2.12. Варианты курсового задания К 1 «Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения»

Для закрепления теоретического материала рекомендуется выполнить курсовое задание К 1.

По заданным уравнениям движения точки М (табл. 2.1) установить вид её траектории и для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Таблица 2.1

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	X = X(t), см	Y = Y(t), см	
1	$-2\cdot t^2+3$	$-5\cdot t$	0,5
2	$4\cdot\cos^2\cdot(\pi\cdot t/3)+2$	$4\cdot\sin^2\cdot(\pi\cdot t/3)$	1
3	$-\cos(\pi\cdot t^2/3)+3$	$\sin(\pi\cdot t^2/3)-1$	1
4	$4\cdot t+4$	$-4\cdot(t+1)$	2
5	$2\cdot\sin(\pi\cdot t/3)$	$-3\cdot\cos(\pi\cdot t/3)+4$	1
6	$3\cdot t^2+2$	$-4\cdot t$	0,5
7	$3\cdot t^2-t+1$	$5\cdot t^2-5\cdot t/3-2$	1
8	$7\cdot\sin(\pi\cdot t^2/6)+3$	$2-7\cdot\cos(\pi\cdot t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3\cdot t+6$	2
10	$-4\cdot\cos(\pi\cdot t/3)$	$-2\cdot\sin(\pi\cdot t/3)-3$	1
11	$-4\cdot t^2+1$	$-3\cdot t$	0,5
12	$5\cdot\sin^2\cdot(\pi\cdot t/6)$	$-5\cdot\cos^2\cdot(\pi\cdot t/6)-3$	1
13	$5\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3)$	$-5\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3)$	1
14	$-2\cdot t-2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cdot\cos(\pi\cdot t/3)$	$-3\cdot\sin(\pi\cdot t/3)$	1
16	$3\cdot t$	$4\cdot t^2+1$	0,5
17	$7\cdot\sin^2\cdot(\pi\cdot t/6)-5$	$-7\cdot\cos^2\cdot(\pi\cdot t/6)$	1
18	$1+3\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3)$	$3\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3\cdot t-6\cdot t^2$	$3-3\cdot t/2-3\cdot t^2$	0

21	$6\cdot\sin(\pi\cdot t^2/6) - 2$	$6\cdot\cos(\pi\cdot t^2/6) + 3$	1
22	$7\cdot t^2 - 3$	$5\cdot t$	0,25
23	$3 - 3\cdot t^2 + t$	$4 - 5\cdot t^2 + 5\cdot t/3$	1
24	$-4\cdot\cos(\pi\cdot t/3) - 1$	$-4\cdot\sin(\pi\cdot t/3)$	1
25	$-6\cdot t$	$-2\cdot t^2 - 4$	1
26	$8\cdot\cos^2\cdot(\pi\cdot t/6) + 2$	$-8\cdot\sin^2\cdot(\pi\cdot t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9\cdot\sin(\pi\cdot t^2/6)$	$-9\cdot\cos(\pi\cdot t^2/6) + 5$	1
28	$-4\cdot t^2 + 1$	$-3\cdot t$	1
29	$5\cdot t^2 + 5\cdot t/3 - 3$	$3\cdot t^2 + t + 3$	1
30	$2\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3) - 2$	$-2\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3) + 3$	1

2.13. Пример выполнения курсового задания К 1

Исходные данные: $X = X(t) = 2\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3) - 2$; см. (1)

$Y = Y(t) = -2\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3) + 3$; см. (2)

$t_1 = 1$ с.

По заданным уравнениям движения точки на плоскости определить кинематические характеристики в момент времени t_1.

Решение.

1. *Для определения траектории движения точки* уравнения (1) и (2) связываются через параметр t. Уравнения (1) и (2) выразим в следующем виде:

$$X + 2 = 2\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3); \quad (1^I)$$

$$Y - 3 = -2\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3). \quad (2^I)$$

Возведём в квадрат левые и правые части уравнений (1^I), (2^I) и сложим их.

$$(X + 2)^2 = (2\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3))^2; \quad (1^{II})$$

$$+$$

$$(Y - 3)^2 = (-2\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3))^2. \quad (2^{II})$$

После сложения уравнений (1^{II}), (2^{II}) получим

$$(X + 2)^2 + (Y - 3)^2 = (2\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3))^2 + (-2\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3))^2 =$$

$$= 2^2\cdot((\cos(\pi\cdot t^2/3))^2 + (\sin(\pi\cdot t^2/3)))^2 = 2^2\cdot 1 = 2^2.$$

При преобразованиях использована тригонометрическая формула $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. Полученное уравнение

$$(X + 2)^2 + (Y - 3)^2 = 2^2$$

есть уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ с центром в точке с координатами (a, b). Построим график траектории движения точки (рис. 2.17).

