1 ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

Полярные координаты на плоскости вводятся следующим образом. Зададим в плоскости луч OL (полярную ось), выходящий из точки O – полюса полярной системы координат (рис.1), зададим масштаб. Положение произвольной точки A (отличной от точки O) плоскости однозначно определяется парой чисел φ, ρ – ее полярными координатами, где φ – выраженный в радианах угол между OA и OL, а ρ – расстояние от точки A до полюса O. Если угол φ отсчитывается против часовой стрелки от начального положения луча, то он считается положительным и может изменяться от 0 до $+\infty$. Если угол φ отсчитывается по часовой стрелке, то он считается отрицательным и может изменяться от $-\infty$ до 0. Точка O исключительная. Она определяется парой $(\varphi, 0)$, где φ – произвольное число.

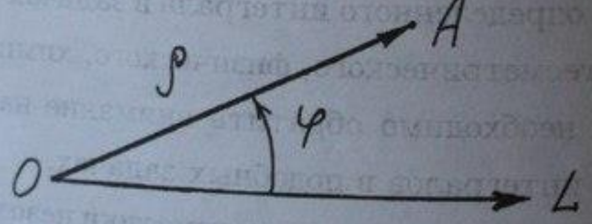

Рисунок 1

Точку A с полярными координатами φ и ρ обозначают символом $A(\varphi, \rho)$.

Условимся считать, что:

1) если $A(\varphi, \rho)$, то и $(\varphi + 2\pi, \rho)$ – координаты той же точки;

2) если $A(\varphi, \rho)$, то и $(\varphi + \pi, -\rho)$ – полярные координаты той

же точки A.

Для того, чтобы соответствие между отличными от полюса точками плоскости и парами полярных координат (φ, ρ) было взаимно однозначным, обычно считают, что φ и ρ изменяются в следующих границах:

$$0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \rho < +\infty. \tag{1.1}$$

Замечание. В некоторых задачах, связанных с непрерывным перемещением точки по плоскости, требуется непрерывное изменение полярных координат этой точки. В таких задачах удобнее отказаться от ограничений для φ и ρ (1.1).Если, например, рассматривается вращение точки по окружности против часовой стрелки $\rho = const$, то естественно считать, что полярный угол этой точки может принимать, при большом числе оборотов, значения, большие чем 2π (рис. 2,а). Если же рассматривается движение по прямой $\varphi = const$ (лучи, исходящие из полюса), то естественно считать, что при переходе через полюс ее полярный радиус меняет знак (рис. 2,б). Закон изменения величин φ и ρ выясняется в каждом конкретном случае.

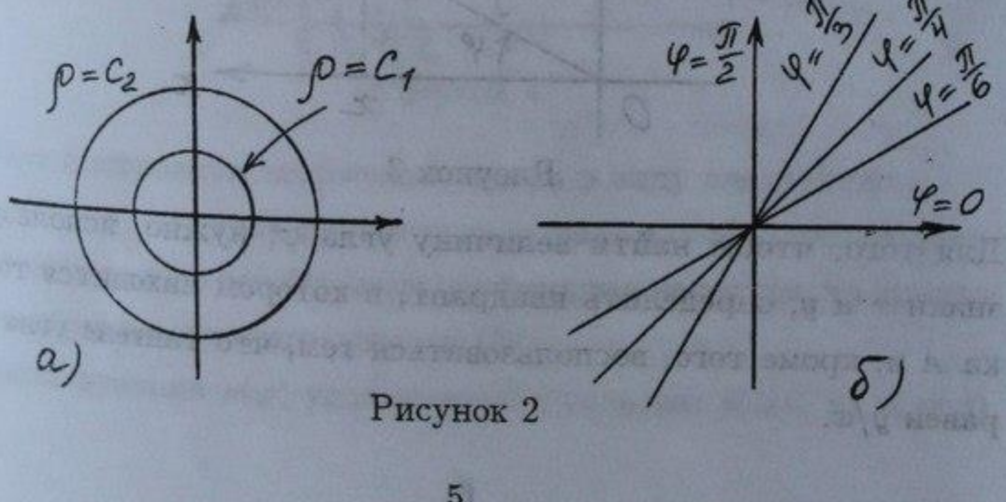

Рисунок 2

Установим связь между полярными координатами точки и ее декартовыми координатами. Пусть в плоскости, наряду с прямоугольной системой координат x, y с началом в точке O, введена полярная система координат φ, ρ так, что полярная ось и положительная ось Ox совпадают. Пусть точка A имеет декартовы координаты x, y и полярные координаты φ, ρ (рис.3). Тогда декартовы координаты этой точки преобразуются в полярные по формулам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{1.2}$$

