

§ 7. Ряды Фурье и задача аппроксимации

21. Дана функция $x = x(t)$ в пространстве $L^2(-1;1)$ со стандартным скалярным произведением. Для функции x в этом пространстве требуется найти

- многочлен наилучшего приближения первой степени;
- многочлен наилучшего приближения второй степени.

Построить графики функции x и полученных многочленов.

Для вычислений и построения графиков можно использовать математические пакеты.

1. $x(t) = (t^2 - t)(2t + 1)$
2. $x(t) = 1 - |t|$
3. $x(t) = \arcsin(t)$
4. $x(t) = 1 + |t|$
5. $x(t) = \ln t^2$
6. $x(t) = \cos \pi t$
7. $x(t) = 6t^2 + 5t - 4$
8. $x(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ -2t, & t \leq 0 \end{cases}$
9. $x(t) = t^2 - t^3$
10. $x(t) = |t|$
11. $x(t) = \sqrt{|t|}$
12. $x(t) = t^3 - 1$
13. $x(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ t^2, & t < 0 \end{cases}$
14. $x(t) = \sqrt{1 - t^2}$
15. $x(t) = -6t^2 + 7t + 5$
16. $x(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ t^2, & t < 0 \end{cases}$
17. $x(t) = \arccos(t)$
18. $x(t) = \ln |t|$
19. $x(t) = t(t + 1)(2t - 1)$
20. $x(t) = t^2 + t^3$

Указание к решению

Для решения этой задачи необходимы сведения, изложенные в §11 конспекта лекций: информация о рядах Фурье, понятие элемента наилучшего приближения и схема его поиска.

В гильбертовом пространстве $L^2(-1;1)$ для функции $x(t)$ требуется найти многочлен наилучшего приближения степени n . Многочлен – это линейная комбинация одночленов. Следовательно, надо найти элемент наилучшего приближения в конечномерном линейном подпространстве $\text{Lin}\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$. Для решения этой задачи представляется целесообразным провести ортогонализацию и нормировку системы $1, t, t^2, \dots, t^n$ в пространстве $L^2(-1;1)$. Как показано в конспекте лекций, §9, пункт 9.2, в результате получаем $P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$ – ортонормированные многочлены Лежандра. Многочлен наилучшего приближения n -ой степени для функции $x(t)$ вычисляется как частичная сумма ряда Фурье по системе многочленов Лежандра:

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(t), \quad c_k = (x, P_k) = \int_{-1}^1 x(t) P_k(t) dt.$$

Образец решения

$$x(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы решить поставленную задачу, достаточно найти две частичные суммы ряда Фурье по системе многочленов Лежандра: $S_1(t)$ и $S_2(t)$. Понадобятся три первых ортонормированных многочлена Лежандра:

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Вычислим коэффициенты Фурье для функции $x(t)$:

$$c_0 = (x, P_0) = \int_{-1}^1 x(t)P_0(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 t dt = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$c_1 = (x, P_1) = \int_{-1}^1 x(t)P_1(t)dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$c_2 = (x, P_2) = \int_{-1}^1 x(t)P_2(t)dt = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_0^1 t\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}.$$

Найдем для функции $x(t)$ многочлены наилучшего приближения первой и второй степени:

$$S_1(t) = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{4},$$

$$S_2(t) = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) + c_2P_2(t) = \frac{15}{32}t^2 + \frac{t}{2} + \frac{3}{32}.$$

На рисунке 9 представлены график функции x и график многочлена S_1 (пунктиром).

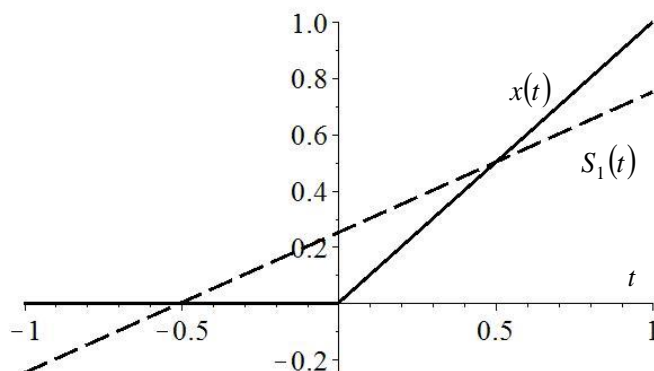


Рис. 9

На рисунке 10 представлены график функции x и график многочлена S_2 (пунктиром).