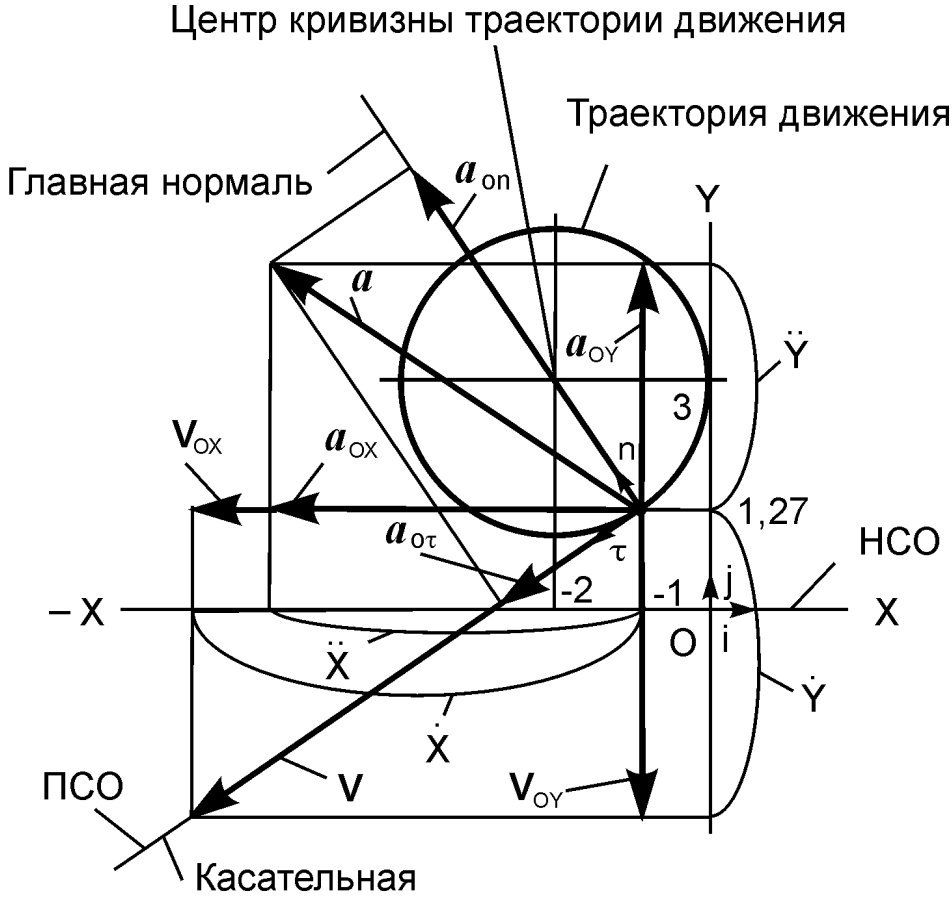


Рис. 2.17

2. *Определение положения точки на траектории её движения в момент времени (t_1)*.

В уравнения (1) и (2) подставляем время t_1.

$$X(t_1) = 2\cdot\cos(\pi\cdot(t_1)^2/3) - 2 = 2\cdot\cos(\pi\cdot(1)^2/3) - 2 =$$
$$= 2\cdot 0{,}5 - 2 = 1{,}000 \text{ см} < 0.$$
$$Y(t_1) = -2\cdot\sin(\pi\cdot(t_1)^2/3) + 3 = -2\cdot\sin(\pi\cdot(1)^2/3) + 3 =$$
$$= -2\cdot 0{,}866 + 3 = 1{,}270 \text{ см} > 0.$$

Точку с координатами (–1, 1,270) показываем на траектории её движения.