Очевидно, полярные координаты φ, ρ точки определяются по ее декартовым x, y координатам следующим образом:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x}). \end{cases} \tag{1.3}$$

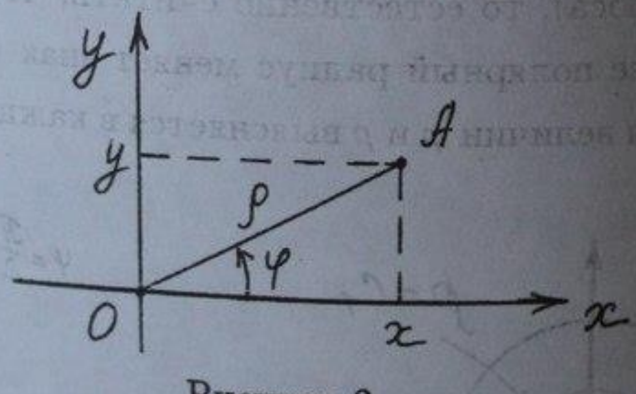

Рисунок 3

Для того, чтобы найти величину угла φ, нужно, используя знаки x и y, определить квадрант, в котором находится точка A и, кроме того, воспользоваться тем, что тангенс угла φ равен y/x.

Функциональную зависимость $\rho = \rho(\varphi)$, заданную на некотором множестве E значений φ, можно интерпретировать как множество точек φ, ρ плоскости в полярной системе координат, где $\varphi \in E, \rho = \rho(\varphi)$. Многие кривые на плоскости могут быть описаны в полярных координатах соответствующими функциями $\rho(\varphi)$ (многозначными или однозначными). Ясно, что в область определения функции $\rho(\varphi)$ входят только те значения угла φ, при которых $\rho(\varphi) \geq 0$.

Построение графика функции $\rho = \rho(\varphi)$ можно осуществить по точкам, для чего удобно составить таблицу значений $\rho(\varphi)$ для различных φ. При данном $\varphi = \varphi_i$ проводим луч из точки O под углом φ_i к полярной оси и затем на этом луче отмечаем точку $A_i(\rho(\varphi_i), \varphi_i)$ графика функции, находящуюся на расстоянии $\rho_i = \rho(\varphi_i)$ от точки O(рис.4).

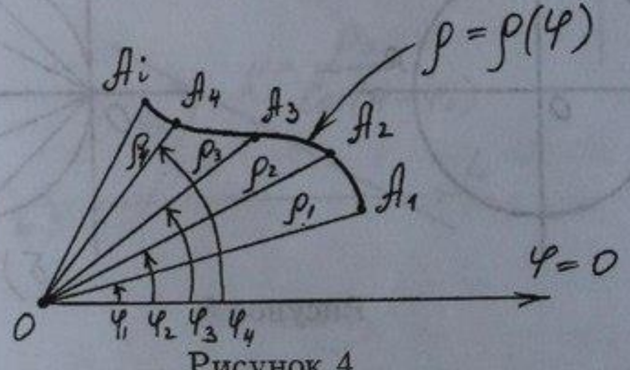

Рисунок 4

При построении необходимо иметь в виду следующее:

если $\rho(\varphi)$ – четная функция, то кривая $\rho = \rho(\varphi)$ симметрична относительно оси Ox, если же функция нечетная, то кривая симметрична относительно оси Oy;

если функция $\rho(\varphi)$ удовлетворяет условию $\rho(\varphi + \pi) = \rho(\varphi)$

для каждого φ, то кривая симметрична относительно начала координат;

если существует такое значение угла $\varphi = \varphi_0$, что $\rho(\varphi_0) = 0$, то кривая $\rho = \rho(\varphi)$ проходит через начало координат. В этом случае она имеет в начале координат касательную с наклоном $\operatorname{tg}\varphi_0$ (вертикальную касательную, если φ_0 есть нечетное кратное числу $\pi/2$). Здесь предполагается, что функция $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную.

Примеры.

1. $\rho = R \quad (R \geq 0)$. Окружность радиуса R с центром в начале координат (рис. 5а).

