ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ФИГУРЫ

Центром тяжести плоской фигуры называется точка, радиус-вектор которой определяется по формуле:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum S_i \bar{r}_i}{S}, \tag{1}$$

где S_i и $\bar{r}_i$ – площадь и радиус-вектор центра тяжести i-той части фигуры; $S = \sum S_i$ – площадь всей фигуры.

Спроектируем векторное равенство (1) на декартовы оси. В результате получим аналитические формулы для определения координат центра тяжести фигуры:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}, \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}. \tag{2}$$

При определении центра тяжести плоской фигуры часто используют метод отрицательных площадей. Суть этого метода заключается в следующем: фигура разбивается на две группы частей с известными площадями S_i и координатами центров тяжести x_i и y_i, одна из которых представляет сплошные тела с положительными площадями, а вторая – выемки с отрицательными площадями. Далее полученные значения координат x_i и y_i, а также площадей S_i с учетом их знака подставляются в выражения (2) для определения положения центра тяжести фигуры.

З а д а н и е. Найти координаты центра тяжести плоской фигуры (варианты 1 – 30), показанной на рис. 2.2 – 2.31 (размеры указаны в сантиметрах).

Пример 2.1. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, показанной на рис. 2.1,*а*.

а б

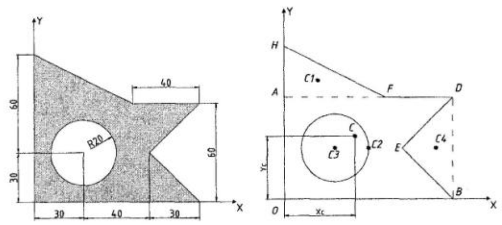


Рис. 2.1

Р е ш е н и е. Координаты центра тяжести плоской фигуры определяем по формулам

$$x_c = S_y/S; \qquad y_c = S_x/S. \tag{3}$$

Здесь $S_y = \sum S_i x_i$, $S_x = \sum S_i y_i$ – статические моменты фигуры относительно осей y и x.

Чтобы воспользоваться формулами (3), применим метод отрицательных площадей. Разобьем фигуру на части, для которых известны или легко определяются площади S_i и координаты их центров тяжести x_i и y_i. В данном случае в качестве таких частей принимаем (рис. 2.1,*б*): треугольник *AFH*; прямоугольник *OADB*, который считаем сплошным; круг; треугольник *BDE*. Площади круга и треугольника *BDE*, вырезанных из прямоугольника, считаем отрицательными.

Все результаты расчетов заносим в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер элемента	S_i, $см^2$	x_i, *см*	y_i, *см*	$S_{iy} = \sum S_i x_i$, $см^3$	$S_{ix} = \sum S_i y_i$, $см^3$
1	900	20	70	18000	63000
2	6000	50	30	300000	180000
3	-1250	30	30	-37500	-37500
4	-900	90	30	-81000	-27000
Σ	4750			199500	178500

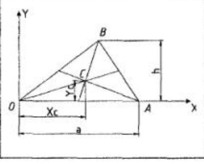
По формулам (3) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

x_c = 199500/4750 = 42,0 *см*; y_c = 178500/4750 = 37,6 *см*.

Центр тяжести всей фигуры (точка *C*) показан на рис. 2.1,*б*.

Примечание. Площадь и координаты центра тяжести треугольника приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Плоская фигура		Площадь	Координаты центра тяжести
Треуголь-ник		$S = ah/2$	$y_c = h/3$; $x_c = (x_1+x_2+x_3)/3$, где x_1, x_2, x_3 – координаты вершин *O*, *A*, *B*

