

4. Решение систем линейных алгебраических уравнений

4.1 Цель работы

Целью работы является изучение численных методов решения систем линейных уравнений. В настоящей работе рассматривается метод Гаусса и итерационный метод решения систем уравнений.

4.2 Задание

Решить систему уравнений методом Гаусса и методом Зейделя.

$$\begin{aligned} 1. & \begin{cases} 3,1x_1 + 1,5x_2 + x_3 = 10,9 \\ 1,5x_1 + 2,5x_2 + 0,5x_3 = 9,2 \\ x_1 + 0,5x_2 + 4,2x_3 = 17,1 \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} 3,2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3,7x_2 + x_3 = 4,5 \\ x_1 + x_2 + 4,2x_3 = 5 \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} 2,5x_1 + 5,2x_2 + 4,6x_3 = -1,1 \\ -3,5x_1 + 2,6x_2 + 1,5x_3 = -11,5 \\ -6,5x_1 - 3,5x_2 + 7,3x_3 = -17,7 \end{cases} \\ 4. & \begin{cases} 6,1x_1 + 2,2x_2 + 1,2x_3 = 16,6 \\ 2,2x_1 + 5,5x_2 - 1,5x_3 = 10,6 \\ 1,2x_1 - 1,5x_2 + 7,2x_3 = 16,8 \end{cases} \\ 5. & \begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2,8 \\ x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 7 \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = -17 \end{cases} \\ 6. & \begin{cases} 8,7x_1 + 2,2x_2 + 5,7x_3 = 49,9 \\ -1,4x_1 + 10,7x_2 + 5,2x_3 = 50,2 \\ 2,5x_1 - 0,5x_2 + 6,8x_3 = 32,7 \end{cases} \\ 7. & \begin{cases} 24,2x_1 + 2,4x_2 + 3,9x_3 = 30,2 \\ 2,3x_1 + 31,5x_2 + 1,5x_3 = 41 \\ 3,5x_1 + 4,9x_2 + 28,7x_3 = 42,8 \end{cases} \\ 8. & \begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,7 \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,5 \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 20,8 \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9. & \begin{cases} x_1 + 0,4x_2 + 0,5x_3 + 0,7x_4 = 0,3 \\ 0,4x_1 + x_2 + 0,3x_3 + 0,4x_4 = 0,5 \\ 0,5x_1 + 0,3x_2 + x_3 + 0,2x_4 = 0,7 \\ 0,7x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 + x_4 = 0,9 \end{cases} \\
10. & \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3,3x_3 + x_4 = 4,8 \\ 3x_1 - 3x_2 - 4,3x_3 + 2x_4 = 8,9 \\ x_1 - 5x_2 + 3,3x_3 - 20x_4 = -14, \\ 2,5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -20,3 \end{cases} \\
11. & \begin{cases} x_1 + 0,2x_2 - 0,3x_3 + 0,5x_4 = 0,3 \\ 0,5x_1 + x_2 + 0,7x_3 - 0,3x_4 = 0,5 \\ -0,1x_1 + 0,4x_2 + x_3 - 0,7x_4 = 0,7 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 + 0,4x_3 + x_4 = 0,9 \end{cases} \\
12. & \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 0,1x_3 + x_4 = 2,7 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 + 4x_3 - 8,5x_4 = 21,9 \\ 0,3x_1 - 6x_2 + x_3 + 5,2x_4 = -3,9 \\ x_1 + 0,2x_2 + 2,5x_3 - x_4 = 9,9 \end{cases} \\
13. & \begin{cases} 8,3x_1 + 2,6x_2 + 4,1x_3 + 1,9x_4 = -10,7 \\ 3,9x_1 + 8,5x_2 + 7,8x_3 + 2,5x_4 = 12,2 \\ 3,8x_1 + 7,2x_2 + 8x_3 + 2,3x_4 = 15,5 \\ 2,2x_1 + 3,7x_2 + 1,7x_3 + 7x_4 = -8,4 \end{cases} \\
14. & \begin{cases} 3,8x_1 + 0,3x_2 + 1,3x_3 + 5,8x_4 = 4,2 \\ 2,3x_1 + 1,3x_2 + 4,6x_3 + 0,5x_4 = 6,5 \\ 5,3x_1 + 6,3x_2 + x_3 + 1,1x_4 = 2,4 \\ 9,4x_1 + 2,5x_2 + 3,4x_3 + 2,3x_4 = 10,5 \end{cases} \\
15. & \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -12 \\ 2x_1 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases} \\
16. & \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3,2x_3 + x_4 = 4,8 \\ 3x_1 - 3x_2 - 4,3x_3 + 8x_4 = 8,9 \\ x_1 - 5x_2 + 3,3x_3 - 20x_4 = -14 \\ 2,5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -20,3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17. & \begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 + 0,16x_4 = 8 \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 - 0,12x_4 = 9 \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 + 0,06x_4 = 20 \\ 0,02x_1 + 0,06x_2 + 0,04x_3 - 10x_4 = 1 \end{cases} \\
18. & \begin{cases} 10,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = -7 \\ 1,2x_1 + 11,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 5,3 \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 9,8x_3 + 1,3x_4 = 10,3 \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 12,1x_4 = 24,6 \end{cases} \\
19. & \begin{cases} 3,8x_1 + x_2 + 0,8x_3 + 0,8x_4 = 15,7 \\ 1,1x_1 + 4,5x_2 + x_3 + 1,5x_4 = 22,7 \\ 0,7x_1 + 0,9x_2 + 4,7x_3 + 0,8x_4 = 23,5 \\ 0,9x_1 + 0,8x_2 + 1,3x_3 + 3,5x_4 = 16,1 \end{cases} \\
20. & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 4x_5 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -8 \end{cases} \\
21. & \begin{cases} -3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -3 \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_5 = 5 \end{cases} \\
22. & \begin{cases} 7,6x_1 - 2,1x_2 + 4,2x_3 - 2,1x_4 + x_5 = 28,3 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 8,5x_4 - 6x_5 = -36,2 \\ 3x_1 + 5,9x_2 - 7,3x_3 - 6x_4 + 3,4x_5 = 24,5 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 16,2 \\ x_1 - 4,7x_2 + 6,5x_3 + x_4 - 3x_5 = 4,3 \end{cases} \\
23. & \begin{cases} 5,7x_1 - 2,1x_2 + 5,1x_3 - 2,4x_4 + 1,2x_5 = 28,4 \\ 0,7x_1 + 3,9x_2 - 6,2x_3 + 4,8x_4 - 5,9x_5 = -36 \\ 2,9x_1 + 5,7x_2 - 7x_3 - 9,2x_4 + 3,6x_5 = 24,5 \\ 2,1x_1 + 3,1x_2 - 0,8x_3 + 3,9x_4 - 6,1x_5 = -16,2 \\ 1,2x_1 - 4,8x_2 + 0,5x_3 - 3,2x_5 = 4,3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
24. \quad & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + x_5 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 7x_5 = 14 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 16 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 18 \end{cases} \\
25. \quad & \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0,5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 - 3x_5 = 5,4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 7,5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 3,3 \end{cases}
\end{aligned}$$