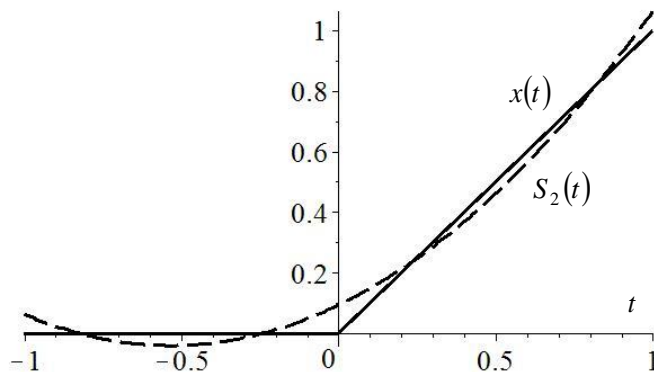


Рис. 10

22. Вычислить несколько первых коэффициентов Фурье для функции $x = x(t)$ по указанной системе ортогональных многочленов. Подтвердить графически сходимость ряда Фурье к функции x .

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

- | | |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1. $x(t) = \operatorname{arctg}(t)$, многочлены Лагерра | 11. $x(t) = \ln t$, многочлены Лагерра |
| 2. $x(t) = t \cos \frac{t}{2}$, многочлены Эрмита | 12. $x(t) = t - \sin 2t$, многочлены Эрмита |
| 3. $x(t) = 1 - t^2 $, многочлены Эрмита | 13. $x(t) = 1 + t^2 \sin t$, многочлены Лагерра |
| 4. $x(t) = \cos t + \ln t$, многочлены Лагерра | 14. $x(t) = t $, многочлены Эрмита |
| 5. $x(t) = t + \cos^2 t$, многочлены Лагерра | 15. $x(t) = \operatorname{arctg}(t)$, многочлены Эрмита |
| 6. $x(t) = \operatorname{arctg}(t)$, многочлены Эрмита | 16. $x(t) = (t^3 - 2t^2)e^{-t}$, многочлены Лагерра |
| 7. $x(t) = \sqrt{t} + \frac{4 \sin t}{t}$, многочлены Лагерра | 17. $x(t) = \frac{6t^2}{1+t^4}$, многочлены Эрмита |
| 8. $x(t) = t + \sin t$, многочлены Лагерра | 18. $x(t) = t + \cos t$, многочлены Эрмита |
| 9. $x(t) = \frac{2t^2}{1+t^2}$, многочлены Эрмита | 19. $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, многочлены Лагерра |
| 10. $x(t) = 2 \cos t - t$, многочлены Лагерра | 20. $x(t) = \sqrt{ t }$, многочлены Эрмита |

Образец решения

$$x(t) = -\frac{4t}{1+t^4}, \text{ многочлены Эрмита}$$

Решение этой задачи опирается на теоретические сведения, изложенные в конспекте лекций: понятие ортогональных многочленов и основные типы (§9, пункт 9.2, §10, пункт 10.2), определение и сходимость ряда Фурье (§11).

Многочлены Эрмита образуют ортогональный (после нормировки – ортонормированный) базис в гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(-\infty; +\infty)$, $\xi(t) = e^{-t^2}$. Обозначим этот ортонормированный базис следующим образом:

$$\{H_0(t), H_1(t), H_2(t), \dots, H_k(t), \dots\}$$

Коэффициенты Фурье для функции x вычисляются по формуле

$$c_k = (x, H_k)_{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) H_k(t) e^{-t^2} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вычислим первые 30 коэффициентов Фурье. Все значения приведены с округлением до 4 знака после запятой ради экономии места, хотя вычисления проводились с гораздо более высокой точностью:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -1.7487, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0.9705, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = -0.5120, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = 0.2546, \\ c_8 = 0, \quad c_9 = -0.1115, \quad c_{10} = 0, \quad c_{11} = 0.0334, \quad c_{12} = 0, \quad c_{13} = 0.0075, \quad c_{14} = 0, \\ c_{15} = -0.0271, \quad c_{16} = 0, \quad c_{17} = 0.0345, \quad c_{18} = 0, \quad c_{19} = -0.0354, \quad c_{20} = 0, \quad c_{21} = 0.0329, \\ c_{22} = 0, \quad c_{23} = -0.0288, \quad c_{24} = 0, \quad c_{25} = 0.0242, \quad c_{26} = 0, \quad c_{27} = -0.0197, \quad c_{28} = 0, \\ c_{29} = 0.0156, \quad c_{30} = 0.$$

Заметим, что поскольку функция x нечетная, то все коэффициенты Фурье с четными номерами нулевые. Кроме того, значения полученных коэффициентов Фурье стремятся к нулю при увеличении номера. Это является необходимым признаком того, что они вычислены правильно.

По условию задачи требуется подтвердить графически сходимость ряда Фурье к функции x :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(t).$$

Для этого необходимо вычислить частичные суммы ряда Фурье

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k H_k(t)$$

и продемонстрировать, что дистанция между графиками $S_n(t)$ и $x(t)$ сокращается с увеличением порядка n .