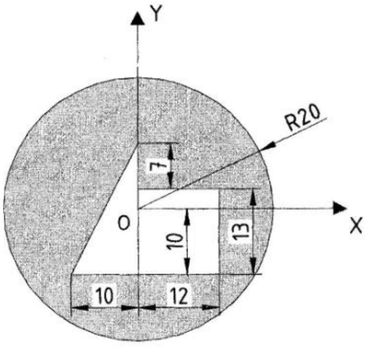


Рис. 2.2

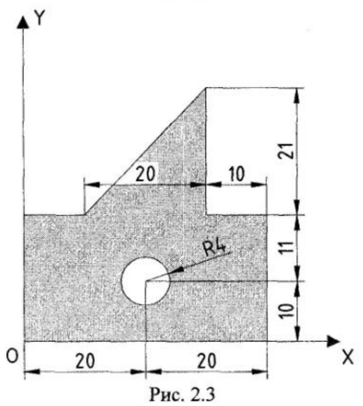


Рис. 2.3

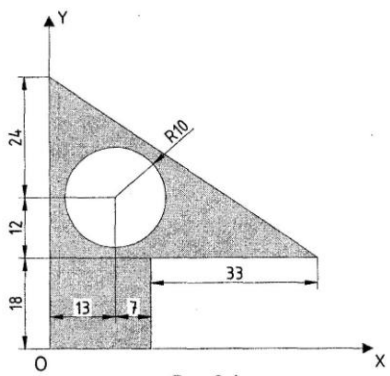


Рис. 2.4

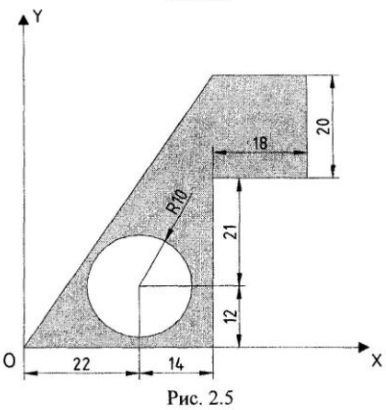


Рис. 2.5

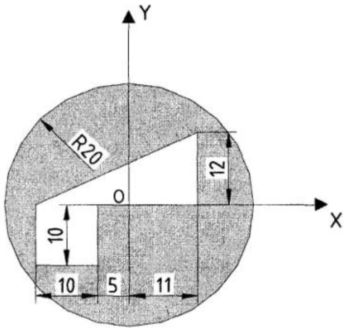


Рис. 2.6

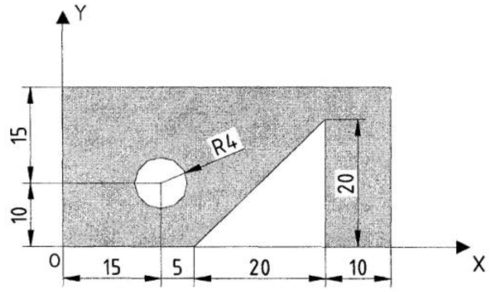


Рис. 2.7

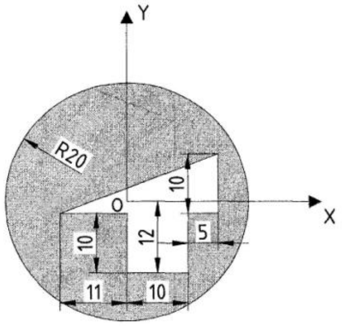


Рис. 2.8

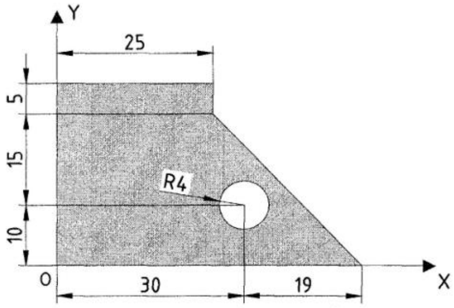


Рис. 2.9

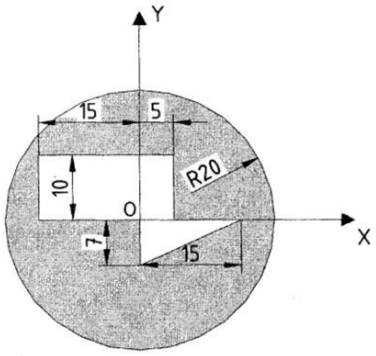


Рис. 2.10

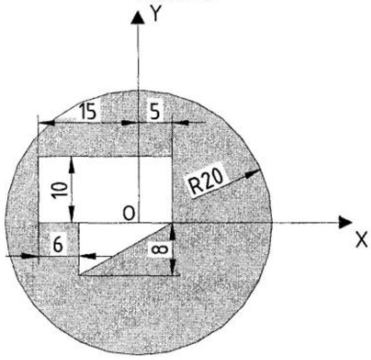


Рис. 2.11

