Лабораторная работа № 9

Тема: «Конечно-разностный метод решения краевой задачи»

Цель - сформировать у магистрантов представление о применении дифференциальных уравнений в различных областях; привить умения решать краевую задачу для дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ на **отрезке** $[a,b]$ **при заданных краевых условиях** $y(x_0) = y_0$ и $y(x_k) = y_1$. **конечно-разностным методом, развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.**

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[x_0, x_k]$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \qquad (21)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_k) = y_1. \qquad (22)$$

Введем разностную сетку на отрезке $[x_0, x_k]$ $i = 0,1,\ldots,n$, $h = |x_k - x_0|/n$. Решение задачи (21), (22) будем искать в виде сеточной функции $y^{(h)} = \{y_i, i = 0,1,\ldots,n\}$, предлагая, что решение существует и единственно. Введем разностную аппроксимацию производных следующим образом:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2);$$
$$\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2); \qquad (23)$$

Подставляя аппроксимации производных из (23) в (21), (22) получим систему уравнений для нахождения y_i:

$$\begin{cases} y_0 = y_{x_0} \\ \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \\ y_n = y_{x_k} \qquad\qquad i = 1,\ldots,n-1 \end{cases} \qquad (24)$$

Приводя подобные и учитывая, что при задании граничных условий первого рода два неизвестных y_0, y_n уже фактически определены, получим систему линейных алгебраических уравнений с трех диагональной матрицей коэффициентов

$$\begin{cases} \left(-2+h^2 q\ (x_1)\right)y_1+\left(1+\dfrac{p(x_1)h}{2}\right)y_2=h^2 f(x_1)-\left(1-\dfrac{p_1(x_1)h}{2}\right)y_{x_0} \\ \left(1-\dfrac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i-1}+\left(-2+h^2 q(x_k)\right)y_i+ \\ +\left(1+\dfrac{p(x_k)h}{2}\right)y_{i+1}=h^2 f(x_k) \qquad\qquad ,i=2,\dots,n-2 \\ \left(1-\dfrac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{n-1}+\left(-2+h^2 q(x_{n-1})\right)y_{n-1}= \\ =h^2 f(x_{n-1})-\left(1+\dfrac{p(x_{n-1})h}{2}\right)y_{x_k} \end{cases} \tag{25}$$

Для системы (25) при достаточно малых шагах сетки h и $q(x_k)<0$ выполнены условия преобладания диагональных элементов

$$\left|-2+h^2 q(x_k)\right|>\left|1-\frac{p(x_k)h}{2}\right|+\left|1+\frac{p(x_k)h}{2}\right|,$$

что гарантирует устойчивость счета и корректность применения метода прогонки для решения этой системы.

В случае использования граничных условий второго и третьего рода аппроксимация производных проводится с помощью односторонних разностей первого и второго порядков.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0=\frac{y_1-y_0}{h}+O(h);$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n=\frac{y_n-u_{n-1}}{h}+O(h) \tag{26}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_0=\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}+O(h^2);$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_n=\frac{y_{n-2}-4y_{n-1}+3y_n}{2h}+O(h^2) \tag{27}$$

В случае использования формул (26) линейная алгебраическая система аппроксимирует дифференциальную задачу в целом только с первым порядком (из-за аппроксимации в граничных точках), однако сохраняется трех диагональная структура матрицы коэффициентов. В случае использования формул (27) второй порядок аппроксимации сохраняется везде, но матрица линейной системы не трех диагональная.

Алгоритм метода прогонки состоит из нескольких шагов. Предварительно определяют коэффициенты уравнений вида (разностная схема)

$$A_i y_{i-1}+C_i y_i+B_i y_{i+1}=F_i\ ,\quad i=1,2,\dots,n-1 \tag{28}$$

где $A_i = \dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_i}{2h}$, $B_i = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_i}{2h}$, $C_i = q_i - \dfrac{2}{h^2}$, $F_i = f_i$.

