РГЗ № 1: <u>**ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**</u>

<u>**Задание:**</u>

1. ***Аналитическое решение:***
   1.1. С помощью теоремы Коши найти область существования и единственности решения заданного ДУ на плоскости Oxy.
   1.2. Найти общее решение $y = f(x, C)$ заданного ДУ 1-го порядка.
   1.3. Выполнить проверку общего решения.
   1.4. Найти частное решение $y = f(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

2. ***Приближенное решение методом Эйлера:***
   2.1. Найти значения ключевых точек: $x_1 = x_0 + 10\,\Delta x$, $x_2 = x_0 + 20\,\Delta x$. (где x_0 — точка, заданная в начальном условии).
   2.2. Найти приближенное решение ДУ с помощью метода Эйлера на отрезке $x \in [x_0; x_2]$ с заданным шагом Δx. Найти $\overline{y}_1$ при $x = x_1$ и $\overline{y}_2$ при $x = x_2$.
   2.3. Сравнить приближенный результат с точным в точках x_1 и x_2, для этого найти абсолютную ($\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_2$; $\Delta_i = \left|\overline{y}_i - f(x_i)\right|$) и относительную ($\overline{\delta}_1$ и $\overline{\delta}_2$; $\delta_i = \left|\dfrac{\Delta_i}{f(x_i)}\right| \cdot 100\%$) погрешности вычислений. Сделать вывод о величине шага (если погрешность > 10%, шаг надо уменьшать).

3. ***Результаты приближенных решений оформить в виде таблицы:***

Ключевые точки x_i	Значение функции $y_i = f(x_i)$	Метод Эйлера		
		$\overline{y}_i$	$\overline{\Delta}_i$	$\overline{\delta}_i$
$x_1 =$				
$x_2 =$				

4. ***Графическое оформление результатов:***
   4.1. Построить график функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0; x_2]$. График желательно построить на компьютере с достаточно крупным масштабом. При работе в Exel удобно вычислять значения функции с шагом Δx. При этом точки **не выделяются** (убрать маркеры).
   4.2. На этом же графике отметить точки, полученные по методу Эйлера, соединив их последовательно отрезками. Линия должна по цвету или шаблону отличаться от графика функции (точного решения). Здесь точки лучше отметить (поставить маркеры).

<u>Примечания</u>:
1. Фон графика должен быть белым (бесцветным, прозрачным).
2. Цвет линий необходимо подобрать так, чтобы они были четко видны пр[и] печати и отличались друг от друга. ***Бледно-желтым цветом линии н[е] рисовать!***
3. На графике должна быть показана "сетка" координат (по оси x и по оси y).
4. Обязательно поместить на график легенду.

1. $y' \cos x = \left(y^2 + 4y\right) \sin x\,; \qquad y\Big|_{x=0} = 1\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

2. $y' - \dfrac{x\,y}{1+x^2} = 2 - x\,; \qquad y\Big|_{x=0} = 1\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

3. $x y' - y = 2\,x \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}\,; \qquad y\Big|_{x=2} = \pi\,; \qquad \Delta x = -0.1.$

4. $y' \left(x^4 + 4\right) \ln y = x\,y\,; \qquad y\Big|_{x=0} = 2\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

5. $(x+1)\,dy - (x+1)^4\,dx = 2\,y\,dx\,; \qquad y\Big|_{x=0} = -1\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

6. $y' = y \ln y \ln(x+1)\,; \qquad y\Big|_{x=0} = e^2\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

7. $y \sin x + y' \cos x = 1\,; \qquad y\Big|_{x=0} = -2\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

8. $x\,y' = 2\sqrt{x\,y} - y\,; \qquad y\Big|_{x=1} = 0\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

9. $x\,e^{y}\,y' = \left(e^{y} + 1\right) \ln^2 x\,; \qquad y\Big|_{x=1} = 0\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

10. $2\,y = x\left(y' + x^2 \sin x\right)\,; \qquad y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{\pi}{4}\,; \qquad \Delta x = \dfrac{\pi}{20}.$

11. $\left(x^2 - 2\,y\right) - x\,y' = 0\,; \qquad y\Big|_{x=1} = 0\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

12. $y' = y\,x \cos x\,; \qquad y\Big|_{x=0} = 1\,; \qquad \Delta x = 0.1.$

16. $2xy' + 3y = x^6$; $\quad y\Big|_{x=1} = 0$; $\quad \Delta x = 0.05$.

17. $x^3 y' - x^2 y + 2 = 0$; $\quad y\Big|_{x=1} = 2$; $\quad \Delta x = 0.1$.

18. $dy + (y - x^2)\, dx = 0$; $\quad y\Big|_{x=0} = 1$; $\quad \Delta x = 0.1$.

19. $y' = y + x e^x$; $\quad y\Big|_{x=0} = -1$; $\quad \Delta x = 0.1$.

20. $\sin 2y\, (1 + 2\sqrt{x})\, y' = \sqrt{x}$; $\quad y\Big|_{x=0} = 0$; $\quad \Delta x = 0.1$.

21. $y\,(x^2 - 4x - 5)\, y' = 2x$; $\quad y\Big|_{x=0} = 2$; $\quad \Delta x = 0.1$.

22. $2x^2 y' + 1 = 3xy$; $\quad y\Big|_{x=1} = 1$; $\quad \Delta x = 0.1$.

23. $xy^2 y' = 2x^3 + y^3$; $\quad y\Big|_{x=1} = 2$; $\quad \Delta x = 0.1$.

24. $(5 - 4xy)\, dx + x^2\, dy = 0$; $\quad y\Big|_{x=1} = 0$; $\quad \Delta x = 0.1$.

25. $\left(x + \sqrt{x^2 - y^2}\right) dx = y\, dy$; $\quad y\Big|_{x=1} = 1$; $\quad \Delta x = 0.1$.