

Задача 5.6. Построить кривые второго порядка по заданным уравнениям. Для окружности указать центр и радиус; для эллипса и гиперболы – фокусы; для параболы – фокус и директрису.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1) а) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $-\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$;

г) $y^2 = 9x$;

2) а) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{64} = 1$;

г) $x^2 = -5y$;

3) а) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $-\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$;

г) $x^2 = -15y$;

4) а) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{36} = 1$;

г) $y^2 = 8x$;

5) а) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 49$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$;

г) $x^2 = -9y$;

6) а) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 36$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$;

г) $x^2 = 10y$;

7) а) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$;

г) $y^2 = -5x$;

$$8) \text{ a) } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 18; \text{ б) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1; \text{ в) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1;$$

$$\text{г) } x^2 = -7y;$$

$$9) \text{ a) } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 11; \text{ б) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1; \text{ в) } \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1;$$

$$\text{г) } y^2 = -8x;$$

$$10) \text{ a) } (x+1)^2 + (y+4)^2 = 17; \text{ б) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1; \text{ в) } -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1;$$

$$\text{г) } x^2 = 9y;$$

$$11) \text{ a) } (x+2)^2 + (y+4)^2 = 12; \text{ б) } \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1; \text{ в) } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1;$$

$$\text{г) } x^2 = -10y;$$

$$12) \text{ a) } (x+4)^2 + (y-3)^2 = 20; \text{ б) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \text{ в) } -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$\text{г) } x^2 = 15y;$$

$$13) \text{ a) } (x-3)^2 + (y+4)^2 = 14; \text{ б) } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1; \text{ в) } \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1;$$

$$\text{г) } y^2 = 7x;$$

$$14) \text{ a) } (x-1)^2 + (y-5)^2 = 22; \text{ б) } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1; \text{ в) } -\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$\text{г) } x^2 = -8y;$$

$$15) \text{ a) } (x+1)^2 + (y+1)^2 = 8; \text{ б) } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1; \text{ в) } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1;$$

$$\text{г) } y^2 = 15x;$$

$$16) \text{ a) } (x-2)^2 + (y+4)^2 = 19; \text{ б) } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1; \text{ в) } -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$\text{г) } x^2 = 5y;$$

$$17) \text{ a) } (x+1)^2 + (y+2)^2 = 6; \text{ б) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1; \text{ в) } \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1;$$

$$\text{г) } x^2 = 8y;$$

$$18) \text{ a) } (x+1)^2 + (y+5)^2 = 26; \text{ б) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1; \text{ в) } -\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$\text{г) } y^2 = 5x;$$

19) a) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 23$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$;

г) $y^2 = 12x$;

20) a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

г) $y^2 = -9x$;

21) a) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 29$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$;

г) $x^2 = 7y$;

22) a) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 15$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$;

г) $y^2 = -7x$;

23) a) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 28$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$;

г) $y^2 = 10x$;

24) a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 24$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$;

г) $y^2 = -15x$;

25) a) $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 13$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$; в) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$;

г) $x^2 = -12y$;

26) a) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 31$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

г) $x^2 = 11y$;

27) a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 21$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$; в) $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

г) $y^2 = -10x$;

28) a) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 27$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$;

г) $y^2 = 11x$;

29) a) $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 7$; б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$; в) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

г) $x^2 = 3y$;

30) а) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 30$; б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$;
 г) $y^2 = -13x$.

Пример 5.6

Построить кривые второго порядка по заданным уравнениям. Для окружности указать центр и радиус; для эллипса и гиперболы – фокусы; для параболы – фокус и директрису.

а) $(x-1,5)^2 + (y+2)^2 = 7$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$;
 г) $x^2 = 12y$.

Решение

а) $(x-1,5)^2 + (y+2)^2 = 7$ – окружность с центром в точке $C(1,5; -2)$ и радиусом $R = \sqrt{7}$ (рис. 16).

б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ – эллипс (рис. 17), $a = 2$ – малая полуось; $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ – большая полуось. Учитывая, что большая полуось расположена по оси Oy , фокусы будут иметь следующие координаты

$$F_1(0; -c); \quad F_2(0; c),$$

где $c^2 = b^2 - a^2$.