Затем находят прогоночные коэффициенты по формулам (прямая прогонка):

$$\nu_i = \frac{-B_i}{C_i + A_i \nu_{i-1}}, \quad \mu_i = \frac{F_i - A_i \mu_{i-1}}{C_i + A_i \nu_{i-1}}, \quad i = 1,2,\dots,n-1, \tag{29}$$

$$\nu_0 = \frac{\dfrac{\beta_0}{2h}\left(3 - \dfrac{C_1}{B_1}\right)}{\alpha_0 + \dfrac{\beta_0}{h}\left(2 + \dfrac{A_1}{2B_1}\right)}, \quad \mu_0 = \frac{\gamma_0 + \dfrac{\beta_0 F_1}{2hB_1}}{\alpha_0 + \dfrac{\beta_0}{h}\left(2 + \dfrac{A_1}{2B_1}\right)},$$

Значения прогоночных коэффициентов на правой границе определяются из краевых условий по формулам

$$\nu_n = \frac{\dfrac{\beta_1}{h}\left(\dfrac{C_{n-1}}{2A_{n-1}} + 2\right)}{\alpha_1 + \dfrac{\beta_1}{2h}\left(3 - \dfrac{B_{n-1}}{A_{n-1}}\right)}, \quad \mu_n = \frac{\gamma_1 - \dfrac{\beta_1 F_{n-1}}{2hA_{n-1}}}{\alpha_1 + \dfrac{\beta_1}{2h}\left(3 - \dfrac{B_{n-1}}{A_{n-1}}\right)} \tag{30}$$

После чего сеточная функция y_n на правой границе определяется из выражения

$$y_n = \frac{\mu_n + \nu_n \mu_{n-1}}{1 - \nu_n \nu_{n-1}} \tag{31}$$

Наконец, обратной прогонкой находят все значения сеточной функции

$$y_i = \nu_i y_{i+1} + \mu_i, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \tag{32}$$

Таким образом, метод прогонки позволяет найти точное решение системы (25), значит, погрешность решения краевой задачи (21) – (22) определяется погрешностью разностной аппроксимации исходной задачи системой (25) и равна $O(h)$. Так как $h = (x_k - x_0)/n$, то, выбирая n достаточно большим, можно добиться уменьшения погрешности ценой увеличения объема вычислений при решении системы (25).

При практической оценке погрешности найденного решения обычно используют двойной пересчет и правило Рунге. Если $y(x_i)$ - точное значение решения в узле x_i, а y_i и $\bar{y}_i$ - приближенные значения в том же узле, полученные соответственно с шагом h и $h/2$, то оценка погрешности решения y_i определяется формулой

$$|\bar{y}_i - y(x_i)| \cong |y_i - \bar{y}_i|/3.$$

Алгоритм метода прогонки реализован при решении примеров 6 и 7..

Пример 6. Методом прогонки на отрезке $[0,8]$ с точностью $eps = 0{,}001$ решить краевую задачу с граничными условиями первого рода для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + tg(x)\cdot y'(x) + \cos^2(x)\cdot y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(8) = 10.$$

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением

$$y(x) = \cos(\sin(x)) + C\cdot\sin(\sin(x)),\ C = \frac{(10 - \cos(\sin(8)))}{\sin(\sin(8))} = 11{,}309\ .$$

Результаты решения представлены на рис. 19-21.

```
x0 := 0    xk := 8    α0 := 1    β0 := 0    γ0 := 1    α1 := 1    β1 := 0    γ1 := 10
p(x) := tan(x)    q(x) := cos(x)^2    f(x) := 0    n := 80    eps := 0.001
Progonka(n) := | x_0 ← x0
               | h ← (xk − x0) ÷ n
               | for i ∈ 0..n − 1
               |   | x_{i+1} ← x_i + h
               |   | A_i ← 1 ÷ h^2 − p(x_i) ÷ (2·h)
               |   | B_i ← 1 ÷ h^2 + p(x_i) ÷ (2·h)
               |   | C_i ← q(x_i) − 2 ÷ h^2
               |   | F_i ← f(x_i)
               | r1 ← α0 + β0 ÷ h·[2 + A_1 ÷ (2·B_1)]
               | ν_0 ← [β0 ÷ (2·h)·(3 − C_1 ÷ B_1)] ÷ r1
               | μ_0 ← [γ0 + β0 ÷ (2·h)·F_1 ÷ B_1] ÷ r1
               | for i ∈ 1..n − 1
               |   | ν_i ← −B_i / (C_i + A_i·ν_{i−1})
               |   | μ_i ← (F_i·−A_i·μ_{i−1}) / (C_i + A_i·ν_{i−1})
               | r2 ← α1 + β1 ÷ (2·h)·(3 − B_{n−1} ÷ A_{n−1})
               | ν_n ← [β1 ÷ h·[C_{n−1} ÷ (2·A_{n−1}) + 2]] ÷ r2
               | μ_n ← [γ1 − β1 ÷ (2·h)·F_{n−1} ÷ A_{n−1}] ÷ r2
               | y_n ← (μ_n + ν_n·μ_{n−1}) / (1 − ν_n·ν_{n−1})
               | for i ∈ n − 1, n − 2..0
               |   y_i ← ν_i·y_{i+1} + μ_i
               | R^⟨0⟩ ← x
               | R^⟨1⟩ ← y
               | R
```