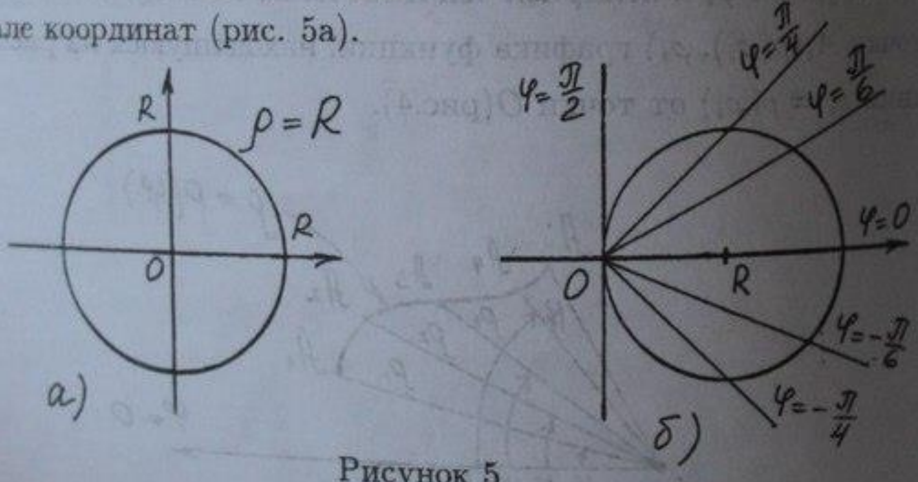

Рисунок 5

2. $\rho = 2R\cos\varphi$. Так как $\rho \geq 0$, то при $R \geq 0$ $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$, а при $R \leq 0$ $\varphi \in [\pi/2; 3\pi/2]$. Симметричная относительно оси Ox кривая $\rho = 2R\cos\varphi$ является окружностью с центром в точке $(R; 0)$ и радиусом $|R|$. Действительно, запишем уравнение данной кривой в декартовой системе координат, для чего умножим обе части равенства на ρ и воспользу-

емся формулами перехода (1.2) и (1.3):

$$\rho^2 = 2R\rho\cos\varphi \iff x^2 + y^2 - 2Rx + R^2 = R^2 \iff$$

$$\iff (x-R)^2 + y^2 = R^2.$$

При $R > 0$ получаем смещенную вправо по оси Ox окружность радиуса R (рис.5б).

3. $\rho = k\varphi \quad (\varphi > 0, \quad k > 0)$. Это спираль Архимеда, раскручивающаяся из полюса O. Она исходит из начала O и при удалении от него делает бесконечно много оборотов (рис.6а).

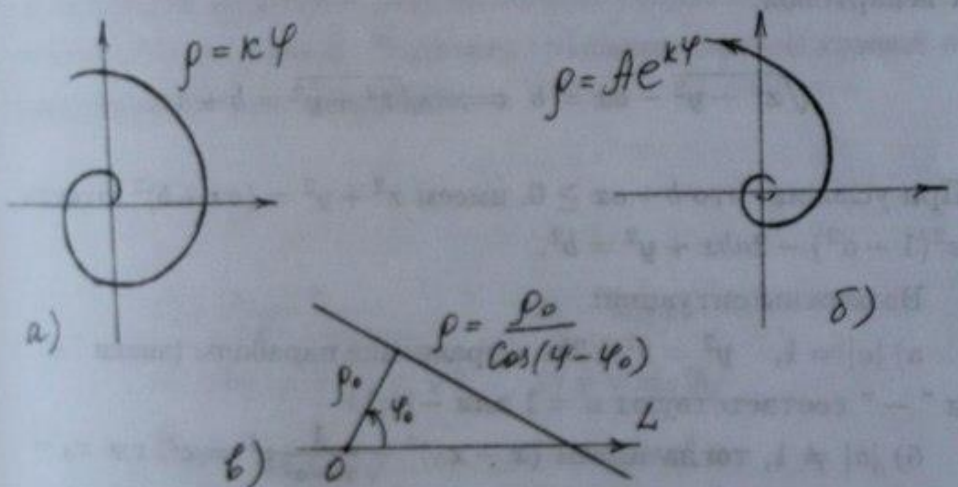

Рисунок 6

4. $\rho = Ae^{k\varphi} \quad (k > 0, \quad A > 0, \quad \varphi \in \mathbf{R})$ описывает в полярных координатах логарифмическую спираль (рис.6б). Здесь при $\varphi \to -\infty, \rho \to 0$. Стрелка на графике указывает направление движения точки графика при увеличении угла φ. Кривая делает бесконечно много оборотов вокруг начала координат как при приближении к нему, так и при удалении.

5. $\rho = \dfrac{\rho_0}{\cos(\varphi - \varphi_0)}$, $\rho > 0$, $\varphi \in (\varphi_0 - \pi/2; \varphi_0 + \pi/2)$ описывает такую прямую, что опущенный на нее из полюса O перпендикуляр имеет длину ρ_0 и образует с полярной осью угол φ_0 (рис.6в).