На рисунке 11 представлены графики функций x и S_{10} (пунктиром).

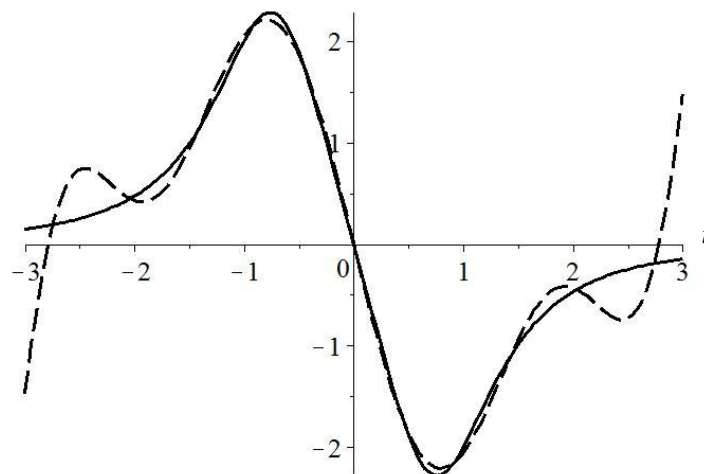


Рис. 11

На рисунке 12 представлены графики функций x и S_{30} (пунктиром).

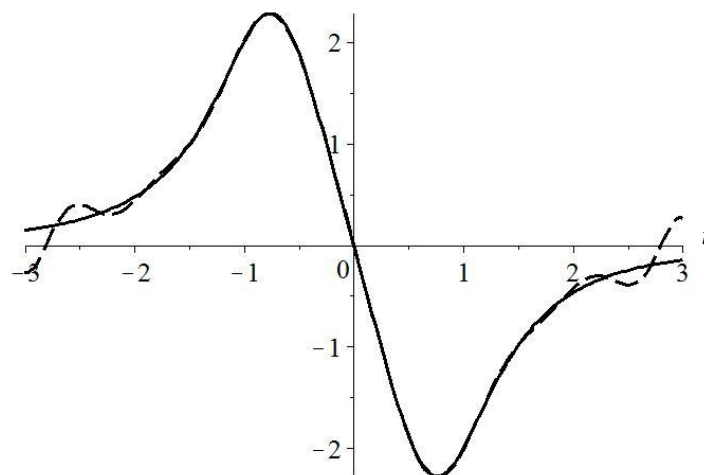


Рис. 12

По графикам видно, что при увеличении порядка n частичная сумма ряда Фурье все более точно аппроксимирует функцию x . Промежуток $(-3;3)$ для построения графиков и порядки частичных сумм ряда Фурье подобраны так, чтобы динамика сходимости была видна наилучшим образом. Заметим, что в случае многочленов Эрмита можно взять любой промежуток для демонстрации сходимости ряда Фурье, поскольку разложение происходит в пространстве $L^{2;\infty}(-\infty;+\infty)$, т.е. сразу на всей числовой прямой.

23. Аппроксимировать функцию $x = x(t)$ в пространстве $L^2(-1;1)$ двумя способами:

А. при помощи ортогональной тригонометрической системы;

В. при помощи ортогональных многочленов Лежандра.

Число n – заданный порядок аппроксимации. Построить графики функции x и полученных аппроксимаций. Сравнить точность аппроксимаций в метрике пространства $L^2(-1;1)$.

Для вычисления и построения графиков использовать математические пакеты.

1. a) $x(t) = \ln(1+t), \quad n = 4$

b) $x(t) = 1 - |t|, \quad n = 7$

2. a) $x(t) = \frac{t+1}{e^t}, \quad n = 5$

b) $x(t) = \begin{cases} |3t-1|, & t > 0 \\ |3t+1|, & t \leq 0 \end{cases} \quad n = 8$

3. a) $x(t) = -\sqrt{1-t^2}, \quad n = 6$

b) $x(t) = \arcsin t^2 - \arcsin t, \quad n = 5$

4. a) $x(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ t, & t \leq 0 \end{cases} \quad n = 7$

b) $x(t) = \ln(1-t^2), \quad n = 6$

5. a) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-t^2}}, \quad n = 10$

b) $x(t) = \begin{cases} 2t, & t > 0 \\ t, & t \leq 0 \end{cases} \quad n = 7$

6. a) $x(t) = |t|, \quad n = 6$

b) $x(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad n = 4$

7. a) $x(t) = \left| t^2 - \frac{1}{4} \right|, \quad n = 7$

b) $x(t) = \begin{cases} t^2 - t, & t \geq 0 \\ 2t + t^2, & t < 0 \end{cases} \quad n = 15$

