Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»
(СПбГМТУ)

Кафедра математики

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ПО ТЕМЕ 4

ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Санкт-Петербург
2006

Составители: Сорокин В.Н. Высшая математика. Тема 4.3 Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Редактор Фишкина И. Н. СПб.: Изд. Центр СПбГМТУ, 2006г с. 54

Образец типового расчета

Найти производные функций (задания 1÷9)

1. $y = \dfrac{\left(x^2 - 2\right)\sqrt{1 - 2x^3}}{x^3 - x}$.

2. $y = \sqrt{\operatorname{tg} e^x}\left(x^5 + 1\right)$.

3. $y = \arcsin\sqrt{1 - 2^{4x}}$.

4. $y = \sqrt{2}\,\sqrt[5]{\operatorname{arctg}\left(x^4 + 2x\right)}$.

5. $y = \sqrt{\dfrac{x}{3} - 1}\,\sin\dfrac{1}{x} + \left(x^2 + 18\right)\sqrt{\cos x}$.

6. $y = \dfrac{x^3 - \sqrt{x - 1}}{\ln(5x + \operatorname{tg} x)}$.

7. $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{m^2 + n^2}\,\sin(nx + 3)}{m}\right)$.

8. $y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 1\right)$.

9. $y = x^{2^{\cos x}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{3x^3 - 2x + 7}$ в точке $x = 1{,}12$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = t^3 + \sin t \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно. $\sqrt{x} + y^2 = xy$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения $y = \dfrac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}$ при $x \in [-2{,}8]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = \cos^2 x + x^2 - 1$ в точке $x_0 = 0$.

15. Построить графики функций $y = \left(\dfrac{x}{x - 1}\right)^2$, $y = \ln\dfrac{x}{x - 1} + 2$.

Решение типового варианта

Справочный материал

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале (a, b), и точка $x_0 \in (a, b)$. Если приращение аргумента Δx в точке x_0 таково, что $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, то приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при условии, что Δx стремится к нулю (если этот предел существует и конечен).

Производную обозначают $f'(x_0)$, y' или y'_x.

Таким образом, по определению

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При вычислении производных пользуемся известными правилами дифференцирования, а также формулами производных основных элементарных функций, приведенными в таблице.

Функция $f(x)$, имеющая конечную производную в каждой точке интервала (a, b), называется дифференцируемой на этом интервале, а операция нахождения производной – дифференцированием.

Правила дифференцирования

1. $(c)' = 0$;

2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$;

3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

4. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$;

5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$;

6. $y'_x = \left(f(u(x))\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таблица производных основных элементарных функций

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(x)' = 1\,;\ \left(x^2\right)' = 2x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Задачи 1 ÷ 9.

1. Найти производную функции

$$y = \frac{\left(x^2 - 2\right)\sqrt{1 - 2x^3}}{x^3 - x}.$$

Решение задачи

По правилу дифференцирования частного двух функций производную заданной функции можно записать в виде

$$y' = \frac{\left(\left(x^2 - 2\right)\sqrt{1 - 2x^3}\right)'\left(x^3 - x\right) - \left(\left(x^2 - 2\right)\sqrt{1 - 2x^3}\right)\left(x^3 - x\right)'}{\left(x^3 - x\right)^2}.$$

Производную числителя $\left(\left(x^2 - 2\right)\sqrt{1 - 2x^3}\right)'$ найдем по правилу произведения двух функций, одна из которых – сложная, т. е. производную от заданной функции можно записать в виде

$$\left(\left(x^2 - 2\right)\sqrt{1 - 2x^3}\right)' = \left(x^2 - 2\right)'\sqrt{1 - 2x^3} + \left(x^2 - 2\right)\left(\sqrt{1 - 2x^3}\right)' =$$

$$= 2x\sqrt{1 - 2x^3} + \left(x^2 - 2\right)\frac{1}{2\sqrt{1 - 2x^3}}\left(-6x^2\right) =$$

$$= \frac{4x\left(1 - 2x^3\right) - \left(x^2 - 2\right)6x^2}{2\sqrt{1 - 2x^3}}.$$

Производная знаменателя $\left(x^3 - x\right)' = 3x^2 - 1$.

Подставим найденные выражения в формулу для производной частного и запишем производную от заданной функции в виде.

$$y' = \frac{\dfrac{4x\left(1-2x^3\right)-\left(x^2-2\right)6x^2}{2\sqrt{1-2x^3}}\left(x^3-x\right)-\left(\left(x^2-2\right)\sqrt{1-2x^3}\right)\left(3x^2-1\right)}{\left(x^3-x\right)^2}.$$

2. Найти производную функции $y=\sqrt{\operatorname{tg} e^x}\left(x^5+1\right).$

Решение задачи

По правилу дифференцирования произведения производную от заданной функции можно записать в виде

$$y' = \left(\sqrt{\operatorname{tg} e^x}\right)'\left(x^5+1\right)+\sqrt{\operatorname{tg} e^x}\left(x^5+1\right)'.$$

Функция $\sqrt{\operatorname{tg} e^x}$ – сложная. Поэтому ее производную вычислим, используя правило дифференцирования сложной функции. Т.к.

$$\left(\sqrt{\operatorname{tg} e^x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} e^x}}\left(\operatorname{tg} e^x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} e^x}}\frac{1}{\cos^2 e^x}\left(e^x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} e^x}}\frac{1}{\cos^2 e^x}e^x,$$

$$\left(x^5+1\right)' = 5x^4,$$

то $$y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} e^x}}\frac{1}{\cos^2 e^x}e^x\left(x^5+1\right)+\sqrt{\operatorname{tg} e^x}\,5x^4.$$

3. Найти производную функции $y=\arcsin\sqrt{1-2^{4x}}$.

Решение задачи

Производную от этой функции вычислим, используя правило дифференцирования сложной функции.

$$\left(\arcsin\sqrt{1-2^{4x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-2^{4x}\right)}}\left(\sqrt{1-2^{4x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2^{4x}}}\frac{1}{2\sqrt{1-2^{4x}}}\left(1-2^{4x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{4^x}\frac{1}{2\sqrt{1-2^{4x}}}\left(-16^x\right)\ln 16,$$

$$y' = \left(\arcsin\sqrt{1-2^{4x}}\right)' = \frac{1}{4^x}\frac{1}{2\sqrt{1-2^{4x}}}\left(-2^{4x}\right)4\ln 2.$$

4. Найти производную функции $y = \sqrt{2}\sqrt[5]{\operatorname{arctg}\left(x^4+2x\right)}$.