6. $\rho = \dfrac{b}{1 - a\cos\varphi}$ – общее уравнение эллипса при $|a| < 1$, гиперболы при $|a| > 1$ и параболы при $|a| = 1$. В частности, при $a = 0$ получаем окружность $\rho = b$. Действительно, приводя к общему знаменателю выражение, имеем $\rho - a\rho\cos\varphi = b$. Применим формулы перехода от полярной системы координат к декартовой:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - ax = b \iff \sqrt{x^2 + y^2} = b + ax.$$

При условии, что $b + ax \geq 0$, имеем $x^2 + y^2 = (ax + b)^2$, откуда $x^2(1 - a^2) - 2abx + y^2 = b^2$.

Возможны ситуации:

а) $|a| = 1$, $y^2 = b^2 \pm 2bx$ – уравнение параболы (знаки "$+$" и "$-$" соответствуют $a = 1$ или -1);

б) $|a| \neq 1$, тогда имеем $(x - x_0)^2 + \dfrac{1}{1 - a^2} y^2 = c^2$, где $x_0 = \dfrac{ab}{1 - a^2}$, $c^2 = \dfrac{b^2(1 + a^2) - a^2 b^2}{(1 - a^2)^2} = \dfrac{b^2}{(1 - a^2)^2}$. Откуда при $|a| > 1$ получаем уравнение гиперболы

$$\frac{(x - x_0)^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2(a^2 - 1)} = 1,$$

при $|a| < 1$ – уравнение эллипса

$$\frac{(x - x_0)^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2(1 - a^2)} = 1$$

(проделать преобразования и убедиться самостоятельно). Очевидно, что при $a = 0$ получаем уравнение $\rho = b$, т.е. уравнение окружности.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

1 Построить линию $\rho = \rho(\varphi)$ по точкам (через $\pi/12$) в полярной системе координат. Записать уравнение данной кривой в декартовой системе координат.

1) $\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$	2) $\rho^2 \sin 2\varphi = 2$
3) $\rho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$	4) $\rho = \sin 2\varphi$
5) $\rho = \dfrac{1}{1 - 2\sin\varphi}$	6) $\rho = \cos^3\varphi$
7) $\rho = \dfrac{5}{3 - 4\cos\varphi}$	8) $\rho = 2 + \cos\varphi$
9) $\rho = \dfrac{1}{2\sin\varphi + \cos\varphi}$	10) $\rho = \cos 4\varphi$
11) $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi - \sin\varphi}$	12) $\rho = \dfrac{1}{2 + \sin\varphi}$
13) $\rho^2 \cos 2\varphi = 4$	14) $\rho = 2 + \sin 2\varphi$
15) $\rho = \sin 4\varphi$	16) $\rho = \dfrac{2}{1 + 2\sin\varphi}$
17) $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$	18) $\rho = 2 + \cos 2\varphi$

19) $\rho = \dfrac{1}{2\cos\varphi - 2\sin\varphi}$ 20) $\rho = 3\sin\varphi$

21) $\rho = \sin^2\dfrac{\varphi}{2}$ 22) $\rho = 2 + \sin\varphi$

23) $\rho = \dfrac{9}{4 + 5\cos\varphi}$ 24) $\rho = 3\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$

25) $\rho^2\sin 2\varphi = 4$ 26) $\rho\cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

27) $\rho = \dfrac{3}{2 + \cos\varphi}$ 28) $\rho\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

29) $\rho = 3 + 2\cos 3\varphi$ 30) $\rho = 3 + 2\sin 3\varphi$

31) $(x^2 + y^2)^2 = 2y^3$ 32) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$

33) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ 34) $\rho = 4 + \cos 3\varphi$

35) $\rho = 4 + \sin 3\varphi$

2 ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

2.1 Вычисление площади плоской фигуры в декартовой системе координат

Площадь криволинейной трапеции (рис.7), ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

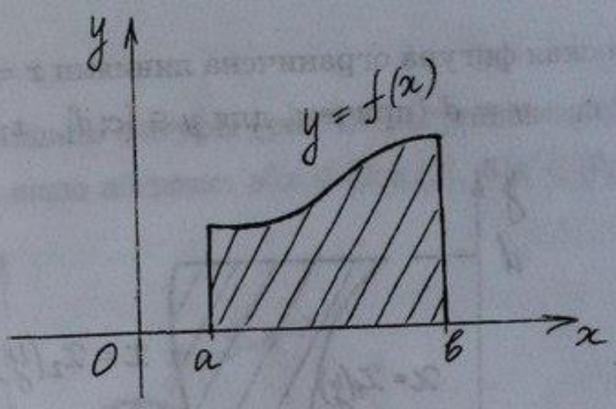

Рисунок 7

В том случае, когда функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения (или только отрицательные значения), ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{2.2}$$