Найдем координаты фокусов

$$c^2 = 8 - 4 \Rightarrow c = 2,$$

тогда

$$F_1(0; -2); \quad F_2(0; 2).$$

в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = 1$ – гипербола (рис. 18), $a = 3$ – действительная полуось; $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ – мнимая полуось. Учитывая, что действительная полуось расположена по оси Ox , фокусы будут иметь следующие координаты

$$F_1(-c; 0); \quad F_2(c; 0),$$

где $c^2 = b^2 + a^2$.

Найдем координаты фокусов

$$c^2 = 12 + 9 \Rightarrow c = \sqrt{21},$$

тогда

$$F_1(-\sqrt{21}; 0); \quad F_2(\sqrt{21}; 0).$$

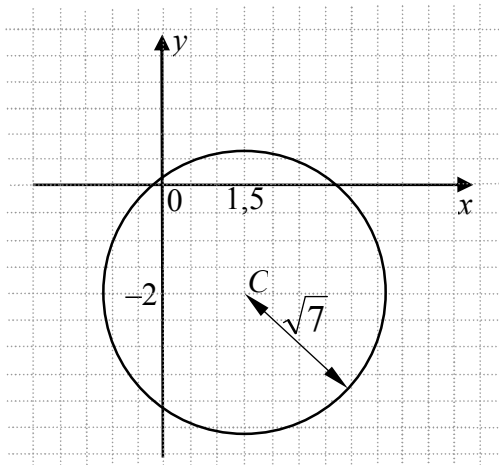


Рис. 16

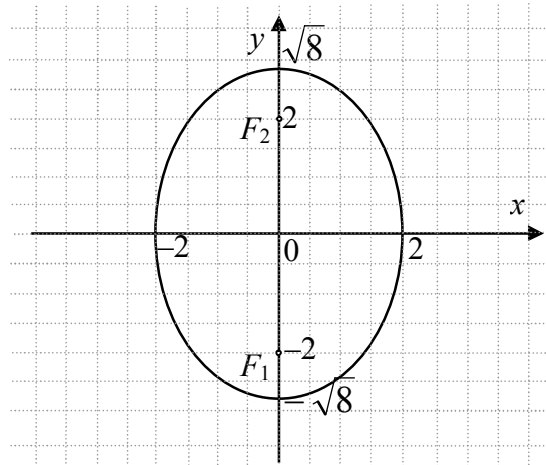


Рис. 17

г) $x^2 = 12y$ – парабола с вершиной в точке $O(0; 0)$, Oy – ось симметрии; $p = 6$ – параметр параболы (рис. 19). Ветви параболы направлены вверх, т.к. $p > 0$.

Найдем координаты фокуса и уравнение директрисы параболы

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F(0; 3);$$

$$d: y = -\frac{p}{2} \Rightarrow d: y = -3.$$

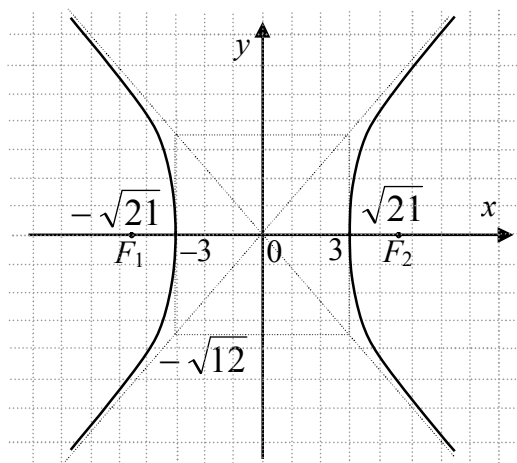


Рис. 18

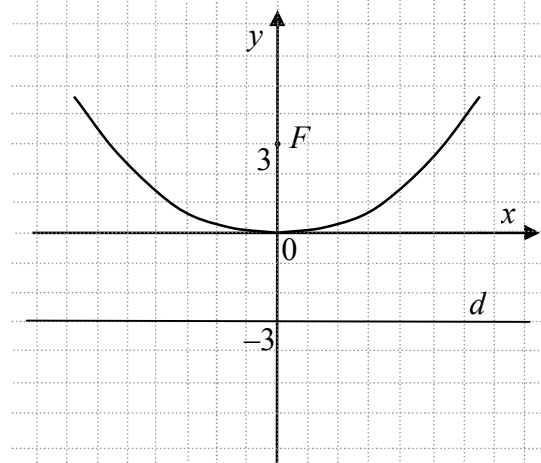


Рис. 19

Задача 5.7. С помощью выделения полного квадрата и переноса начала координат упростить уравнение линии и определить ее тип. Сделать рисунок.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