Рис. 19. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 (задание исходных данных с функцией, возвращающей решение исходного уравнения методом прогонки)

```
Yrez := | eps ← eps
        | for m ∈ 0..100
        |   | y1 ← Progonka(n)
        |   | y2 ← Progonka(2n)
        |   | for k ∈ 0..n
        |   |   r_k ← max( |y1_(k,1) − y2_(2k,1)| / 3 )
        |   | break if max(r) < eps
        |   | n ← 2·n otherwise
        | (y2)
        | (n )
```

$x := 0, 0.5 .. 8$

$CC := \dfrac{10 - \cos(\sin(8))}{\sin(\sin(8))} = 11.309$

$Y\text{точное}(x) := \cos(\sin(x)) + CC \cdot \sin(\sin(x))$

$Yrez_1 = 640$

$k := 0, \dfrac{Yrez_1}{8} .. (2Yrez)_1$

$xx(k) := (Yrez_0)_{k,0} \qquad y(k) := (Yrez_0)_{k,1}$

x =	Yточное(x) =	xx(k) =	y(k) =
0	1	0	1
0.5	6.104	0.5	5.52
1	9.099	1	8.922
1.5	10.043	1.5	10.053
2	9.538	2	9.442
2.5	7.198	2.5	6.742
3	2.581	3	1.683
3.5	-2.947	3.5	-4.112
4	-7.038	4	-8.217
4.5	-8.818	4.5	-9.922
5	-8.683	5	-9.796
5.5	-6.572	5.5	-7.76
6	-2.158	6	-3.301
6.5	3.391	6.5	2.554
7	7.699	7	7.308
7.5	9.711	7.5	9.649
8	10	8	10

Рис. 20. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 методом прогонки(функция, уточняющая решение, числовое решение, сравнение с точным решением)

$k := 0, \dfrac{Yrez_1}{160} .. (2Yrez)_1$

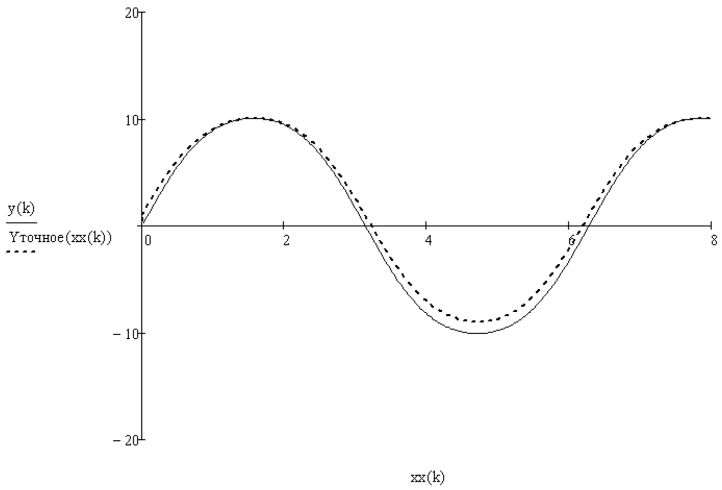

Рис. 21. Фрагмент рабочего документа MATHCAD – решение примера 6 методом прогонки (график решения, сравнение с точным решением)

Пример 7. Методом прогонки на отрезке $[0,10]$ с точностью $eps = 0{,}001$ решить краевую задачу с граничными условиями третьего рода для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x+1} \cdot y'(x) + x^2 \cdot y(x) = x^2 \cdot \ln(x+1),$$

$$3y(0) + \frac{1}{2} y'(0) = 0.5, \quad -0.4y(10) - 2y'(10) = -1.141.$$

Построить график решения. Сравнить полученное решение с точным решением $y(x) = \ln(x+1)$.