4.3 Теоретические сведения

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (4.1)$$

или в матричной форме:

$$A \cdot X = B,$$

где:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Произвольная система уравнений вида (4.1) в общем случае может иметь единственное решение, не иметь решения или иметь бесконечное множество решений.

Методы численного решения системы линейных уравнений подразделяются на точные (конечные) и итерационные (бесконечные). Точные методы дают решение с помощью конечного числа арифметических операций, которые можно определить заранее. Итерационные методы дают решение системы уравнений как предел бесконечной последовательности приближений. На практике итерационный процесс прекращается при достижении заданной точности решения.

4.3.1 Метод исключения (метод Гаусса)

Относится к точным методам. Решение системы из n уравнений выполняется в два этапа.

На первом этапе (прямой ход) исходная система уравнений (4.1) приводится к эквивалентной системе уравнений с треугольной матрицей коэффициентов. Прямой ход состоит из $(n-1)$ шагов. На k -ом шаге соответствующее уравнение вычитается из оставшихся уравнений с целью исключить k -тое неизвестное.

Введем $(n-1)$ множителей:

$$M_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Вычтем из каждого i -го уравнения первое, домноженное на M_i . Предполагается, что a_{11} не равно нулю. Введем обозначение:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - M_i \cdot a_{1j}; \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

$$b_i^{(1)} = b_i - M_i \cdot b_1; \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Для всех уравнений, начиная со второго, будут выполняться равенства $a_{i1}^{(1)} = 0; \quad i = 2, 3, \dots, n$.