8. a) $x(t) = \ln(2-t^2), \quad n = 4$

b) $x(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} \quad n = 5$

9. a) $x(t) = \frac{t}{\exp(t^2)}, \quad n = 4$

b) $x(t) = \begin{cases} 1-t, & t \geq 0 \\ -1-t, & t < 0 \end{cases} \quad n = 20$

10. a) $x(t) = \ln(1-t), \quad n = 6$

b) $x(t) = \begin{cases} |2t-1|, & t \geq 0 \\ |2t+1|, & t < 0 \end{cases} \quad n = 9$

11. a) $x(t) = \sqrt[3]{|t|}, \quad n = 6$

b) $x(t) = \begin{cases} 1+t, & t > 0 \\ 1-t^2, & t \leq 0 \end{cases} \quad n = 4$

12. a) $x(t) = \arcsin t^4 - \arccos t, \quad n = 6$

b) $x(t) = \begin{cases} t-t^2, & t \geq 0 \\ t+t^2, & t < 0 \end{cases} \quad n = 10$

13. a) $x(t) = t^2 \exp(-4|t|), \quad n = 6$

14. a) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}}, \quad n = 8$

b) $x(t) = |2t^2 - 1|, \quad n = 6$

15. a) $x(t) = e^{-|t|}$, $n = 6$

b) $x(t) = \begin{cases} |3t-1|, & t \geq 0 \\ t+1, & t < 0 \end{cases}$ $n = 10$

16. a) $x(t) = \sqrt{1-t^2}$, $n = 5$

b) $x(t) = \begin{cases} \sqrt{t}, & t \geq 0 \\ t^2, & t < 0 \end{cases}$ $n = 6$

17. a) $x(t) = |2t-1|$, $n = 6$

b) $x(t) = t^2 \exp(-2t^2)$, $n = 4$

b) $x(t) = \begin{cases} t^3, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}$ $n = 4$

18. a) $x(t) = (2t+1)\exp(-t^2)$, $n = 4$

b) $x(t) = \ln t^2$, $n = 8$

19. a) $x(t) = \arccos t^2 - \arccos t$, $n = 5$

b) $x(t) = \begin{cases} t-1, & t \geq 0 \\ t+1, & t < 0 \end{cases}$ $n = 20$

20. a) $x(t) = \arcsin t$, $n = 4$

b) $x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-t^2}}$, $n = 8$

Образец решения

$$x(t) = \sqrt{|t|}, \quad n = 5$$

Решение этой задачи опирается на теоретические сведения, изложенные в конспекте лекций: понятие тригонометрической системы (§10, пункт 10.2) и многочленов Лежандра (§9, пункт 9.2, §10, пункт 10.2), определение ряда Фурье и его связь с задачей аппроксимации (§11, §12). Как отмечено в §12, для аппроксимации функции можно использовать частичную сумму ряда Фурье.

А. Тригонометрическая аппроксимация.

Рассмотрим в пространстве $L^2(-1;1)$ ортонормированный тригонометрический базис:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \pi t, \cos \pi t, \sin 2\pi t, \cos 2\pi t, \dots, \sin k\pi t, \cos k\pi t, \dots \right\}.$$

Обозначим символом $Trig_5(t)$ частичную сумму ряда Фурье для функции x по этому базису:

$$Trig_5(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^5 (a_k \cos k\pi t + b_k \sin k\pi t),$$

$$a_0 = \left(x, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{|t|} dt,$$

$$a_k = (x, \cos k\pi t) = \int_{-1}^1 \sqrt{|t|} \cos k\pi t dt,$$

$$b_k = (x, \sin k\pi t) = \int_{-1}^1 \sqrt{|t|} \sin k\pi t dt.$$

На рисунке 13 изображены графики функций x и $Trig_5$ (пунктиром).

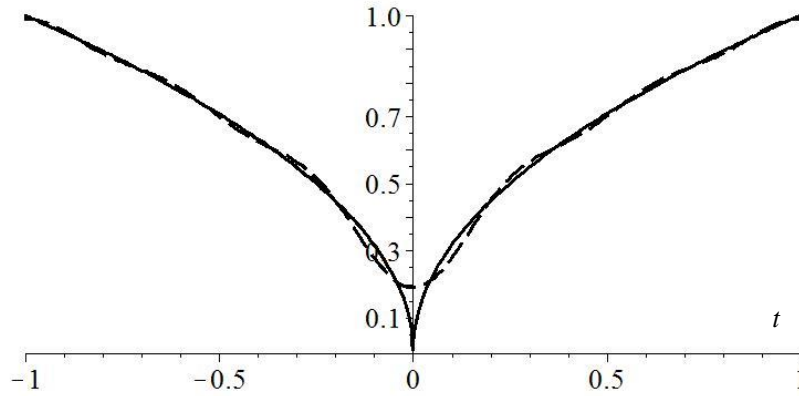


Рис. 13

В. Аппроксимация многочленами Лежандра.