Результаты решения представлены на рис. 22.

```
ORIGIN := 1    fp(x) := 1/(x+1)    fq(x) := x^2    f(x) := x^2·ln(x+1)    eps := 0.001    N1 := 11
x0 := 0   xk := 10   α0 := 3   β0 := 0.5   γ0 := 0.5   α1 := −0.4   β1 := −2   γ1 := −1.141

Progon(N1) := | n ← N1
              | n ← n − 1
              | h ← (xk − x0)/n
              | r1 ← h^2
              | r2 ← h/2
              | p1 ← −β0/(α0·h − β0)
              | q1 ← (−γ0·h·p1)/β0
              | x ← x0
              | for i ∈ 2..n
              |   | i1 ← i − 1
              |   | x ← x + h
              |   | t ← 1 − fp(x)·r2
              |   | pi ← (t − 2)/(fq(x)·r1 + t·p_i1 − 2)
              |   | qi ← (f(x)·r1 − t·q_i1)·pi/(t − 2)
              | p_N1 ← 0
              | q_N1 ← (γ1·h + β1·q_n)/(α1·h + β1 − β1·p_n)
              | y_N1 ← q_N1
              | X_N1 ← xk
              | for j ∈ 1..n
              |   | i ← n − j + 1
              |   | i1 ← i + 1
              |   | yi ← pi·y_i1 + qi
              |   | Xi ← x0 + h·(i − 1)
              | REZ<1> ← X
              | REZ<2> ← y
              | REZ

Yrez := | eps ← eps
        | for m ∈ 0..1000
        |   | y1 ← (Progon(N1))
        |   | y2 ← (Progon(2N1 − 1))
        |   | for k ∈ 1..N1
        |   |   rk ← max(|y1_(k,2) − y2_(2k−1,2)| / 3)
        |   | break if max(r) < eps
        |   | N1 ← 2·N1 − 1  otherwise
        | (y2
        |  N1)

Yrez2 = 161
x := 0, 0.5..10          x(j) := (Yrez1)_(j,1)
Yточное(x) := ln(x+1)    y(j) := (Yrez1)_(j,2)
j := 1, 41..2·Yrez2 − 1
```

x(j) =	y(j) =
0	$2.992\cdot10^{-3}$
1.25	0.812
2.5	1.252
3.75	1.558
5	1.792
6.25	1.981
7.5	2.14
8.75	2.277
10	2.398

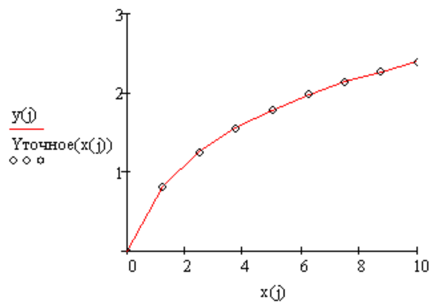

Рис. 22. Рабочий документ MATHCAD – решение примера 7 методом прогонки

Анализируя полученные решения, видим в примере 7 полное совпадение результатов, полученных методом прогонки, с точным решением, однако в примере 6 результаты, полученные методом прогонки, не на всем отрезке интегрирования совпадают с точным решением. Это происходит из-за того, что точным решением в примере 7 является функция, довольно медленно меняющаяся на всем промежутке интегрирования. В примере 6 на участках медленного изменения функции решение методом прогонки дает полное совпадение с точным решением, на участках быстрого изменения функции решение методом прогонки отклоняется от точного решения. Максимальное отклонение составило 22 %. Уменьшение шага даже в 1000 раз не позволило уменьшить это отклонение. Значит к численному решению, полученному методом прогонки, в местах быстрого изменения решения следует подходить с осторожностью.

Задание 7. .Методом прогонки на отрезке $[x_0, x_k]$ с точностью $eps = 0{,}001$ решить краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка. Построить график решения.

Варианты заданий представлены ниже.

Вариант 1.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + (2 \cdot x + 1) \cdot y(x) = 0.8 \cdot x^2,$$
$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 1, \quad y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 2.

$$y''(x) - \frac{1}{4} \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$
$$1.5y(x_0) - y'(x_0) = 0.6, \quad 2y(x_k) = 0.3, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 3.

$$y''(x) - e^{-x^2} \cdot y'(x) + \cos(x) \cdot y(x) = x^2,$$
$$1.5y(x_0) + 1.94y'(x_0) = 2.31, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 0, \quad x_0 = -1, x_k = 4.$$

Вариант 4.

$$y''(x) - e^{\sqrt{x}} \cdot y'(x) + \frac{x}{3} \cdot y(x) = x^3,$$
$$y(x_0) - 3.6y'(x_0) = 1, \ 0.43y(x_k) - 1.2y'(x_k) = 4, \ x_0 = 0.2, x_k = 6.2.$$

Вариант 5.