ВНИМАНИЕ!

Если точка не попала на траекторию её движения, то:

1) неверно определена траектория движения;

2) неверно подсчитаны значения координат точки.

3. Определение скорости точки.

Для определения скорости точки найдем производные по времени от соответствующих уравнений её движения:

$$\dot{X} = 2\cdot(-\sin(\pi\cdot t^2/3)\cdot(2\cdot\pi\cdot t/3)) = (-4\cdot\pi/3)\cdot(\sin(\pi\cdot t^2/3))\cdot t;$$

$$\dot{Y} = -2\cdot(\cos(\pi\cdot t^2/3)\cdot(2\cdot\pi\cdot t/3)) = (-4\cdot\pi/3)\cdot(\cos(\pi\cdot t^2/3))\cdot t.$$

Вычислим значения проекций $\dot{X}$, $\dot{Y}$ скорости на оси OX и OY в момент времени t_1:

$$\dot{X}(t_1) = (-4\cdot\pi/3)\cdot(\sin(\pi\cdot(t_1)^2/3))\cdot t_1 =$$

$$=(-4\cdot3{,}14/3)\cdot\sin(\pi\cdot1^2/3)\cdot1 = -3{,}625 \text{ см/с} < 0;$$

$$\dot{Y}(t_1) = (-4\cdot\pi/3)\cdot(\cos(\pi\cdot(t_1)^2/3))\cdot t_1 =$$

$$=(-4\cdot3{,}14/3)\cdot\cos(\pi\cdot1^2/3)\cdot1 = -2{,}093 \text{ см/с} < 0.$$

Так как $\dot{X}(t_1)$ и $\dot{Y}(t_1)$ меньше нуля, то векторы $\mathbf{V}_{OX}$, $\mathbf{V}_{OY}$ направлены в стороны, противоположные векторам **i**, **j**. В выбранном масштабе наносим векторы $\mathbf{V}_{OX}$, $\mathbf{V}_{OY}$ на чертёж (рис. 2.17).

На векторах $\mathbf{V}_{OX}$, $\mathbf{V}_{OY}$ строим вектор **V** по правилу параллелограмма. Вектор скорости **V** направлен по касательной к траектории движения точки.

ВНИМАНИЕ!

Если вектор **V** направлен не по касательной к траектории движения, то:

1) неверно взяты производные $\dot{X}$, $\dot{Y}$;
2) неверно вычислены значения $\dot{X}(t_1)$, $\dot{Y}(t_1)$.

Вычисляется модуль V скорости **V** в момент времени (t_1) по формуле

$$V(t_1) = \sqrt{(\dot{X}(t_1))^2 + (\dot{Y}(t_1))^2} =$$

$$= \sqrt{(-3{,}625)^2 + (-2{,}093)^2} = 4{,}186 \text{ см/с}.$$

В ряде вариантов можно определить модуль скорости по формуле

$$V = \sqrt{(\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2} = =$$

$$\sqrt{((-4\cdot\pi/3)\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3)\cdot t))^2 + ((-4\cdot\pi/3)\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3)\cdot t))^2} =$$

$$= 4\cdot\pi\cdot t/3.$$

$$V(t_1) = 4\cdot\pi\cdot t_1/3 = 4\cdot3{,}14\cdot1/3 = 4{,}186 \text{ см/с}.$$

4. Определение ускорения точки.

Находятся производные по времени от проекций $\dot{X}$, $\dot{Y}$ скорости на координатные оси OX, OY.

Так как проекция $\dot{X}$ скорости на ось OX представляет собой произведение двух переменных ($(-4\cdot\pi/3)\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3)$ и t), то по правилу дифференцирования произведения получим

$$\ddot{X} = d\dot{X}/dt = (-8\cdot\pi^2/9)\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3)\cdot t^2 - (4\cdot\pi/3)\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3).$$

Аналогично

$$\ddot{Y} = d\dot{Y}/dt = (8\cdot\pi^2/9)\cdot\sin(\pi\cdot t^2/3)\cdot t^2 - (4\cdot\pi/3)\cdot\cos(\pi\cdot t^2/3).$$