Рассмотрим в пространстве $L^2(-1;1)$ ортонормированный базис, составленный из многочленов Лежандра:

$$\{P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots, P_k(t), \dots\}$$

Обозначим символом $Leg_5(t)$ частичную сумму ряда Фурье для функции x по этому базису:

$$Leg_5(t) = \sum_{k=0}^5 c_k P_k(t), \quad c_k = (x, P_k) = \int_{-1}^1 \sqrt{|t|} P_k(t) dt.$$

На рисунке 14 изображены графики функций x и Leg_5 (пунктиром).

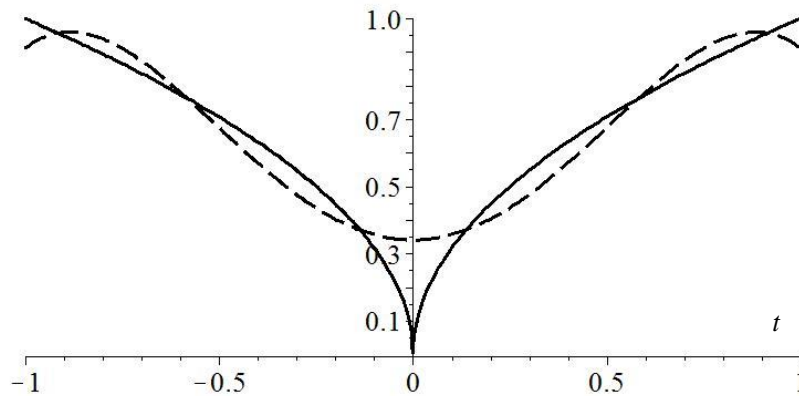


Рис. 14

По графикам можно предположить, что в данном случае тригонометрическая аппроксимация точнее, чем аппроксимация многочленами Лежандра. Проведем численный анализ точности аппроксимаций в метрике $L^2(-1;1)$. Расстояние между функцией и частичной суммой ее ряда Фурье можно вычислить либо непосредственным образом

$$\|x - S_n\|_{L^2(-1;1)} = \sqrt{\int_{-1}^1 (x(t) - S_n(t))^2 dt},$$

либо с использованием свойства частичных сумм ряда Фурье (см. конспект лекций, § 11, соотношение (11.6)):

$$\|x - S_n\|_{L^2(-1;1)} = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2}.$$

Второй путь более экономичный как для ручного, так и для машинного счета. В данном случае получены следующие результаты:

$$\|x - Trig_5\|_{L^2(-1;1)} \approx 0.028, \quad \|x - Leg_5\|_{L^2(-1;1)} \approx 0.091.$$

Действительно, тригонометрическая система дает более точную аппроксимацию функции x в пространстве $L^2(-1;1)$.

24. Аппроксимировать функцию $x = x(t)$ на промежутке $[-1;1]$ двумя способами:

А. при помощи ортогональных многочленов Чебышёва I рода;

В. при помощи многочлена Тейлора (в точке $t_0 = 0$).

Число n – заданный порядок аппроксимации. Построить графики функции x и полученных аппроксимаций. Ответить на следующие вопросы, обосновав ответы численно:

- **какой способ дает лучшую аппроксимацию вблизи нуля?**
- **какой способ дает лучшую равномерную аппроксимацию на промежутке $[-1;1]$?**