- 1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$; 3) $6x^2 - y^2 - 36x + 12y - 48 = 0$;
 2) $5x^2 + 2y^2 + 10x - 8y - 17 = 0$; 4) $y^2 - 8y + 2x + 18 = 0$;

- 5) $-2x^2 + y^2 - 12x + 12y - 8 = 0$; 18) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$;
6) $2x^2 + y^2 - 12x + 4y + 6 = 0$; 19) $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$;
7) $-3x^2 - 6x + 3y + 18 = 0$; 20) $x^2 - 6x - 8y + 5 = 0$;
8) $x^2 - 2y^2 - 6x + 4y - 6 = 0$; 21) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$;
9) $y^2 - 4y + 3x - 6 = 0$; 22) $4x^2 - y^2 - 8x + 8y = 0$;
10) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$; 23) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$;
11) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$; 24) $3x^2 + y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$;
12) $-2x^2 + 6x - y + 4 = 0$; 25) $3y^2 - 6y + 2x - 10 = 0$;
13) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$; 26) $-x^2 + y^2 - 2x + 12y - 5 = 0$;
14) $x^2 - 2y^2 - 4x + 12y - 8 = 0$; 27) $2x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 2 = 0$;
15) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$; 28) $2x^2 - 8x + 3y - 18 = 0$;
16) $-2y^2 - 8y + 4x - 3 = 0$; 29) $y^2 - 4y + 2x + 8 = 0$;
17) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$; 30) $-x^2 + y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$.

Пример 5.7

С помощью выделения полного квадрата и переноса начала координат упростить уравнение линии и определить ее тип:

$$2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0.$$

Сделать рисунок.

Решение.

Для выделения полного квадрата сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители за скобки:

$$2(x^2 + 4x) + 5(y^2 - 2y) - 17 = 0,$$

тогда,

$$2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 5(y^2 - 2y + 1) - 5 - 17 = 0,$$

откуда получим

$$2(x + 2)^2 + 5(y - 1)^2 = 30,$$

поделим обе части уравнения на свободный коэффициент

$$\frac{(x + 2)^2}{15} + \frac{(y - 1)^2}{6} = 1.$$

Таким образом, данное уравнение является уравнением эллипса с центром в точке $(-2, 1)$, где $a = \sqrt{15}$ – большая полуось; $b = \sqrt{6}$ – малая полуось.

Ответ: $\frac{(x+2)^2}{15} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$ – эллипс (рис. 20).

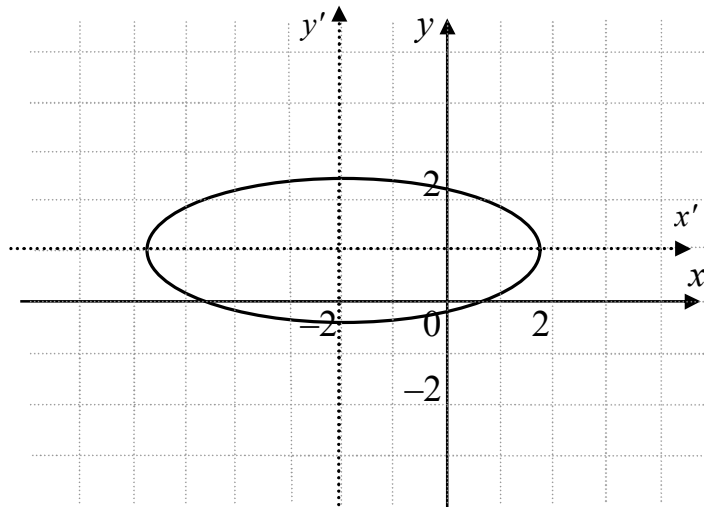


Рис. 20