Решение задачи

Постоянную $\sqrt{2}$ вынесем за знак производной и используем правило дифференцирования сложной функции. Получим

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\operatorname{arctg}\left(x^4+2x\right)\right)^{-\frac{4}{5}}\left(\operatorname{arctg}\left(x^4+2x\right)\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\operatorname{arctg}\left(x^4+2x\right)\right)^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{1+\left(x^4+2x\right)^2}\left(x^4+2x\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\operatorname{arctg}\left(x^4+2x\right)\right)^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{1+\left(x^4+2x\right)^2}\left(4x^3+2\right).$$

Таким образом,

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{5}\left(\operatorname{arctg}\left(x^4+2x\right)\right)^{-\frac{4}{5}}\frac{1}{1+\left(x^4+2x\right)^2}\left(4x^3+2\right).$$

5. Найти производную функции

$$y = \sqrt{\frac{x}{3}-1}\,\sin\frac{1}{x} + \left(x^2+18\right)\sqrt{\cos x}.$$

Решение задачи

Производная суммы двух функций равна сумме их производных, поэтому

$$y' = \left(\sqrt{\frac{x}{3}-1}\,\sin\frac{1}{x}\right)' + \left(\left(x^2+18\right)\sqrt{\cos x}\right)'.$$

Каждое слагаемое дифференцируем по правилу дифференцирования произведения.

$$y' = \left(\sqrt{\frac{x}{3}-1}\right)'\left(\sin\frac{1}{x}\right) + \left(\sqrt{\frac{x}{3}-1}\right)\left(\sin\frac{1}{x}\right)' +$$

$$+\left(x^2+18\right)'\left(\sqrt{\cos x}\right) + \left(x^2+18\right)\left(\sqrt{\cos x}\right)',$$

тогда

$$y' = \frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)}{2\sqrt{\frac{x}{3}-1}}\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{x}{3}-1}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x\sqrt{\cos x} + \frac{\left(x^2+18\right)}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x).$$

6. Найти производную функции $y = \dfrac{x^3-\sqrt{x-1}}{\ln(5x+\operatorname{tg} x)}$.

Решение задачи

По правилу дифференцирования частного двух функций производную от заданной функции можно записать в виде

$$y' = \frac{\left(x^3-\sqrt{x-1}\right)'\ln(5x+\operatorname{tg} x) - \left(x^3-\sqrt{x-1}\right)\left(\ln(5x+\operatorname{tg} x)\right)'}{\left(\ln(5x+\operatorname{tg} x)\right)^2}.$$

Найдем производную числителя $\left(x^3-\sqrt{x-1}\right)'$ как производную разности двух функций.

$$\left(x^3-\sqrt{x-1}\right)' = \left(x^3\right)' - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x-1)' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot 1.$$

Функция $\ln(5x+\operatorname{tg}x)$ – сложная. Поэтому производную найдем, используя правило дифференцирования сложной функции.

$$\left(\ln\left(5x+\operatorname{tg}x\right)\right)' = \frac{1}{5x+\operatorname{tg}x}\left(5x+\operatorname{tg}x\right)' = \frac{1}{5x+\operatorname{tg}x}\left(5+\frac{1}{\cos^2 x}\right),$$

$$\left(\ln\left(5x+\operatorname{tg}x\right)\right)' = \frac{1}{5x+\operatorname{tg}x}\left(5+\frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

Подставим вычисленные производные в формулу для производной частного и запишем производную от заданной функции

$$y' = \frac{\left(3x^2-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)\ln(5x+\operatorname{tg}x) - \dfrac{1}{5x+\operatorname{tg}x}\left(5+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\left(x^3-\sqrt{x-1}\right)}{\left(\ln(5x+\operatorname{tg}x)\right)^2}.$$

7. Найти производную функции

$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{m^2+n^2}\,\sin(nx+3)}{m}\right).$$

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{m^2+n^2}\,\sin(nx+3)}{m}\right)\right)' = \frac{\dfrac{n}{m}\sqrt{m^2+n^2}\,\cos(nx+3)}{1+\left(\dfrac{\sqrt{m^2+n^2}\,\sin(nx+3)}{m}\right)^2}.$$

8. Найти производную функции $y = \operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)$.

$$y' = \left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)}\frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\frac{1}{2}.$$

9. Найти производную функции $y = x^{2^{\cos x}}$.

Решение задачи

Заданная функция называется показательно-степенной. Запишем эту функцию, используя основное логарифмическое тождество $y = e^{\ln y}$. Получаем функцию в виде $y = e^{\ln x^{2^{\cos x}}}$ или, используя свойства логарифма, $y = e^{2^{\cos x} \ln x}$.

Тогда, пользуясь правилами дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = e^{2^{\cos x} \ln x}\left(2^{\cos x} \ln x\right)' = e^{2^{\cos x} \ln x}\left(\left(2^{\cos x}\right)' \ln x + 2^{\cos x}(\ln x)'\right) =$$

$$= e^{2^{\cos x} \ln x}\left(2^{\cos x} \ln 2(-\sin x)\ln x + 2^{\cos x} \frac{1}{x}\right).$$

Задача 10

Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{3x^3 - 2x + 7}$ в точке $x = 1{,}12$.

Справочный материал

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную не равную нулю, и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Приращение функции Δy запишем в виде $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Дифференциалом называется линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке и обозначается dy,где $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$.- ее дифференциал.

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$, и число Δx достаточно мало. Отбрасывая $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, получаем приближенно $\Delta y \approx dy$. Тогда из формулы приращения функции Δy можно получить соотношение

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Решение задачи 10

Требуется вычислить значение функции $y=\sqrt[3]{3x^3-2x+7}$ в точке $x=1{,}12$. Представим $x=x_0+\Delta x$ так, чтобы значение функции в точке x_0 легко вычислялось, а Δx было бы достаточно (с учетом точности вычислений) малым.

Ясно, что в предложенной задаче удобно взять $x_0=1$ и $\Delta x=0{,}12$.

$$f(x_0)=\sqrt[3]{3\cdot 1^3-2\cdot 1+7}=\sqrt[3]{8}=2,$$

$$y'=\left(\sqrt[3]{3x^3-2x+7}\right)'=\frac{1}{3}\left(3x^3-2x+7\right)^{-\frac{2}{3}}\left(9x^2-2\right),$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{3}(3-2+7)^{-\frac{2}{3}}(9-2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 7=\frac{7}{12}.$$

Поскольку $\Delta y\approx dy=\frac{7}{12}\cdot 0{,}12=0{,}07$, то

$$y=\sqrt[3]{3x^3-2x+7}\Big|_{x=1{,}12}\approx 2+0{,}07=2{,}07.$$

Задача 11

Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции

$$\begin{cases} x=\ln^2 t \\ y=t^3+\sin t \end{cases}.$$

Справочный материал

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде двух уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где t – параметр. Если функции $y(t)$ и $x(t)$ дифференцируемы в точке t, то функция $y = f(x)$ также дифференцируема в точке $x(t)$, и ее производную находим по правилу

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Вторую производную y''_{xx} будем искать как производную по t от первой производной y'_x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Решение задачи 11

Найдем производные от функций $y(t)$ и $x(t)$ по t.

$$x'_t = 2\ln t \cdot \frac{1}{t}, \; y'_t = 3t^2 + \cos t.$$

Найдем вторые производные $y''_{tt}(t)$ и $x''_{tt}(t)$ по t как производные от $y'_t(t)$ и $x'_t(t)$ по t. Производную x''_{tt} будем искать как производную произведения.