Преобразованная система уравнений запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Таким же образом можно исключить x_2 из оставшихся $(n-2)$ уравнений, затем x_3 из оставшихся $(n-3)$ уравнений и т.д. На k -ом этапе исключаем x_k с помощью множителей

$$M_i^{(k-1)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = k+1, k+2, \dots, n$$

Предполагается, что $a_{kk}^{(k-1)}$ не равны нулю. Новые значения коэффициентов системы уравнений и правых частей вычисляются по зависимостям:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - M_i^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k-1)}; \quad i = k+1, k+2, \dots, n;$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - M_i^{(k-1)} \cdot b_k^{(k-1)}; \quad i = k, k+1, \dots, n$$

Индекс k принимает последовательные целые значения от 1 до $(n-1)$ включительно и означает номер того уравнения, которое вычитается из остальных, а также номер того неизвестного, которое исключается из оставшихся $(n-k)$ уравнений. При $k=n-1$ из последнего уравнения исключается x_{n-1} неизвестное.

В результате выполнения прямого хода получается эквивалентная система линейных уравнений с треугольной матрицей коэффициентов вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

Точность решения системы линейных уравнений методом Гаусса в значительной степени зависит от значений коэффициентов M_i при исключении неизвестных. При минимальных абсолютных значениях M_i точность решений будет максимальной. Минимальные значения M_i имеют место при максимальных абсолютных значениях a_{kk} .

Выбор максимального коэффициента $|a_{kk}|$ осуществляется перестановкой уравнений в системе.

При этом необходимо добиться того, чтобы $|a_{kk}^{(k-1)}| \geq |a_{ik}^{(k-1)}|$.

На втором этапе (обратном ходе) решения системы линейных уравнений находятся значения неизвестных по формулам:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}} \\ &\dots\dots\dots \\ x_j &= \frac{b_j^{(j-1)} - a_{j,n}^{(j-1)} \cdot x_n - \dots - a_{j,j+1}^{(j-1)} \cdot x_{j+1}}{a_{j,j}^{(j-1)}} \quad j = n-2, n-3, \dots, 1 \end{aligned}$$

Общее число арифметических операций S , необходимых для решения системы уравнений (4.1) методом Гаусса определяется по формуле:

$$S = \frac{2}{3}n(n+1)(n+2) + n(n-1),$$

или для больших n :

$$S \approx \frac{1}{3}n^3.$$

4.3.2 Итерационные методы решения систем линейных уравнений

Систему (4.1) преобразуем к итерационному виду.

Возможны два способа преобразования системы. Первым способом система преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ \dots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \dots - \frac{a_{n(n-1)}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Предполагается, что $a_{nn} \neq 0$. В матричном виде систему (4.2) можно записать:

$$X = A' \cdot X + B',$$

где $a'_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j; \quad a'_{ii} = 0; \quad b'_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i, j = 1, 2, \dots, n$.

Задается начальное приближение $X^{(0)}$. Следующее приближение вычисляется из соотношения:

$$X^{(1)} = A' \cdot X^{(0)} + B'.$$

Затем вычисляется второе приближение:

$$X^{(2)} = A' \cdot X^{(1)} + B'$$

Любое последующее приближение вычисляется по формуле:

$$X^{(k+1)} = A' \cdot X^{(k)} + B' \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Вторым способом система уравнений преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) + x_1 \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \dots - a_{2n}x_n) + x_2 \\ \dots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn}x_n) + x_n \end{array} \right. \quad (4.3)$$

В матричном виде систему (4.3) можно записать в виде:

$$X = A'' \cdot X + B'' + X,$$

где $a''_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j; \quad b''_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, i, j = 1, 2, \dots, n$.

Любое приближение вычисляется по формуле:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + A'' \cdot X^{(k)} + B'' \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено соотношение:

$$\text{Max} |X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где ε - требуемая точность вычислений. С левой стороны неравенства подразумевается максимальное значение абсолютных разностей для всех неизвестных.

Вместо абсолютных разностей можно в качестве критерия окончания итерационного процесса использовать относительные разности:

$$\text{Max} \left| \frac{X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}}{X_i^{(k)}} \right| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Итерационный процесс решения системы линейных уравнений будет сходящимся, если все собственные значения матрицы A' будут меньше единицы.

В качестве критерия сходимости можно использовать оценки нормы матрицы:

$$\sum_{j=1}^n |a'_{ij}| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n |a'_{ij}| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

4.3.3 Метод Зейделя

В процессе итерации значения неизвестных вычисляются последовательно от x_1 до x_n . Зейдель предложил при вычислении нового $(k+1)$ -ого значения неизвестной использовать только что полученные уточненные значения x_1 до x_k . Тогда система (4.3) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= b'_1 + \sum_{j=1}^n a'_{1j} x_j^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= b'_2 + \sum_{j=2}^n a'_{2j} x_j^{(k)} + a'_{21} x_1^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} &= b'_3 + \sum_{j=3}^n a'_{3j} x_j^{(k)} + a'_{31} x_1^{(k+1)} + a'_{32} x_2^{(k+1)} \\ &\dots \\ x_n^{(k+1)} &= b'_n + a'_{nn} x_n^{(k)} + \sum_{j=1}^{n-1} a'_{nj} x_j^{(k+1)} \end{aligned}$$

Такой способ сокращает количество итераций.