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

1. $x(t) = t \cos 2\pi t, \quad n = 8$

2. $x(t) = (1 - 3t) \exp(-t^2), \quad n = 4$

3. $x(t) = (1 - 4t^2) \exp(-4t^2), \quad n = 6$

4. $x(t) = (t + 1) t g t, \quad n = 3$

5. $x(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad n = 4$

6. $x(t) = (t^3 - t^2) \exp(-t^2), \quad n = 4$

7. $x(t) = (t - 1) \cos \pi t - t^2, \quad n = 6$

8. $x(t) = t^2 \exp(-4t^2), \quad n = 8$

9. $x(t) = (t^2 - t) t g t, \quad n = 4$

10. $x(t) = \frac{2t + 1}{\cos t}, \quad n = 3$

11. $x(t) = (3t + 1) \cos \pi t, \quad n = 5$

12. $x(t) = (t + 1) \exp(-2t^2), \quad n = 4$

13. $x(t) = (2t - 1) \sin \pi t, \quad n = 5$

14. $x(t) = t \exp(-t^2), \quad n = 3$

15. $x(t) = \frac{4t^3 - 1}{\cos t}, \quad n = 4$

16. $x(t) = t^2 \sin t + \cos 2t, \quad n = 3$

17. $x(t) = (t - 2t^2) \exp(-t^2), \quad n = 4$

18. $x(t) = \frac{1 - t^2}{1 + \sin t}, \quad n = 4$

19. $x(t) = t \cos \pi t, \quad n = 5$

20. $x(t) = \exp(-4t^2), \quad n = 6$

Образец решения

$$x(t) = (2t + 1)e^{-t^2}, \quad n = 4$$

Решение этой задачи опирается на теоретические сведения, изложенные в конспекте лекций: понятие многочленов Чебышёва (§9, пункт 9.2, §10, пункт 10.2), определение ряда Фурье и его связь с задачей аппроксимации (§11, §12). Как отмечено в §12, для аппроксимации функции можно использовать как ряд Фурье, так и ряд Тейлора. У каждого способа есть свои преимущества.

А. Аппроксимация многочленами Чебышёва I рода.

Многочлены Чебышёва I рода образуют ортогональный (после нормировки – ортонормированный) базис в гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(-1;1)$, $\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Обозначим этот ортонормированный базис следующим образом:

$$\{T_0(t), T_1(t), T_2(t), \dots, T_k(t), \dots\}.$$

Составим для функции x частичную сумму ряда Фурье (4-го порядка) по системе многочленов Чебышёва I рода:

$$Cheb_4(t) = \sum_{k=0}^4 c_k T_k(t), \quad c_k = (x, T_k)_\xi = \int_{-1}^1 \frac{(2t+1)e^{-t^2} T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

На рисунке 15 представлены графики функций x и $Cheb_4$ (пунктиром).

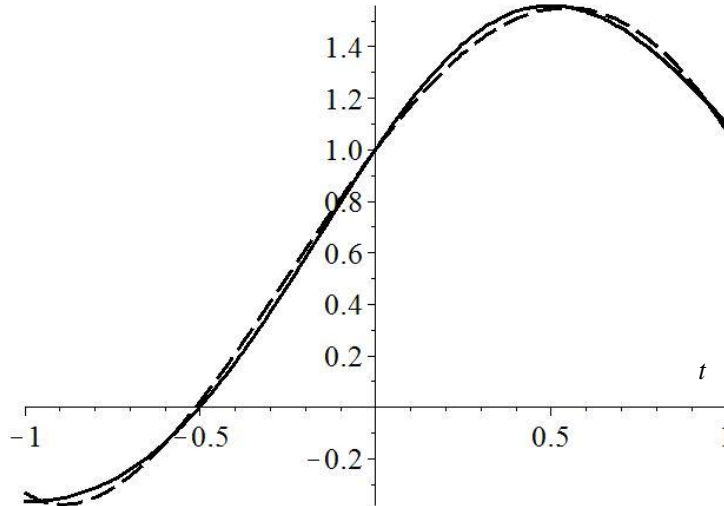


Рис. 15

В. Аппроксимация многочленом Тейлора.

Составим для функции x многочлен Тейлора 4-ой степени в точке $t_0 = 0$:

$$Taylor_4(t) = x(0) + \frac{x'(0)}{1!}t + \frac{x''(0)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0)}{3!}t^3 + \frac{x^{IV}(0)}{4!}t^4 = 1 + 2t - t^2 - 2t^3 + \frac{t^4}{2}.$$

На рисунке 16 представлены графики функций x и $Taylor_4$ (пунктиром).

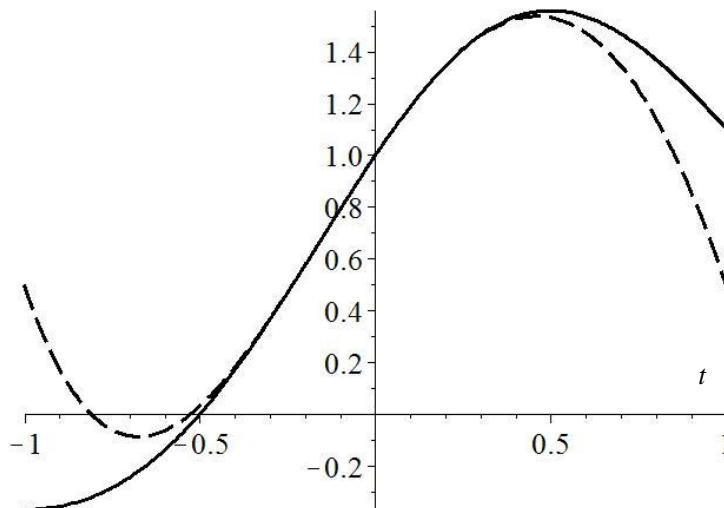


Рис. 16

По графикам можно предположить, что многочлены Чебышёва I рода в целом лучше аппроксимируют функцию x на промежутке $[-1;1]$, но вблизи нуля более точную аппроксимацию дает многочлен Тейлора. Подтвердим эти наблюдения численно.