$$x''_{tt} = 2\left((\ln t)'_t \frac{1}{t} + \ln t\left(\frac{1}{t}\right)'_t\right) = 2\left(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t} + \ln t\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right) = \frac{2}{t^2}(1 - \ln t),$$

$$y''_{tt} = 6t - \sin t.$$

Подставим полученные выражения в формулы для $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3t^2+\cos t}{2\ln t\frac{1}{t}}=\frac{3t^3+t\cos t}{2\ln t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}=\frac{(6t-\sin t)2\ln t\frac{1}{t}-\left(3t^2+\cos t\right)\frac{2}{t^2}(1-\ln t)}{\left(2\ln t\frac{1}{t}\right)^3}=$$

$$=\frac{(6t-\sin t)t^2\ln t-\left(3t^2+\cos t\right)t(1-\ln t)}{4(\ln t)^3}.$$

Задача 12

Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно.

$$\sqrt{x}+y^2=xy.$$

Справочный материал

Пусть дифференцируемая в точке x функция $y=y(x)$ задана соотношением $F(x,y)=0$ и, следовательно, ее производная равна нулю. При этом функция $F(x,y(x))$ дифференцируема в точке x. Производную $y'(x)$ можно определить из равенства $(F(x,y(x)))'_x=0$,так как функция $F(x,y(x))$ тождественно равна нулю. Далее выражаем $y'(x)=F_1(x,y(x))$. Для того чтобы найти $y''(x)$, функция $F_1(x,y(x))$ в точке x должна быть дифференцируема. Тогда $y''(x)=(F_1(x,y(x)))'_x$.

Решение задачи

Производную y'_x следует определять из равенства

$$\left(\sqrt{x}+y^2-xy\right)_x' = 0\,.$$

Вычислим все производные в левой части этого соотношения, используя правила дифференцирования.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+2yy_x'-y-xy_x' = 0\,.$$

Из полученного равенства определим производную y_x'.

$$(2y-x)\cdot y_x' = y-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,,$$

$$y_x' = \frac{y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2y-x)}\,.$$

Найдем вторую производную $y''(x)$ как производную частного.

$$y_{xx}'' = \left(\frac{y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2y-x)}\right)_x' = \frac{\left(y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)_x'(2y-x)-(2y-x)_x'\left(y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2y-x)^2} =$$

$$= \frac{\left(y_x'+\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)(2y-x)-(2y_x'-1)\left(y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2y-x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2y-x)}+\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)(2y-x)-\left(2\,\dfrac{y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(2y-x)}-1\right)\left(y-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2y-x)^2}\,.$$

Задача 13

Найти наибольшее и наименьшее значения $y=\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x}$ при $x\in[-2,8]$.

Справочный материал

Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале (a,b), если для любых $x_1,x_2\in(a;b)$, удовлетворяющих условию $x_1>x_2$, справедливо неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ ($f(x_1)<f(x_2)$).

Если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всех значений $x\in(a;b)$, то функция возрастает (убывает) на интервале (a,b);

Функция $f(x)$, определенная на интервале (a,b), имеет в точке $x_0\in(a,b)$ локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки x_0, что $f(x_0)>f(x)$ ($f(x_0)<f(x)$) для всех x из этой окрестности.

При нахождении экстремума функции воспользуемся необходимым условием его существования. Если дифференцируемая в окрестности точки $x_0\in(a,b)$ функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то ее производная в точке x_0 равна нулю (или не существует). Из необходимого условия следует, что если производная дифференцируемой в точке x_0 функции отлична от нуля, то в точке x_0 у этой функции нет экстремума.

Точки, в которых производная заданной функции равна нулю, называются стационарными. Стационарные точки функции $f(x)$, а также точки, в которых производная $f'(x)=\infty$ или не существует, называются критическими. Только в этих точках следует искать экстремум функции.

Достаточным для существования экстремума является следующее условие. Если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0, $f'(x_0)=0$ (или не существует) и производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум:

с плюса на минус – максимум;

с минуса на плюс – минимум.

Непрерывная на замкнутом промежутке функция, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения могут достигаться в точках экстремума, а также на концах промежутка.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $(a;b)$, нужно:

- найти все ее критические точки;
- вычислить значения функции во всех критических точках;
- вычислить значения $f(a)$ и $f(b)$;
- среди полученных чисел найти самое большое и самое маленькое.

Решение задачи

Заданная функция непрерывна на всей числовой оси. Ее производная равна

$$y' = \left(\tfrac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}\right)' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Производная $y'=0$ в точках $x=\pm 1$, и производная y' не существует в точке $x=0$. Вычислим значения функции в этих точках:

$$y(-1)=\tfrac{2}{3},\; y(1)=-\tfrac{2}{3},\; y(0)=0.$$

Значения функции на концах заданного промежутка равны:

$$y(-2)=-\tfrac{2}{3}+\sqrt[3]{2}\approx 0.593...,\; y(8)=\tfrac{2}{3}.$$

Следовательно, наибольшее значение функции $y=\frac{2}{3}$ при $x=-1$ и $x=8$, наименьшее значение функции $y=-\frac{2}{3}$ при $x=1$.

Задача 14

Исследовать характер поведения функции $y=\cos^2 x+x^2-1$ в точке $x_0=0$.

Справочный материал

Если функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0, и все ее производные до производной n-го порядка в этой точке равны нулю, то есть $f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n)}(x_0)=0$, а $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, то:

если $n+1$ – нечетное число, то в точке x_0 – перегиб;

если $n+1$ – четное число, то в точке x_0 – экстремум.

В случае экстремума.

$$f^{(n+1)}(x_0)<0 \Rightarrow x_0 \text{ – точка максимума;}$$

$$f^{(n+1)}(x_0)>0 \Rightarrow x_0 \text{ – точка минимума.}$$

Решение задачи

Продифференцируем выражение $y=\cos^2 x+x^2-1$ по x,

$$y'=\left(\cos^2 x+x^2-1\right)'=2\cos x(-\sin x)+2x=-\sin 2x+2x$$
$$\Rightarrow y'(0)=0,$$

$$y''=(y')'=(-\sin 2x+2x)'=-2\cos 2x+2 \Rightarrow y''(0)=0,$$

$$y'''=(y'')'=(-2\cos 2x+2)'=4\sin 2x \Rightarrow y'''(0)=0.$$

$$y^{IV}=(y''')'=8\cos 2x \Rightarrow y^{IV}(0)=8\neq 0.$$

Поскольку $y^{IV}(0)=8>0$, то функция имеет в точке $x=0$ минимум $y=1$.

Задача 15

Построить графики функций $y=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$, $y=\ln\dfrac{x}{x-1}+2$.

Справочный материал

Для построения графика функции требуется провести полное исследование данной функции по следующему плану.

1. Область определения $D(f)$ функции (О.О.Ф.), точки разрыва функции и вертикальные асимптоты.

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$ или

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

2. Четность функции, периодичность функции.

Функция $f(x)$ называется четной (нечетной) если

$$f(-x) = f(x) \ (f(-x) = -f(x)) \ \forall x \in D(f).$$

В противном случае функция называется функцией общего вида.

О.О.Ф. для четной (нечетной) функции симметрична относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется периодической если найдется такое число $T \neq 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для $\forall x \in D(f)$.

3. Корни и промежутки знакопостоянства.

4. Исследование с помощью первой производной (монотонность функции, экстремумы).

5. Исследование с помощью второй производной (выпуклость функции, точки перегиба).

Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз (выпуклой вверх) на промежутке (a,b), если ее график лежит выше (ниже) своей касательной, проведенной в любой точке с абсциссой $x_0 \in (a, b)$.

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке (a,b), и вторая производная $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) для всех значений $x \in (a,b)$, то $f(x)$ выпукла вниз (выпукла вверх) на промежутке (a,b).

Точки, в которых меняется характер выпуклости функции, называются точками перегиба**.**

6. Наклонные (горизонтальные) асимптоты.

Прямая $y = k\,x + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существуют конечные пределы.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Частный случай наклонной асимптоты – горизонтальная асимптота, в том случае если $k = 0$.

Необходимо помнить, что пределы на $\pm\infty$ могут быть различными.

Для того чтобы построить график исследованной функции, нужно.

1. ввести прямоугольную систему координат;

2. провести вертикальные и наклонные асимптоты;

отметить все характерные точки (корни, точки экстремума, точки перегиба);

соединить характерные точки кривыми в соответствии с исследованием функции на выпуклость.

Решение задачи 15.1

$$y = \left(\frac{x}{x-1} \right)^2,$$

$$y = \left(x + \frac{1}{x-1} \right)^2.$$

1. О.О.Ф.. $x \neq 1$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$, то $x = 1$ – точка разрыва второго рода, и прямая $x = 1$ – вертикальная асимптота.

2. Функция общего вида и непериодическая.

$$y(-x) = \left(\frac{-x}{-x-1} \right)^2 = \left(\frac{x}{x+1} \right)^2.$$

3. Корень функции точка $x = 0$ $y(0) = 0$. Функция неотрицательна при всех значениях x.

4. Вычислим первую производную функции.

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right) \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{2x}{(x-1)^3}.$$

Найдем корни производной $y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Отметим на числовой оси стационарную точку $x = 0$ и точку разрыва функции $x = 1$. Определим знак первой производной на каждом из полученных интервалов и отметим стрелками характер монотонности функции (рис.1).

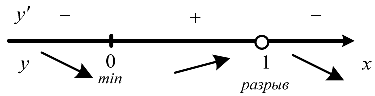

Рис 1.

Из рисунка ясно, что $x = 0$ – точка минимума. Для построения графика требуется найти значение функции в точке минимума $y(0) = 0$. В точке разрыва меняется характер монотонности функции.

5. Вычислим вторую производную заданной функции.

$$y''(x) = -2 \cdot \frac{(x-1)^3 - 3(x-1)^2 x}{(x-1)^6} = -2 \cdot \frac{x-1-3x}{(x-1)^4} = 2 \cdot \frac{2x+1}{(x-1)^4}.$$

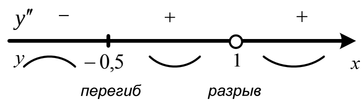

Рис 2.

Вторая производная обращается в ноль в точке $x = -\frac{1}{2}$ и меняет знак при переходе через эту точку. Значит $x = -\frac{1}{2}$ - точка перегиба. При переходе через точку $x = 1$ вторая производная знак не меняет, значит точки перегиба нет. Определим знак второй производной на всей числовой оси и отметим на ней характер выпуклости функции(рис.2).

Значение функции в точке перегиба $y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}$.

6. Выясним, имеет ли функция наклонную асимптоту вида $y=kx+b$. Для этого вычислим пределы.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x\cdot(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

Следовательно, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=1$.

График заданной функции построен на рисунке.

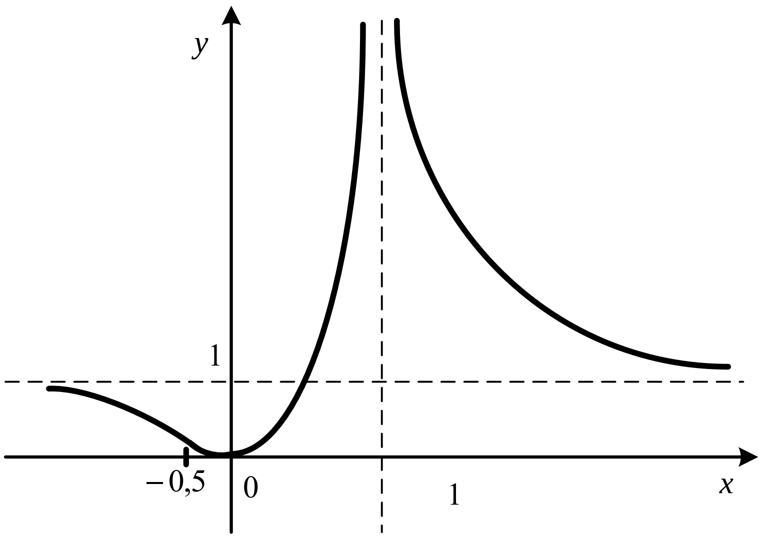

Рис 3.

Решение задачи 15.2

$$y = \ln\frac{x}{x-1} + 2 .$$

1. О.О.Ф.. $x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$. Поскольку $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$, то прямые $x=0$ и $x=1$ – вертикальные асимптоты.

2. Функция общего вида и непериодическая.

3. Корень функции.

$$\ln\frac{x}{x-1} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = e^2 \Rightarrow x - 1 = xe^2 \Rightarrow x = \frac{1}{1-e^2} \approx -0{,}157...$$

4. Вычислим первую производную функции.

$$y' = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x(x-1)} .$$

Производная корней не имеет, значит, критических точек нет.

Отметим на числовой оси точки $x=0$ и $x=1$. Определим знак первой производной на каждом из полученных интервалов и отметим стрелками характер монотонности функции.

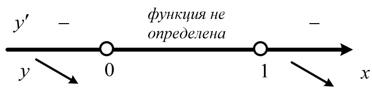

Рис 4.

Из рисунка ясно, что функция точек экстремума не имеет.

5. Вычислим вторую производную заданной функции.

$$y' = -\frac{1}{x(x-1)} .$$

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{x-1+x}{x^2(x-1)^2} = \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} .$$

Вторая производная обращается в ноль в точке $x=\frac{1}{2}$, и эта точка не попадает в область определения функции. Определим знак второй производной на всей числовой оси и отметим на ней характер выпуклости функции.

Рис 5.

6. Выясним, имеет ли функция наклонную асимптоту вида $y = kx + b$. Для этого вычислим пределы.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x}{x-1}+2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\ln\frac{x}{x-1}+2\right)=2.$$

Следовательно, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=2$.

График заданной функции построен на рисунке.

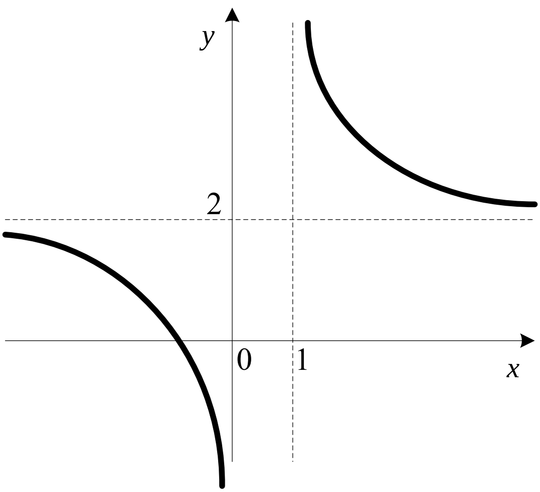

Рис 6.