4.4 Пример выполнения работы

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 6,25x_1 - x_2 + 0,5x_3 = 7,5 \\ -x_1 + 5x_2 + 2,12x_3 = -8,68 \\ 0,5x_1 + 2,12x_2 + 3,6x_3 = -0,24 \end{cases}$$

4.4.1 Решение системы уравнений методом Гаусса

Ввод коэффициентов системы:

$$a := \begin{pmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 \\ -1 & 5 & 2.12 \\ 0.5 & 2.12 & 3.6 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 7.5 \\ -8.68 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

Задание количества уравнений:

$$n := \text{rows}(a) = 3$$

Определитель системы:

$$|a| = 77.44$$

Так как определитель системы не равен нулю, она имеет единственное решение.

4.4.1.1 Прямой ход метода Гаусса (исключение неизвестных)

Исключим первое неизвестное из второго и третьего уравнений:

$$\begin{aligned} i &:= 1..n-1 & j &:= 0..n-1 & M_i &:= \frac{a_{i,0}}{a_{0,0}} & M &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 0.08 \end{pmatrix} \\ a_{i,j} &:= a_{i,j} - M_i \cdot a_{0,j} & b_i &:= b_i - M_i \cdot b_0 \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов **a** и вектор **b** после исключения первого неизвестного:

$$a = \begin{pmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 \\ 0 & 4.84 & 2.2 \\ 0 & 2.2 & 3.56 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -7.48 \\ -0.84 \end{pmatrix}$$

Исключим второе неизвестное из третьего уравнения:

$$\begin{aligned} i &:= 2..n-1 & j &:= 1..n-1 & M_i &:= \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} & M &= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 0.455 \end{pmatrix} \\ a_{i,j} &:= a_{i,j} - M_i \cdot a_{1,j} & b_i &:= b_i - M_i \cdot b_1 \end{aligned}$$

Матрица коэффициентов **a** и вектор **b** после исключения второго неизвестного:

$$a = \begin{pmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 \\ 0 & 4.84 & 2.2 \\ 0 & 0 & 2.56 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -7.48 \\ -4.249 \end{pmatrix}$$

4.4.1.2 Обратный ход метода Гаусса

$$i := n-2..0 \quad \underline{x_2} := \frac{b_2}{a_{2,2}} \quad x_i := \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} (a_{i,j} \cdot x_j)}{a_{i,i}}$$

Решение системы:

$$x = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Программа, реализующая алгоритм решения системы уравнений методом Гаусса.

```

gauss(a, b) :=
  n ← rows(a)
  for k ∈ 0..n - 2
    m ← k
    for i ∈ k + 1..n - 1
      m ← i if |ai,k| > |am,k|
    if m > k
      for j ∈ k..n - 1
        t ← ak,j
        ak,j ← ai,j
        ai,j ← t
      t ← bk
      bk ← bm
      bm ← t
    for i ∈ k + 1..n - 1
      t ←  $\frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$ 
      ai,k ← 0
      for j ∈ k + 1..n - 1
        ai,j ← ai,j - t·ak,j
      bi ← bi - t·bk
  xn-1 ←  $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}$ 
  for i ∈ n - 2..0
    sum ← 0
    for j ∈ i + 1..n - 1
      sum ← sum + ai,j·xj
    xi ←  $\frac{b_i - \text{sum}}{a_{i,i}}$ 
  x

```

Решение системы уравнений с помощью программы:

$$a := \begin{pmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 \\ -1 & 5 & 2.12 \\ 0.5 & 2.12 & 3.6 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 7.5 \\ -8.68 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

$$\text{gauss}(a, b) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4.2 Решение системы уравнений с помощью функции Mathcad Isolve

$$x := \text{Isolve}(a, b) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4.3 Решение системы уравнений методом Зейделя

Ввод коэффициентов системы:

$$a := \begin{pmatrix} 6.25 & -1 & 0.5 \\ -1 & 5 & 2.12 \\ 0.5 & 2.12 & 3.6 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 7.5 \\ -8.68 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