Чтобы оценить качество аппроксимации вблизи нуля, рассмотрим пробные точки $t = 0.2$, $t = 0.1$:

$$\begin{aligned} |x(0.2) - \text{Cheb}_4(0.2)| &\approx 0.03428, & |x(0.1) - \text{Cheb}_4(0.1)| &\approx 0.02193, \\ |x(0.2) - \text{Taylor}_4(0.2)| &\approx 0.00031, & |x(0.1) - \text{Taylor}_4(0.1)| &\approx 0.00001. \end{aligned}$$

Действительно, вблизи нуля значения многочлена Тейлора гораздо ближе к значениям функции x , чем значения аппроксимации многочленами Чебышёва.

Чтобы оценить качество равномерной аппроксимации на промежутке $[-1; 1]$, надо вычислить расстояния в метрике $C[-1; 1]$:

$$\begin{aligned} \|x - \text{Cheb}_4\|_{C[-1; 1]} &= \max_{t \in [-1; 1]} |x(t) - \text{Cheb}_4(t)| \approx 0.039, \\ \|x - \text{Taylor}_4\|_{C[-1; 1]} &= \max_{t \in [-1; 1]} |x(t) - \text{Taylor}_4(t)| \approx 0.868. \end{aligned}$$

Итак, многочлены Чебышёва дают более точную равномерную аппроксимацию функции x на промежутке $[-1; 1]$.

25. Даны числа c_k – коэффициенты разложения некоторой элементарной функции $x = x(t)$ в ряд Фурье по указанной системе многочленов. Восстановить функцию x :

- построить график частичной суммы ряда Фурье достаточно высокого порядка;
- по виду графика сделать предположение о том, какова формула функции x , и обосновать предположение численно.

Для вычислений и построения графиков использовать математические пакеты.

1. $c_0 = -\sqrt{\pi} \ln 2$, $c_k = \frac{(-1)^{k-1} \sqrt{2\pi}}{k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Чебышёва I рода

2. $c_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $c_{2k} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(4k^2 - 1)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Чебышёва I рода

3. $c_{2k+1} = \frac{(-2)^k \sqrt[4]{4\pi}}{e\sqrt{(2k+1)!}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Эрмита

4. $c_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$, $c_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+3)} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Чебышёва II рода

5. $c_k = \frac{1}{2^{k+1}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Лагерра

6. $c_{2k} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{4}} \frac{(-1)^k \sqrt{(2k)!}}{4^k k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Эрмита

7. $c_{2k+1} = \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^k (\sqrt{2}-1)^{2k+1}}{2k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Чебышёва I рода

8. $c_0 = \frac{4}{3}$, $c_k = -\frac{4}{(2k-1)(2k+3)\sqrt{2k+1}}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Лежандра

9. $c_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $c_{2k} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^{k+1}}{(4k^2 - 1)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Чебышёва I рода

10. $c_k = \sqrt[4]{e\pi} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k!}}, k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Эрмита
11. $\{c_k\}_{k=0}^\infty = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, 0, -\frac{1}{64}, -\frac{1}{64}, \dots\right)$, многочлены Лагерра
12. $c_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}, k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Чебышёва II рода
13. $c_0 = -\sqrt{\pi} \ln 2, c_k = -\frac{\sqrt{2\pi}}{k}, k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Чебышёва I рода
14. $c_0 = \frac{4}{3}, c_k = \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+3)\sqrt{2k+1}}, k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Лежандра
15. $c_0 = -\gamma$ (константа Эйлера), $c_k = -\frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Лагерра
16. $c_0 = \frac{\sqrt{\pi^3}}{2}, c_{2k+1} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2k+1)^2}, k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Чебышёва I рода
17. $c_k = \frac{\sqrt[4]{e\pi}}{\sqrt{2^k k!}}, k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Эрмита
18. $\{c_k\}_{k=0}^\infty = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, 0, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, 0, \dots\right)$, многочлены Лагерра
19. $c_0 = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}, c_{2k} = -\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2k-1)(2k+1)(2k+3)}, k = 1, 2, 3, \dots$, многочлены Чебышёва II рода
20. $c_{2k} = \frac{(-2)^k \sqrt[4]{\pi}}{e\sqrt{(2k)!}}, k = 0, 1, 2, \dots$, многочлены Эрмита

Образец решения

$$c_{2k+1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2k+1)^2}, k = 0, 1, 2, \dots, \text{многочлены Чебышёва I рода}$$

Решение этой задачи опирается на теоретические сведения, изложенные в конспекте лекций: описание полиномиальных базисов в весовых пространствах $L^{2,\xi}(a;b)$ (§9, пункт 9.2, §10, пункт 10.2), определение и сходимость ряда Фурье (§11).