Вариант № 1

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$.

2. $y = \dfrac{e^x}{2}[(x^2-1)\cos x + (x-1)^2 \sin x]$.

3. $y = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}$.

4. $y = (2x^2+6x+5)\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - x$.

5. $y = \dfrac{2}{3x-2}\sqrt{12x-9x^2} + \ln\dfrac{1+\sqrt{12-9x^2}}{3x-2}$.

6. $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$.

7. $y = 2\dfrac{\cos x}{\sin^4 x} + 3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

8. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\dfrac{x}{2} - 5$.

9. $y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg} x}$

10. Вычислить приближенно значение $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ в точке $x = 1{,}58$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \dfrac{3t+1}{3t^3} \\ y = \sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right) \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^2\sin y + y^3\cos x - 2x - 3y + 1 = 0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$ при $x \in [1,4]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x+1-e^x)$ в точке $x_\circ = 0$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x^2}{x-2}$, $y = \dfrac{17-x^2}{4x-5}$.

Вариант № 2

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = 3\dfrac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x + 1}$.

2. $y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)/8$.

3. $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^x})$.

4. $y = \arcsin\dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}$.

5. $y = \dfrac{4x + 1}{16x^2 + 8x + 3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{4x + 1}{\sqrt{2}}$.

6. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + \arcsin x$.

7. $y = x\cos a + \sin a \ln\sin(x - a)$.

8. $y = \cos x \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

9. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg}\frac{x}{4}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ в точке $x = 1{,}012$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\dfrac{t + 1}{t - 1} \\ y = \arcsin\left(1 - t^2\right) \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $e^y + xy = e^{2x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{2(x + 2)^2(1 - x)}$ при $x \in [-3{,}4]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 4x - x^2 - 2\cos(x - 2)$ в точке $x_\circ = 2$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x + 3}$, $y = x^2 + \dfrac{4}{x + 2}$.

Вариант № 3

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.

2. $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x-1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}-e^x+1}$.

3. $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.

4. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\dfrac{8}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

5. $y=\arcsin e^{-4x}+\ln(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1})$.

6. $y=x\sqrt{x^2+1}+3\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

7. $y=\dfrac{1}{1+(\ln 2)^2}\left(2^x(\sin x+\cos x)\right)$.

8. $y=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

9. $y=(\sin x)^{5e^x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$ в точке $x=0{,}01$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=(t-1)^{-2/3} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\sin(y-x^2)-\ln(y-x^2)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$ при $x\in[0,6]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=(x-1)\sin(x-1)+2x-x^2$ в точке $x_\circ=1$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$, $y=\dfrac{2}{(3-x)^2(5-x^2)}$.

Вариант № 4

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

2. $y=3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)$.

3. $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$.

4. $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

5. $y=\dfrac{2x-1}{4x^2-4x+3}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}$.

6. $y=x^3\arcsin x+\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

7. $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}$.

8. $y=x\ln x-(x+1)^{\frac{1}{4}}$.

9. $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt{1+x+\sin x}$ в точке $x=0{,}01$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\arcsin(\sin t) \\ y=\arccos\dfrac{1}{t^2-1} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ при $x\in[-3{,}3]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=x^2-2x-(x-1)\ln x$ в точке $x_\circ=1$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{4x^2+9}{4x+8}$, $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

Вариант № 5

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

2. $y=\dfrac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}})$.

3. $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$.

4. $y=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$.

5. $y=\dfrac{2}{3}\left(4x^2-x\right)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\arcsin\dfrac{1}{2x-1}$.

6. $y=3\arcsin\dfrac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$.

7. $y=\dfrac{5^x(\sin 3x\ln 5-3\cos 3x)}{9+\ln 5}$.

8. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-3$.

9. $y=(\ \ln x)^{3^x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt[5]{x^2}$ в точке $x=1{,}03$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases}x=\ln\left(t+\sin t^2\right)\\ y=t\sqrt{t^2+1}\end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x\sin\ y+y\sin\ x=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения $y=2\sqrt{x}-x$ при $x\in[0{,}4]$.

14. Исследовать поведения функции $y=\cos^2(x-1)+x^2-2x$ в точке $x_\circ=1$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{4x^3+3x^2-8x-2}{2-3x^2}$, $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+1}$.

Вариант № 6

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

2. $y = \dfrac{e^{x^3}}{1+x^3}$.

3. $y = \ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

4. $y = \dfrac{2x-5}{4}\sqrt{5x-x^2} + \arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{3}}$.

5. $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{-3-4x-x^2}}{-x-2} - \dfrac{2}{x+2}\sqrt{-3-4x-x^2}$.

6. $y = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x - \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

7. $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\cos x - 3\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$.

8. $y = x\arcsin\dfrac{1}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

9. $y = x^{\arcsin x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = x^5$ в точке $x = 2{,}997$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2} \\ y = \arcsin(\mathrm{t}-1) \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^y - y^x = 0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ при $x \in [-1{,}5]$.

14. Исследовать характер поведения функции

$y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4$ в точке $x_\circ = -2$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x}{2} + \mathrm{arctg}\,x$, $y = \dfrac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$.

Вариант № 7

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.

2. $y=x-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}-(\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}})^2$.

3. $y=\ln^2(x+\cos x)$.

4. $y=\operatorname{arctg}x+\dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$.

5. $y=\ln(2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10})-\sqrt{4x^2-12x+10}\operatorname{arctg}(2x-3)$.

6. $y=2\arcsin\dfrac{2}{3x+4}+\sqrt{9x^2+24x+2}$.

7. $y=\dfrac{4^x(\ln 4\sin 4x-4\cos 4x)}{16+\ln^2 4}$.

8. $y=\sqrt{1+2x}-\ln(x+\sqrt{1+2x})$.

9. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{2e^x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt{x^3}$ в точке $x=0{,}98$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\left(2e^t\right) \\ \mathrm{y}=\ln\operatorname{tg}e^t \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно:

$x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$y=x-4\sqrt{x}+5$ при $x\in[1.9]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=x^2-2x-2e^{x-2}$ в точке $x_\circ=2$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{2x^2-6}{x-2}$, $y=\dfrac{2x^2+4}{x^2-4}$.

Вариант № 8

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{\sqrt[3]{3x^5 - 2x}}{x+7}$.

2. $y = \operatorname{tg} \ln x - 2e^{-x} + \dfrac{1}{\cos 2x}$.

3. $y = (1 + \cos^2 x) \operatorname{arcctg} \sqrt{1+x}$.

4. $y = \dfrac{2x \operatorname{ctg} 3x}{\sqrt{x}} - 3^{-\arccos\sqrt{x}}$.

5. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1} + \operatorname{arctg}(e^{-x})$.

6. $y = (1 - \operatorname{tg}\dfrac{1}{x})\sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{\arccos 3x}{\sqrt[3]{3x+2}}$.

7. $y = \dfrac{2^x(\sin ax + \ln\cos ax)}{1 + \sin^2 \alpha}$.

