ имеет единственное решение ? Найдите это решение.

Находим точки $a \in R$ при которых определитель равен 0.

$\Delta := \begin{pmatrix} a^3 & 2\cdot a \\ 4 & a \end{pmatrix}$ $|\Delta| \rightarrow a^4 - 8\cdot a$ $a^4 - 8\cdot a \text{ solve}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1-\sqrt{3}\cdot i \\ -1+\sqrt{3}\cdot i \end{pmatrix}$

Установили: при $a = 0$ и при $a = 2$ система не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений.
Ищем решение системы с помощью блока решений Given-Find.

Given $\quad a^3 \cdot x + 2 \cdot a \cdot y = 3 \quad\quad 4 \cdot x + a \cdot y = 4 \cdot a$

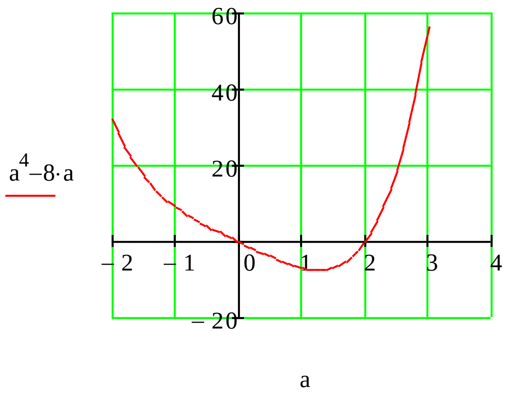
$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-[(-3) + 8 \cdot a]}{a^3 - 8} \\ 4 \cdot \dfrac{a^4 - 3}{a \cdot \left(a^3 - 8\right)} \end{bmatrix}$$

$$x := \frac{-[(-3) + 8 \cdot a]}{a^3 - 8}$$

$$y := 4 \cdot \frac{a^4 - 3}{a \cdot \left(a^3 - 8\right)}$$

$a^3 \cdot x + 2 \cdot a \cdot y - 3 \text{ simplify } \rightarrow 0 \quad\quad 4 \cdot x + a \cdot y - 4 \cdot a \text{ simplify } \rightarrow 0$

$a := -2, -1.9 .. 3$



Установили решение системы:

$$x = -\frac{8a - 3}{a^3 - 3}$$

$$y = -\frac{4a^4 - 12}{8a - a^4}$$

Варианты заданий

Задание 1

Найти корни алгебраического уравнения $f(x)=0$

№ варианта	$f(x)$
1	$1{,}001x^3+14{,}999x^2-16{,}899x-231{,}08$
2	$1{,}129x^3-3{,}087x^2+2{,}543x+1{,}005$
3	$2{,}078x^3+5{,}002x^2-10{,}21x-10{,}65$
4	$0{,}543x^4-40{,}89x^2-10{,}21x-128{,}76$
5	$0{,}754x^3+12{,}432x^2-10{,}21x-43{,}765$
6	$2{,}045x^3+5{,}11x^2-0{,}999x+7{,}15$
7	$3{,}987x^2+12{,}321x-34{,}0231$
8	$-0.997x^3+15{,}12x^2-17{,}54x+6{,}32$
9	$0{,}95x^2+1{,}123x-5{,}764$
10	$0{,}112x^4-3{,}987x^3-0{,}12x+15{,}33$
11	$4{,}201x^3-45{,}004x^2+298{,}02$
12	$-1{,}007x^2+12{,}001x-22{,}999$
13	$0{,}99x^2-2{,}002x-23{,}007$
14	$0{,}99x^3-1{,}989x^2-669{,}98$
15	$1{,}01x^3-2{,}003x^2-112{,}09x+76{,}03$

Задание 2

Найти корни трансцендентного уравнения $f(x)=0$.

№ варианта	$f(x)$
1	$2x^2-3\ln\lvert x+0.1\rvert-6$
2	$2\sin(x)-x^2+10$
3	$e^{0,3x}+x^2-7x$
4	$\cos\left(\frac{x}{5}\right)-\ln\lvert x-0,1\rvert+1$
5	$\sin(2x)-e^{-0,7x}+20$
6	$arctgx+\frac{1}{3x^3}$
7	$x\lg(x+1)-1$
8	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0,5x$
9	$e^{-2x}-2x+1$
10	$arctg(x-1)+2x$
11	$\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}$
12	$3x+\cos x+1$
13	$x-\sqrt{\lg(x+2)}$
14	$x^2-\ln(x+1)$
15	$2arctgx-x+3$

Задание 3.

Решить систему уравнений

Номер варианта	Система уравнений	Номер варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=2y \end{cases}$	7	$\begin{cases} x^2+xy+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x+y+2xy=7 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x^2-25y+28y^2=0 \\ y^2+xy=-3 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ xy=1 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 3x^2-2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+3y=17 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=2 \\ 3x^2+y^2=4 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy=12 \\ 2(x+y)^2-y^2=4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x^2+xy=3 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$	11	$\begin{cases} \lvert x^2-4y+3\rvert+y=1 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x^2y+y^2x=30 \\ x+xy-y=13 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \lvert x^2-12y+1\rvert+2y=-3 \\ x+2y=1 \end{cases}$

Задание 4.

При каких $a \in R$ система имеет единственное решение? Найти это решение.

Номер варианта	Система уравнений	Номер варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} a^3x + 2ay = 3 \\ 4x + ax = 4a \end{cases}$	7	$\begin{cases} (a^2-4)x + (a+2)y = 1 \\ (4-2a)x + a^2y = 2a \end{cases}$
2	$\begin{cases} a^2x + 3ay = 2 \\ 9x + ay = 4 + a \end{cases}$	8	$\begin{cases} (a^2-4)x - 9y = 1 \\ 5x + a^2y = 2a^2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} a^2x - 2y = 3 + a \\ 4ax + a^2y = 2 \end{cases}$	9	$\begin{cases} (a^2-6)x - 3y = 2a \\ 9x - a^2y = 4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} (a^2-1)x + 2y = 3a \\ 4x + (a^2+1)y = 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} a^2x + y = 2a^2 + 1 \\ -6x + (5-a^2)y = 4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} (a^2-4)x - 7y = 3 \\ x + (a^2+4)y = 2a \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x - (5-a)^2y = 2 \\ a^2x + 3y = 4 + a \end{cases}$
6	$\begin{cases} ax + y = 3a + 1 \\ ax + (a^3-6)y = 2a \end{cases}$	12	$\begin{cases} 8x + (a^2+1)y = 2 \\ (a^2-1)x + y = 4a^2 \end{cases}$