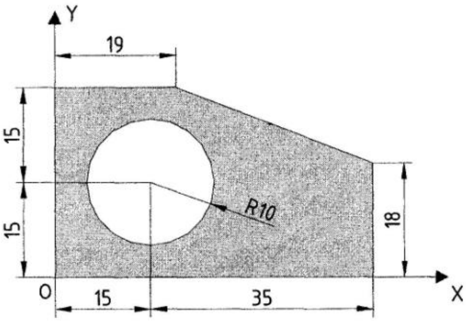


Рис. 2.12

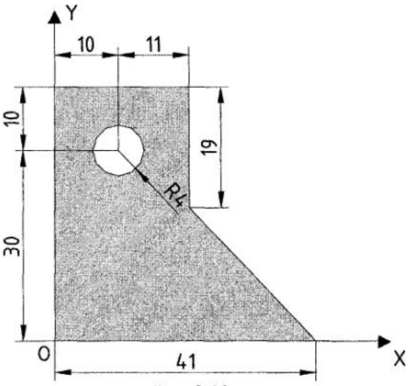


Рис. 2.13

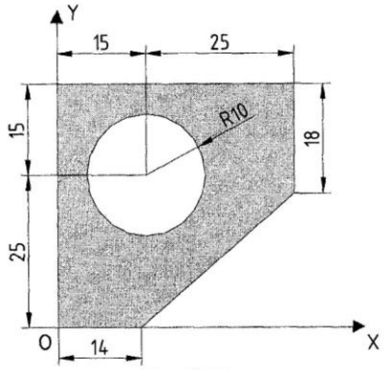


Рис. 2.14

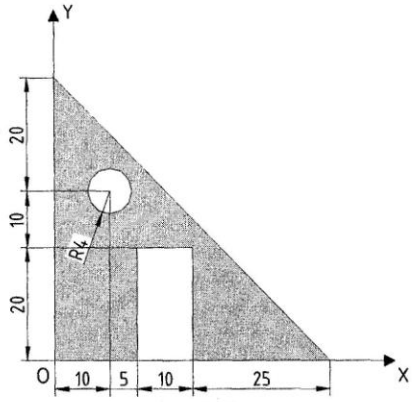


Рис. 2.15

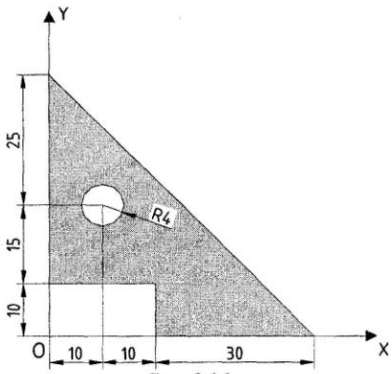


Рис. 2.16

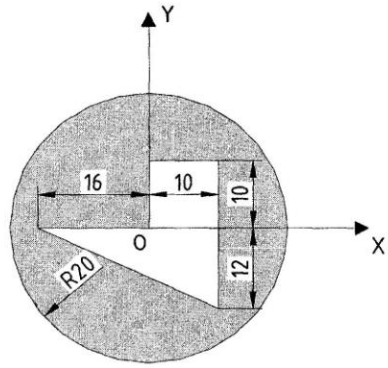


Рис. 2.17

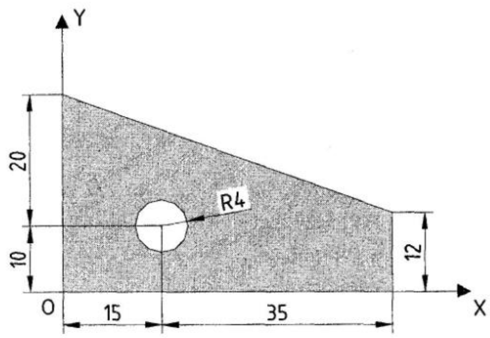


Рис. 2.18

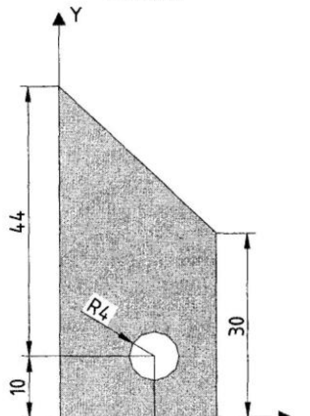


Рис. 2.19

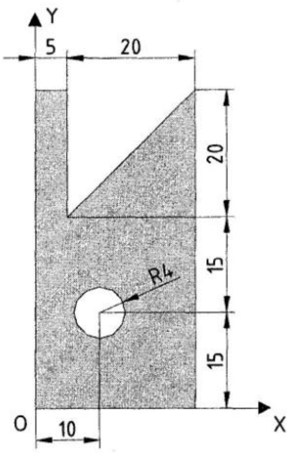


Рис. 2.20

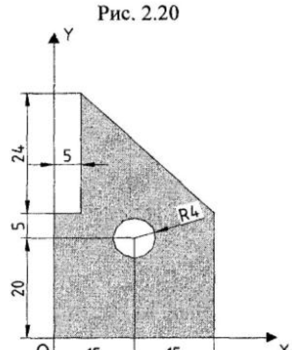


Рис. 2.21