8. $y = e^{2x}\sqrt{\cos^2 x - x} - xe^{-4x}$.

9. $y = (\sin x)^{e^x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{1 + 13x}$ в точке $x = 2{,}01$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \cos\ln t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = e^x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ при $x \in [0,1]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 6e^{x+1} - (x+1)^3 - 3(x+1)^2 - 6x + 1$ в точке $x_\circ = -1$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Вариант № 9

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.

2. $y=\ln(e^x+\sqrt{e^x-1})+\operatorname{arsin}e^{-x}$.

3. $y=\ln\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

4. $y=\dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}$.

5. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{x-1}{x^2-2x+3}$.

6. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

7. $y=\dfrac{5^x(2\sin 2x+\cos 2x\cdot\ln 5)}{4+\ln^2 5}$.

8. $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}$.

9. $y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ в точке $x=1{,}016$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases}x=\operatorname{arctg}e^t\\ y=\sqrt{e^t+1}\end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^3+y^3-3xy=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$ при $x\in[-3{,}3]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=4x-x^2+(x-2)\sin(x-2)$ в точке $x_\circ=2$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{x}{16-x^2}$, $y=\dfrac{x^3-5x}{5-3x^2}$.

Вариант № 10

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^{0,5})^{0,5}}{x^{1,5}}}$.

2. $y=x+\dfrac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$.

3. $y=\ln\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2})$.

4. $y=\dfrac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2}+\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}$.

5. $y=(3x^2-4x)\sqrt{9x^2-12x}+(3x-4)^4\arcsin\dfrac{1}{3x}$.

6. $y=\sqrt{1-3x-2x^2}+\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{4x+3}{\sqrt{17}}$.

7. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x-4}}$.

8. $y=\arccos\dfrac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$.

9. $y=(\cos 5x)^{e^x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt{4x-1}$ в точке $x=2{,}56$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^3+\ln y-x^2e^y=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$ при $x\in[2,4]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=x^2+2\ln(x+2)$ в точке $x_\circ=-1$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{x^2-6x+4}{3x+2}$, $y=3x+1+\dfrac{12}{x-5}$.

Вариант № 11

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

2. $y=x-3\ln\left[\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{6}}}\right]-3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}$.

3. $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-x}}$.

4. $y=6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{6+x}{2}\sqrt{x(4-x)}$.

5. $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{-3+4x+x^2}}{2-x}+\dfrac{2}{2-x}\sqrt{4x+x^2}$.

6. $y=\sqrt{(4+x)(1+x)}+3\ln(\sqrt{4+x}+\sqrt{1+x})$.

7. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{1-\operatorname{tg}x}$.

8. $y=\ln(\cos^2x+\sqrt{1+\cos^4x})$.

9. $y = x\sin x^{\operatorname{tg}x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=x^7$ в точке $x=1{,}996$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\ln\left(\sqrt{1-t^4}\right) \\ y=\sin\dfrac{\left(1-t^2\right)}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $a^{\frac{x}{y}}=(xy)^a$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ при $x\in[-1,2]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=x^2+4x+\cos^2(x+2)$ в точке $x_{\circ}=-2$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$, $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

Вариант № 12

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

2. $y=x+\dfrac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

3. $y=x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}})+a^{3x}$.

4. $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{\arccos x}{2x^2}$.

5. $y=\sqrt{x^2+17}\,\mathrm{arctg}(x-4)-\ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x}\right)$.

6. $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

7. $y=\dfrac{6^x(\sin 4x\ln 6-4\cos 4x)}{16+\ln^2 6}$.

8. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}x$.

9. $y=\left(x^3+4\right)^{\mathrm{tg}\,x}$.

10. Вычислить приближенно $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=8{,}24$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^y=y^x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x\in[-1{,}6]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=\sin^2(x+1)-2x-x^2$ в точке $x_\circ=-1$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{x}{x^2-4}$, $y=\dfrac{4x^2-3x}{4x^2-1}$.

Вариант № 13

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

2. $y=e^{ax}\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a\cos x+2b\sin bx}{2\left(a^2+4b^2\right)}\right)$.

3. $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$.

4. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

5. $y=\ln(1+\sqrt{1-e^{10x}})-e^{-5x}\arcsin(e^{5x})$.

6. $y=\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}-x^2}}{x}$.

8. $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x}{1+x^2}$.

9. $y=x^{\sin x^3}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=x^6$ в точке $x=2{,}01$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases}x=\arcsin\sqrt{1-t^2}\\ y=\left(\arccos t\right)^2\end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{2\left(-x^2+7x-7\right)}{x^2-2x+2}$ при $x\in[1,4]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=2x+x^2-(x+1)\ln(2+x)$ в точке $x_\circ=-1$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$, $y=\dfrac{3x^2}{x^2+9}$.

Вариант № 14

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$.

2. $y=\ln(e^x+1)+\frac{18e^{2x}+27e^x+11}{6(e^x+1)^3}$.

3. $y=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

4. $y=(x-4)\sqrt{8x-x^2}-9\arccos\sqrt{x-1}$.

5. $y=3x-\ln(1+\sqrt{1-e^{6x}})-e^{-3x}\arcsin(e^{3x})$.

6. $y=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

7. $y=\ln\frac{\sin x}{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}$.

8. $y=\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}$.

9. $y=x^{3^x}\,2^x$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt{x^2+x+3}$ в точке $x=1{,}97$.

11. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\frac{1}{\ln t} \\ y=\ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $e^x\sin y-e^y\cos x=0$

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ при $x\in[-2,1]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=1-2x-x^2+2\cos(x+1)$ в точке $x_\circ=-1$.

15. Построить графики функций $y=\frac{x^2-11}{4x-3}$, $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

Вариант № 15

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

2. $y = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - 2\,\mathrm{arctg}\, e^x$.

3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{1+2\,\mathrm{tg}^2 x})$.

4. $y = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\, x$.

5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{3x-1}{3x^2-2x+1}$.

6. $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{x+3}} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{x^2-1}\right)\mathrm{arctg}\, x$.

7. $y = \dfrac{7^x(3\sin 3x + \cos 3x \ln 7)}{9+\ln^2 7}$.

8. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$.

9. $y = (\cos\sqrt{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 26{,}46$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t} \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $2y\ln y = x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ при $x \in [-2,1]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$ в точке $x_\circ = 1$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x+1}{x(x+2)}$, $y = \dfrac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$.

Вариант № 16

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = 2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

2. $y = \dfrac{1}{\ln 4}\ln\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$.

3. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$.

4. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

5. $y = \dfrac{\sqrt{9x^2-12x}}{\operatorname{arctg} x} - \ln(x+\sqrt{9x^2-12x})$.

6. $y = \sqrt{(3-x)(2+x)} + 5\arcsin\sqrt{(x+2)/5}$.

7. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}$.

8. $y = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$.

9. $y = x^{2^x} 5^x$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 27{,}54$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x + \dfrac{16}{x-1} - 13$ при $x \in [2,5]$.

14. Исследовать характер поведения $y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1$ $x_\circ = 1$ точке.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x^3+x^2-3x-1}{2x^2-2}$, $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

Вариант № 17

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

2. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-3}{2}$.