Определим $\ddot{X}(t_1)$ и $\ddot{Y}(t_1)$, подставляя в последние формулы значение времени t_1. Произведя расчеты, получим:

$$\ddot{X}(t_1) = -8{,}020 \text{ см/с}^2;\ \ddot{Y}(t_1) = 5{,}510 \text{ см/с}^2.$$

Так как $\ddot{X}(t_1)<0$, то вектор $\boldsymbol{a}_{OX}$ направлен в сторону, противоположную орту **i**. Вектор $\boldsymbol{a}_{OY}$ направлен в ту же сторону, что и вектор **j**, так как $\ddot{Y}(t_1)>0$. На векторах $\boldsymbol{a}_{OX}$ и $\boldsymbol{a}_{OY}$ строим вектор ускорения $\boldsymbol{a}$. Вектор ускорения $\boldsymbol{a}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

ВНИМАНИЕ!

Если ускорение $\boldsymbol{a}$ направлено не в сторону вогнутости траектории движения, то:

1) неверно взяты производные $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$;
2) неверно вычислены значения $\ddot{X}(t_1)$, $\ddot{Y}(t_1)$.

Определяется модуль ускорения по формуле

$$a(t_1) = \sqrt{(\ddot{X}(t_1))^2 + (\ddot{Y}(t_1))^2} = \sqrt{(-8{,}020)^2 + (5{,}510)^2} = 9{,}730 \text{ см/с}^2.$$

5. Определение касательного и нормального ускорений.

На рис. 2.17 наносим подвижную систему отсчёта (ПСО). Разложим полное ускорение $\boldsymbol{a}$ на касательное $\boldsymbol{a}_{o\tau}$ и нормальное $\boldsymbol{a}_{on}$ ускорения. Так как касательное ускорение $\boldsymbol{a}_{o\tau}$ совпадает с направлением скорости **V**, то точка движется ускоренно. Модуль $a_{o\tau}$ касательного ускорения в момент времени t_1 находится по формуле

$$a_{o\tau}(t_1) = |(\dot{X}(t_1)\cdot\ddot{X}(t_1) + \dot{Y}(t_1)\cdot\ddot{Y}(t_1))/V(t_1))| = |\ddot{S}(t_1)| =$$
$$= |((-3{,}625)\cdot(-8{,}020) + (-2{,}099)\cdot 5{,}510)/4{,}186| = 4{,}186 \text{ см/с}^2.$$

Касательное ускорение характеризует быстроту изменения величины скорости, поэтому его проекция на касательную может быть определена по формуле

$$\ddot{S} = dV/dt = d(4\pi t/3)/dt = 4\pi/3 = 4\cdot 3{,}14/3 = 4{,}186 \text{ см/с}^2 = \text{const} > 0.$$

Так как $\ddot{S}$ = const и направления $\boldsymbol{a}_{o\tau}$ и **V** совпадают, то точка движется по окружности равноускоренно. $a_{o\tau} = \ddot{S}$ = const.

Модуль нормального ускорения находится по формуле

$$a_{on}(t_1) = \sqrt{(a(t_1))^2 - (a_{o\tau}(t_1))^2} =$$
$$= \sqrt{(9{,}730)^2 - (4{,}186)^2} = 8{,}780 \text{ см/с}^2.$$

Из формулы $a_{on} = V^2/\rho$ определяется радиус кривизны траектории движения $\rho(t_1) = V^2(t_1)/(a_{on}(t_1)) = (4{,}186)^2/8{,}780 = 2{,}0$ см. Таким образом,

радиус кривизны траектории движения равен радиусу окружности, по которому перемещается точка.

Результаты вычислений заносятся в таблицу.

Таблица

$X(t_1)$, см	$Y(t_1)$, см	$\dot{X}(t_1)$, см/с	$\dot{Y}(t_1)$, см/с	$\ddot{X}(t_1)$, см/с^2	$\ddot{Y}(t_1)$, см/с^2
– 1,00	1,27	– 3,63	– 2,09	– 8,02	5,51

Окончание таблицы

$V(t_1)$, см/с	$a(t_1)$, см/с^2	$a_{\tau}(t_1)$, см/с^2	$a_{n}(t_1)$, см/с^2	$\rho(t_1)$, см	
4,19	9,73	4,20	8,78	2,00	