Вычисление матрицы итераций **a1** и вектора правой части **b1**:

$$\begin{aligned} i &:= 0..n-1 & j &:= 0..n-1 \\ a_{i,j} &:= \frac{-a_{i,j}}{a_{i,i}} & a_{i,i} &:= 0 & b_{i,j} &:= \frac{b_i}{a_{i,i}} \\ a1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0.16 & -0.08 \\ 0.2 & 0 & -0.424 \\ -0.139 & -0.589 & 0 \end{pmatrix} & b1 &= \begin{pmatrix} 1.2 \\ -1.736 \\ -0.067 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Вычисление норм матрицы итераций **a1**:

$$\begin{aligned} s1_i &:= \sum_j |a_{i,j}| & s1 &= \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.624 \\ 0.728 \end{pmatrix} & \max(s1) &= 0.728 \\ s2_j &:= \sum_i |a_{i,j}| & s2 &= \begin{pmatrix} 0.339 \\ 0.749 \\ 0.504 \end{pmatrix} & \max(s2) &= 0.749 \\ s3 &:= \sqrt{\sum_i \left[\sum_j (a_{i,j})^2 \right]} & s3 &= 0.786 \end{aligned}$$

Вычисление норм матрицы итераций **a1** с помощью встроенных функций:

$$\text{normi}(a1) = 0.728 \quad \text{norml}(a1) = 0.749 \quad \text{norme}(a1) = 0.786$$

Вектор собственных значений:

$$\lambda := \text{eigenvals}(a1) \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0.571 \\ -0.065 \\ -0.505 \end{pmatrix}$$

Так как нормы матрицы итераций и элементы вектора собственных значений по модулю меньше 1, итерационный процесс сходится.

Убедимся в этом путем вычисления нескольких последовательных приближений.

Начальное приближение:

$$x_0 := b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -8.68 \\ -0.24 \end{pmatrix}$$

Первое приближение:

$$x_{1i} := b_{1i} + \sum_j (a_{1i,j} \cdot x_{0j}) \quad x_1 = \begin{pmatrix} -0.17 \\ -0.134 \\ 4.003 \end{pmatrix}$$

$$\max(|x_1 - x_0|) = 12.242$$

Второе приближение:

$$x_{2i} := b_{1i} + \sum_j (a_{1i,j} \cdot x_{1j}) \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0.858 \\ -3.467 \\ 0.036 \end{pmatrix}$$

$$\max(|x_2 - x_1|) = 5.283$$

Третье приближение:

$$x_{3i} := b_{1i} + \sum_j (a_{1i,j} \cdot x_{2j}) \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0.642 \\ -1.58 \\ 1.856 \end{pmatrix}$$

$$\max(|x_3 - x_2|) = 2.631$$

Четвертое приближение:

$$x_{4i} := b_{1i} + \sum_j (a_{1i,j} \cdot x_{3j}) \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0.799 \\ -2.394 \\ 0.774 \end{pmatrix}$$

$$\max(|x_4 - x_3|) = 1.363$$

Видно, что итерационный процесс сходится.

Программа, реализующая метод Зейделя:

```
zeydel(a,b,eps) := | L ← 0
                   | x ← b
                   | while L = 0
                   |   | L ← 1
                   |   | for i ∈ 0..rows(a) - 1
                   |   |   | s ← bi
                   |   |   | for j ∈ 0..rows(a) - 1
                   |   |   |   | s ← s - ai,j·xj
                   |   |   |   | s ←  $\frac{s}{a_{i,i}}$ 
                   |   |   |   | xi ← xi + s
                   |   |   |   | L ← 0 if |s| > eps
                   |   | x
```

Решение системы уравнений:

$$\text{zeydel}(a,b,0.001) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Содержание отчета

1. Титульная страница с названием работы.
2. Задание.
3. Цель работы и краткие теоретические сведения.
4. Выполненное задание.
5. Выводы по проделанной работе.

4.6 Контрольные вопросы

1. Как разделяются методы численного решения систем линейных уравнений?
2. Из каких этапов состоит решение системы уравнений методом Гаусса?
3. Как подсчитывается общее число арифметических операций, необходимых для реализации метода Гаусса?
4. От чего зависит точность решения системы линейных уравнений методом Гаусса?
5. При каких условиях заканчивается итерационный процесс решения систем уравнений?
6. При каких условиях итерационный процесс решения системы уравнений является сходящимся?

4.7 Список литературы

1. Волков Е.А. Численные методы : Учебное пособие для вузов. - 2-е изд. - М., Наука, 1987 .
2. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М., Наука, 1972.