3. $y = \ln(\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}})$.

4. $y = \dfrac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \dfrac{9}{8}\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$.

5. $y = 2x - \ln(1+\sqrt{1-e^{4x}}) - \arcsin(e^{2x})$.

6. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$.

7. $y = (\sin\ln x - (\sqrt{2}-1)\cos\ln x)x^{\sqrt{2}}$.

8. $y = (\sqrt{x-10} - 18)e^{2\sqrt{x-3}}$.

9. $y = x^{e^{\sin x}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \dfrac{1}{2}(x+\sqrt{5-x^2})$ в точке $x = 0{,}98$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \ln(1-t^2) \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ при $x \in [1{,}5]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$ в точке $x_\circ = 2$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, $y = \dfrac{(3x^2-10)}{\sqrt{4x^2-1}}$.

Вариант № 18

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2 - x}}{x^2}$.

2. $y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln\dfrac{\sqrt{e^x+1} - 1}{\sqrt{e^x+1} + 1}$.

3. $y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2})$.

4. $y = \arccos\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$.

5. $y = \dfrac{2}{x-1}\sqrt{2x - x^2} + \ln\dfrac{1 + \sqrt{2x - x^2}}{x-1}$.

6. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1} + \ln\dfrac{8 + \sqrt{x - x^3}}{4x - 1}$.

7. $y = 3\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$.

8. $y = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$.

9. $y = x^{e^{\cos x}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \arcsin x$ в точке $x = 0{,}08$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ при $x \in [0,4]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1)$ в точке $x_{\circ} = 2$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{(x^2 + 2x - 1)}{(2x+1)}$, $y = \dfrac{x^3 + 4}{2x^2}$.

Вариант № 19

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{x^6 + 8x^3 - 128}{\sqrt{8 - x^3}}$.

2. $y = 2(x-2)\sqrt{1+e^x} - 2\ln\sqrt{1+e^x} + 1$.

3. $y = \dfrac{1}{3}x(\cos\ln x + \sin\ln x)$.

4. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

5. $y = \ln\dfrac{1+2\sqrt{-x-x^2}}{2x+1} + \dfrac{4}{2x+1}\sqrt{-x-x^2}$.

6. $y = (2+3x)\sqrt{x-1} + \dfrac{2}{5}\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

7. $y = (1+x^2)e^{\operatorname{arctg} x}$.

8. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{1}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$.

9. $y = (x^2+1)^{\cos x}$.

10. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 1{,}21$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \ln\dfrac{1-t}{1+t} \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$ при $x \in [-4{,}2]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$ в точке $x_\circ = -1$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{21-x^2}{7x+9}$, $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

Вариант № 20

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

2. $y=\dfrac{x}{2}(\sqrt{3^x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1})$.

3. $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$.

4. $y=\dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2}+\dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$.

5. $y=\ln(1+\sqrt{16x^2-8x+2})-\sqrt{16x^2-8x}\operatorname{arctg}(4x-1)$.

6. $y=\dfrac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\ln(\sqrt{x+1}+1)$.

7. $y=-\dfrac{1}{3\sin^3 x}-\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$.

8. $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}$.

9. $y=19^{x^{19}}x^{19}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=x^{11}$, в точке $x=1{,}021$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{t} \\ y=\sqrt{\cos t^2-1} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\sin(xy)+\cos(xy)=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$ при $x\in[-4,-1]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=x^2+6x+8-2e^{x+2}$ в точке $x_\circ=-2$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{3x}{1+x^2}$, $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$.

Вариант № 21

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.

2. $y=e^{ax}(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x)/\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.

3. $y=\log_{16}\log_5 \operatorname{tg} x$.

4. $y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}$.

5. $y=\dfrac{x+2}{x^2+4x+6}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}$.

6. $y=4\arcsin\dfrac{4}{2x+3}+\sqrt{4x^2+12x-7}$.

7. $y=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{a}{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x\sin\dfrac{a}{2}}{1-x^2}$.

8. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin e^{-x}$.

9. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $x=1{,}03$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{\ln t}}{t} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x-4\sqrt{x+2}+8$ при $x\in[-1,7]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=6e^{x-1}-3x-x^3$ в точке $x_\circ=-1$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{x^3}{3}-x$, $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}$.

Вариант № 22

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^3}$.

2. $y = e^{ax}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)/\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.

3. $y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$.

4. $y = \dfrac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)} + 3\arccos\sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

5. $y = (2x+3)^4 \arcsin\dfrac{1}{2x+3} + \dfrac{2}{3}\left(4x^2+11\right)\sqrt{x^2+3x+2}$.

6. $y = 2\arcsin\dfrac{2}{3x+1} + \sqrt{9x^2+6x-3}$.

7. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x\operatorname{ctg} x}$.

8. $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2}$.

9. $y = (\sin x)^{x^2}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = x^{21}$ в точке $x = 0{,}998$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \left(1+\cos^2 t\right)^2 \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, при $x \in [1,5]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2$ в точке $x_\circ = -1$.

15. Построить графики функций $y = 1 - \dfrac{2x}{x^2+1}$, $y = \dfrac{x^3+3x^2-2x-2}{2-3x^2}$.

Вариант № 23

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{x-1}{\left(x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$.

2. $y = \dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\operatorname{arctg} e^x\right)^3}$.

3. $y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$.

4. $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}$.

5. $y = \dfrac{x^4}{81} \arcsin \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{81}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}$.

6. $y = x \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\arcsin x - x\right)$.

7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\sin x}{b}\right)$.

8. $y = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)$

9. $y = x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}$ в точке $x = 0{,}97$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \left(\arcsin t\right)^2 \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения $y = -\dfrac{2\left(x^2+3\right)}{x^2+2x+5}$ при $x \in [-5{,}1]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x$ в точке $x_{\circ} = -1$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x^3+2x^2-3}{2x^2}$, $y = \dfrac{x^3-2x^2-3x+2}{1-x^2}$.

Вариант № 24

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = 3\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)^2}$.

2. $y = x - \ln\left(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^{x+1}}\right)$.

3. $y = \ln\dfrac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$.

4. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x}{\sqrt{2}}$.

5. $y = \dfrac{x^4}{16}\arcsin\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{24}\left(x^2 + 18\right)\sqrt{x^2 - 4}$.

6. $y = x^3 \arccos x - \dfrac{x^2 + 2}{3}\sqrt{1 - x^2}$.

7. $y = \dfrac{1}{\sin a}\ln(\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}a)$.

8. $y = \sqrt{x} - (1 + x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

9. $y = x^{e^{\operatorname{arcctg}x}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 7{,}76$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \ln\operatorname{tg}t \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{8}{x-2} + 5$ при $x \in [-2{,}1]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$ в точке $x_\circ = 2$.

15. Построить графики функций $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$, $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - 9x - 3}{2x - 3}$.

Вариант № 25

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

2. $y=x-e^{-x}\arcsin e^x-\ln\left(1+\sqrt{1-e^{2x}}\right)$.

3. $y=\ln^3(1+\cos x)$.

4. $y=\dfrac{2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

5. $y=\ln(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1})+\arcsin(e^{-5x})$.