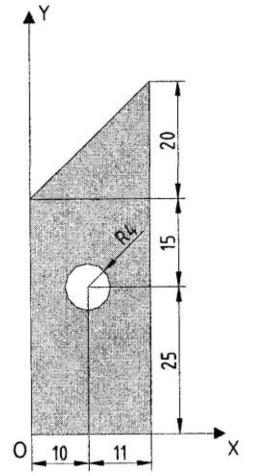


Рис. 2.22

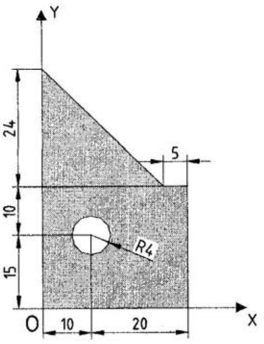


Рис. 2.23

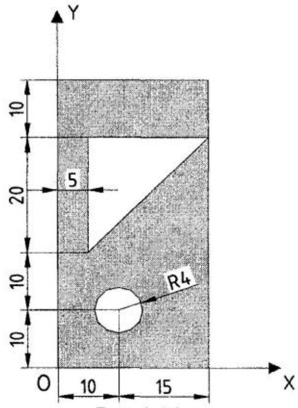


Рис. 2.24

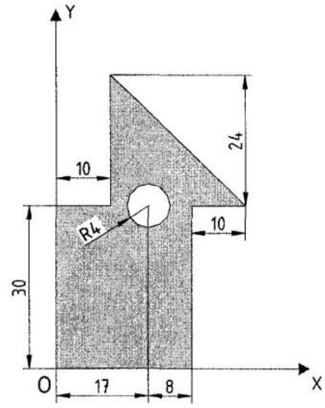


Рис. 2.25

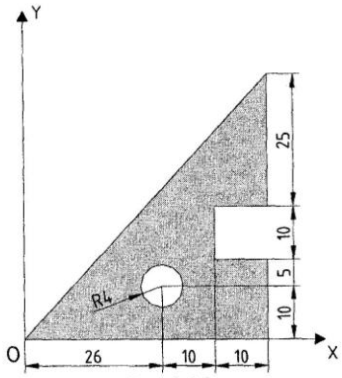


Рис. 2.26

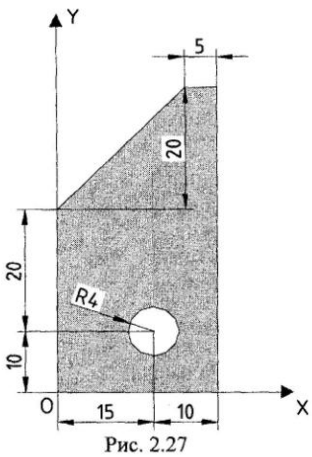


Рис. 2.27

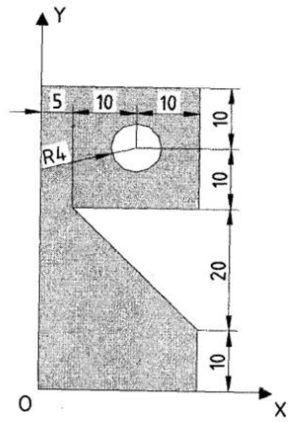


Рис. 2.28

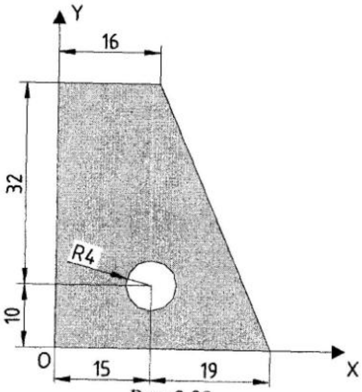


Рис. 2.29

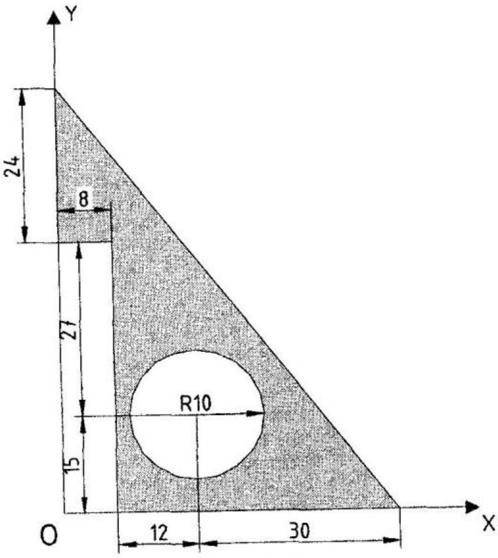


Рис. 2.30

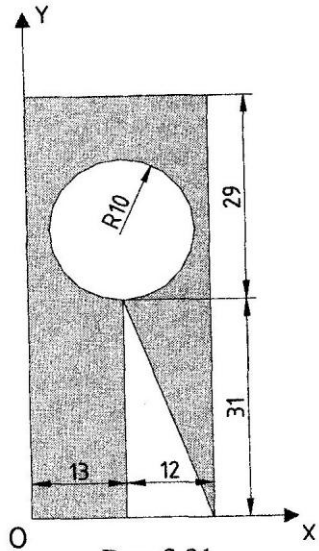


Рис. 2.31