Многочлены Чебышёва I рода образуют ортогональный (после нормировки – ортонормированный) базис в гильбертовом пространстве $L^{2,\xi}(-1;1)$, $\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Обозначим

этот ортонормированный базис следующим образом:

$$\{T_0(t), T_1(t), T_2(t), \dots, T_k(t), \dots\}.$$

Любую функцию $x \in L^{2,\xi}(-1;1)$ можно разложить в ряд Фурье по этому базису. И наоборот, по известным коэффициентам Фурье можно восстановить функцию x . Причем в данном случае известны коэффициенты Фурье только с нечетными номерами, остальные по умолчанию равны нулю:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} T_{2k+1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2k+1)^2} T_{2k+1}(t).$$

Построим график частичной суммы ряда Фурье достаточно высокого порядка (рис.17).

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{100} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2k+1)^2} T_{2k+1}(t).$$

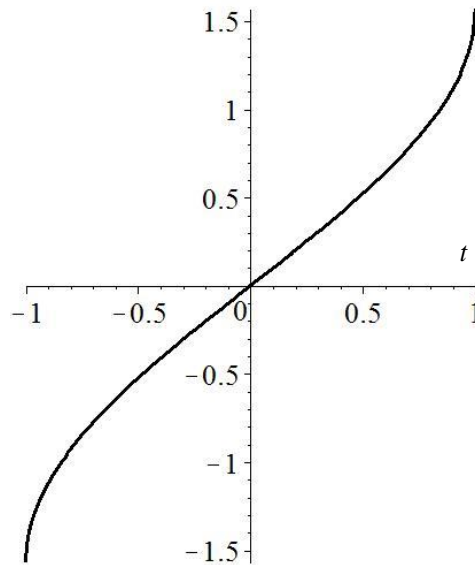


Рис. 17

Порядок частичной суммы ряда Фурье выбран настолько большим, чтобы дальнейшее его увеличение не вносило визуально различимых изменений в график. По виду графика выдвигаем гипотезу: $x(t) = \arcsin t$.

Для обоснования гипотезы проверим численные данные.

Во-первых, сравним значения норм для функций $x(t)$ и $\arcsin t$ в пространстве

$L^{2,\xi}(-1;1)$, $\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Норму функции $x(t)$ можно выразить через ее коэффициенты Фурье

с помощью равенства Парсеваля (см. конспект лекций, §11, равенство (11.4)):

$$\|x\|_{L^{2,\xi}(-1;1)} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^4}} = \sqrt{\frac{\pi^3}{12}}.$$

Норму функции $\arcsin t$ вычисляем непосредственно:

$$\|\arcsin t\|_{L^{2,\xi}(-1;1)} = \sqrt{\int_{-1}^1 \frac{(\arcsin t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt} = \sqrt{\frac{\pi^3}{12}}.$$

Как видим, значения норм совпадают, а значит, гипотеза может быть верна.

Во-вторых, убедимся, что несколько первых коэффициентов Фурье для функции $\arcsin t$ совпадают с данными задачи:

$$c_0 = (\arcsin t, T_0)_{\xi} = \int_{-1}^1 \frac{\arcsin t \cdot T_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0,$$

$$c_1 = (\arcsin t, T_1)_{\xi} = \int_{-1}^1 \frac{\arcsin t \cdot T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$c_2 = (\arcsin t, T_2)_{\xi} = \int_{-1}^1 \frac{\arcsin t \cdot T_2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0,$$

$$c_3 = (\arcsint, T_3)_\xi = \int_{-1}^1 \frac{\arcsint \cdot T_3(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{\pi}},$$

$$c_4 = (\arcsint, T_4)_\xi = \int_{-1}^1 \frac{\arcsint \cdot T_4(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0,$$

$$c_5 = (\arcsint, T_5)_\xi = \int_{-1}^1 \frac{\arcsint \cdot T_5(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2\sqrt{2}}{25\sqrt{\pi}},$$

$$c_6 = (\arcsint, T_6)_\xi = \int_{-1}^1 \frac{\arcsint \cdot T_6(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0,$$

$$c_7 = (\arcsint, T_7)_\xi = \int_{-1}^1 \frac{\arcsint \cdot T_7(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2\sqrt{2}}{49\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, гипотеза $x(t) = \arcsin t$ правдоподобна. Для стопроцентного доказательства потребовалось бы проверить совпадение всех коэффициентов Фурье.