6. $y=x(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

7. $y=\dfrac{3^x(4\sin 4x+\ln 3\cos 4x)}{16+\ln^2 3}$.

8. $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$.

9. $y=x^{e^{\operatorname{tg} x}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ в точке $x=4{,}16$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\operatorname{tg} t \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Dy+F=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{10x}{1+x^2}$ при $x\in[0;3]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=6e^x-x^3-3x^2-6x-5$ в точке $x_\circ=0$.

15. Построить графики функций $y=\dfrac{3x^2-1}{x}$, $y=\dfrac{2x^3+2x^2-3x-1}{2-4x^2}$.

Вариант 26

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{(x^3 - 3x)\sqrt{x^2 - 2x^4}}{4x + 5}$.

2. $y = \sqrt{\sin x + \cos x} + \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - x}{\sqrt{1 - x^2} + x}$.

3. $y = \operatorname{arctg}(\sin a \ \operatorname{tg}\dfrac{x}{5})$.

4. $y = \ln\left(\sqrt{x} - 2^{\operatorname{ctg}^3 x}\right)$.

5. $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}\sqrt{2x - x^2} + \ln \operatorname{arctg}\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$.

6. $y = \sqrt{3^x + \sqrt{3^x + \sqrt{3^x}}}$.

7. $y = \dfrac{\sin^2 x}{x \cos x} + \dfrac{x}{\cos^6 x}$.

8. $y = e^{\sin x}(3\sin 2x + 2\sin 2x)$.

9. $y = \left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^{e^{\cos x}}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \ln(1 + x)$ в точке $x = 0{,}03$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln(t + \operatorname{tg} t) \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\ln x + \ln y = xy$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{2x^2(x - 3)}$ при $x \in [-1; 3]$.

14. Исследовать поведения $y = 2e^x + 2\sin x - x^2 - 4x$ в точке $x_\circ = 0$.

15. Построить графики функции $y = x^3 e^{-x}$, $y = \left(\dfrac{x - 3}{x + 3}\right)^2$.

Вариант 27

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{x^4 - 3x + 5}{\sqrt{x} - 4}$.

2. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \arcsin^2\left(e^{-2x}\right)$.

3. $y = \dfrac{1}{2x^2} \arcsin(\sin a + 2x)$.

4. $y = e^{\operatorname{ctg}^2 x} \dfrac{\sqrt{x}}{3} + 2\sin^2 x$.

5. $y = x \ln \dfrac{1 - \operatorname{tg} 3x}{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}$.

6. $y = \dfrac{\sqrt{1 - e^{-x}}}{\ln \operatorname{tg} x}$.

7. $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

8. $y = \log_2(2\sin 2x + \cos 2x)$.

9. $y = (\sin 3x)^{\ln\left(1 - 2x^2\right)}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = x^5$ в точке $x = 1{,}02$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = \arcsin^2 t \\ y = t \ln t \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $\cos(x + y) = xy$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt[3]{100 - x^2}$ при $x \in [-6;8]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 2e^{x-1} - 2\cos(x-1) - 2x(x-1) - \dfrac{1}{3}(x-1)^3$ в точке $x_\circ = 1$.

15. Построить графики функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $y = x \operatorname{arctg} x$.

Вариант 28

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y = \dfrac{x\sqrt{2x^2 + x^5}}{x^3 - 5x}$.

2. $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}} + \ln\left(x + \sqrt{1 + x}\right)$.

3. $y = \operatorname{arctg}^3(1 + \sqrt[4]{x})$.

4. $y = 3^{\cos^2 2x} \arcsin\sqrt{x}$.

5. $y = \dfrac{\ln \arcsin\sqrt{1 - x}}{xe^{-2x}} + \operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$.

6. $y = \dfrac{5^{-\cos x}\sqrt{1 - x^4}}{\operatorname{ctg}^3 x}$.

7. $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} \ln\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1 - x}{1 + \sin x}\right)$.

8. $y = \dfrac{1 + 2x}{\log_3(1 - \operatorname{tg} x)} \ln\left(2x + \dfrac{2}{x^2}\right)$.

9. $y = \left(\dfrac{\cos^2 x}{1 + 2x}\right)^{\sin x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ в точке $x = 1{,}03$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^4 + y^4 = 4xy$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ при $x \in [0; 4]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y = 2\ln x + (x - 2)^2$ в точке $x_\circ = 1$.

15. Построить графики функции $y = \dfrac{x^2}{x^4 - 1}$, $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

Вариант 29

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x^2+x}}{x^4-5x}$.

2. $y=\sqrt{\sqrt{1+x}-\ln^3 x}$.

3. $y=\arcsin^{\frac{1}{3}}(3-\cos x^2)$.

4. $y=e^{\sin^4 3x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

5. $y=\dfrac{\ln\ln\sin x}{e^x+\cos x}+\mathrm{tg}\dfrac{1}{x-1}$.

6. $y=\dfrac{5^{x^2}\sqrt{1-4x^3}}{\mathrm{ctg}^{\frac{1}{2}}x}$.

7. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-x^2}}{5x}\mathrm{arctg}^2(x-3x^5)$.

8. $y=\dfrac{3x-\mathrm{tg}\,x}{\log_4\sin x}2^{\cos x+5}$.

9. $y=\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x+10}}\right)^{\sin x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x-1}}$ в точке $x=2{,}03$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=t^{\sqrt{5}}+\sqrt{2}t \\ y=\ln\mathrm{tg}\,t \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^5+y^3=4\dfrac{x}{y}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^4-4x^2+2$ при $x\in[-2;2]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=4(x-2)-(x-2)^2-2\cos(x-4)$ в точке $x_\circ=2$.

15. Построить графики функции $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$, $y=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$.

Вариант 30

Найти производные функций (задания 1÷9).

1. $y=\dfrac{\sqrt{2-x^5}}{5x^2-2x}$.

2. $y=\arccos\left(2^{-x^2}\right)+\ln\left(x^2-3\right).$

3. $y=\dfrac{\arcsin^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

4. $y=\sqrt{x}\sin\left(x\cdot e^{\cos x}\right).$

5. $y=\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\log_4\dfrac{1-\sqrt{3x}}{1-\sqrt{2x}}$.

6. $y=\dfrac{e^{-\cos^2 x}\sqrt{1+3x}}{\operatorname{ctg}^3 x}$.

7. $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\ln\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x}{1+\sin x}\right).$

8. $y=\ln(1-\operatorname{tg}^3 x)e^{-\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}}$.

9. $y=\operatorname{tg}x^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

10. Вычислить приближенно значение $y=\sqrt{x^2-2x+1}$ в точке $x=2{,}03$.

11. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для параметрической функции $\begin{cases} x=\sqrt{t+1} \\ y=\ln\left(1+e^t\right) \end{cases}$.

12. Найти y' и y'' для функции $y(x)$, заданной неявно: $x^2+y^2-\sqrt{x^2+y^2}+1=0$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения $y=x+2\sqrt{x}$ при $x\in[0;4]$.

14. Исследовать характер поведения функции $y=2e^x-2\cos x-2x(x+1)-\dfrac{1}{3}x^3$ в точке $x_\circ=0$.

15. Построить графики функции $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$, $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ **.**