$$y''(x) - x^2 \cdot y'(x) - \frac{0.5}{x} \cdot y(x) = 2,$$
$$2y(x_0) + 3y'(x_0) = 4, \quad -0.2y'(x_k) = 3.9, \quad x_0 = 2, x_k = 5.$$

Вариант 6.

$$y''(x) + x^3 \cdot y'(x) + \ln(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x + \sin(x),$$
$$y(x_0) = 2, \quad y(x_k) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 6.$$

Вариант 7.

$$y''(x) + e^x \cdot y'(x) + \frac{x}{2} \cdot y(x) = x^2,$$
$$y(x_0) - 1.2y'(x_0) = 0, \quad 2y(x_k) - 2.5y'(x_k) = -4, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 8.

$$y''(x) + 2 \cdot \sin(x) \cdot y'(x) - 1.5 \cdot x \cdot y(x) = \frac{2}{x},$$
$$y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) + 2y'(x_k) = 1, \quad x_0 = 1, x_k = 5.$$

Вариант 9.

$$y''(x) + x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{2 \cdot \ln(x)}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin^2(x),$$
$$2y(x_0) - 2y'(x_0) = 1, \quad 3y(x_k) = 1, \quad x_0 = 2, x_k = 6.$$

Вариант 10.

$$y''(x) + \cos^2(x) \cdot y'(x) + \frac{3}{x+4} \cdot y(x) = -x,$$
$$-y(x_0) + 2y'(x_0) = 3, \quad -2y(x_k) + y'(x_k) = -4, \quad x_0 = -2, x_k = 2.$$

Вариант 11.

$$y''(x) - x \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = x + 1,$$
$$y(x_0) - 0.5y'(x_0) = 2, \quad y(x_k) = 1, \quad x_0 = 0, x_k = 7.$$

Вариант 12.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = x,$$
$$2y(x_0) - y'(x_0) = 1, \quad y(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 13.

$$y''(x) + \left(x^3 + 2 \cdot x\right) \cdot y'(x) - 2 \cdot x \cdot y(x) = e^x, \qquad x_0 = -1, x_k = 4,$$
$$-y(x_0) - 3.5y'(x_0) = 4.6, \quad 1.6y\left(x_k\right) + 12.1y'(x_k) = 2.7\,.$$

Вариант 14.

$$y''(x) + e^{-x} \cdot y'(x) + 3 \cdot x \cdot y(x) = \sin^3(x),$$
$$1.1y(x_0) + 2.5y'(x_0) = -1, \; 2.6y\left(x_k\right) + y'(x_k) = 7.4, \; x_0 = 1, x_k = 8.$$

Вариант 15.

$$y''(x) - \frac{1}{2} \cdot y'(x) + \frac{3}{x+6} \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$
$$y(x_0) + 2y'(x_0) = 0.6, \quad y\left(x_k\right) = 1, \quad x_0 = -3, x_k = 3.$$

Вариант 16.

$$y''(x) + 2 \cdot x^2 \cdot y'(x) + e^{-2 \cdot x} \cdot y(x) = x,$$
$$2y(x_0) - y'(x_0) = 11, \quad y\left(x_k\right) + y'(x_k) = 2, \quad x_0 = 1, x_k = 4.$$

Вариант 17.

$$y''(x) + \frac{2}{x} \cdot y'(x) + e^{-3 \cdot x} \cdot y(x) = x + 1,$$
$$y'(x_0) = 2, \quad y\left(x_k\right) - y'(x_k) = 3, \quad x_0 = 1, x_k = 3.$$

Вариант 18.

$$y''(x) + \sin(x) \cdot y'(x) + \cos^2(x) \cdot y(x) = 2 \cdot x^2,$$
$$1.2y(x_0) + 3.1y'(x_0) = 3.9, \; -y\left(x_k\right) + 3.3y'(x_k) = 4.2, \; x_0 = -3, x_k = 1.$$

Вариант 19.

$$y''(x) + \frac{1}{x} \cdot y'(x) + 2 \cdot \ln(x) \cdot y(x) = x,$$
$$y(x_0) = 0.5, \quad 2y\left(x_k\right) + 3y'(x_k) = 1.2, \quad x_0 = 1, x_k = 5.$$

Вариант 20.

$$y''(x) + e^x \cdot \cos(x) \cdot y'(x) + \frac{4}{x} \cdot y(x) = x \cdot \sin(x),$$
$$2.1y(x_0) - 1.4y'(x_0) = 0.9, \; 1.7y\left(x_k\right) + 0.6y'(x_k) = 0.1, \; x_0 = 1, x_k = 4.$$