Если фигура ограничена кривыми $y = y_1(x)$, $\quad y = y_2(x)$ $(y_1(x) \leq y_2(x))$ и прямыми $x = a$, $\quad x = b$ (рис.8), то ее площадь находится по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx. \tag{2.3}$$

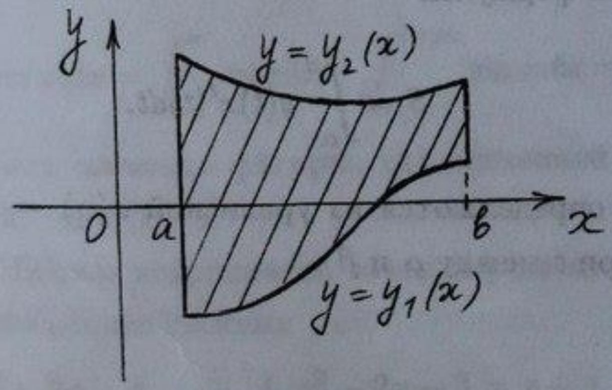

Рисунок 8

Пусть плоская фигура ограничена линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = c$, $y = d$ (причем, для $y \in [c;d]$ $x_1(y) \leq x_2(y)$) (рис.9).

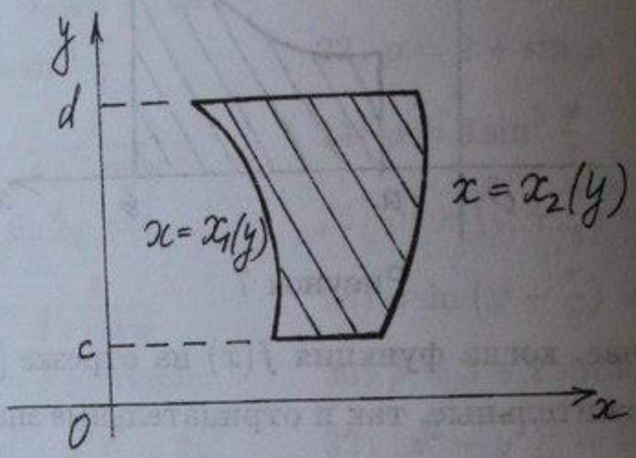

Рисунок 9

Тогда

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy. \tag{2.4}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox, выражается формулой

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt, \tag{2.5}$$

где α и β определяются из уравнений $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ ($y(t) \geq 0$ при t между α и β).

Примеры.

1. Найти площадь фигуры (рис.10), ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и осью абсцисс: а)$x \in [0; \pi/2]$, б)$x \in [0; 5\pi/4]$.

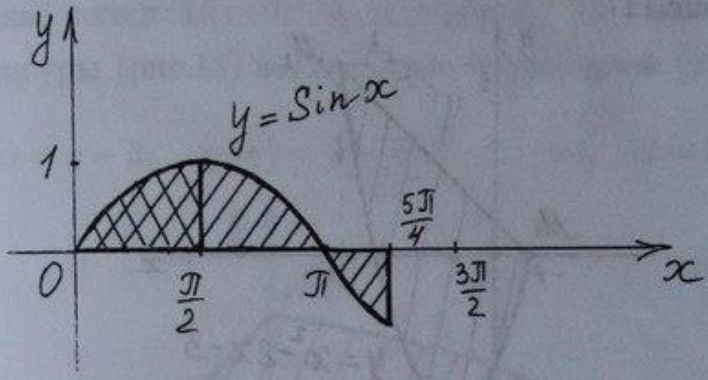

Рисунок 10

Решение. а) По формуле (2.1) имеем

$$S = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -(0-1) = 1.$$

б) Учитывая, что $\sin x \geq 0$ для $x \in [0;\pi]$ и $\sin x < 0$ для $x \in [\pi; 5\pi/4]$ и пользуясь аддитивностью определенного интеграла, по формуле (2.2) получаем

$$S = \int_0^{5\pi/4} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{5\pi/4} \sin x dx = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми: $y = x^2 - 2x - 3, \quad y = x + 1.$

Решение. Найдем координаты точек пересечения данных линий, для чего решим систему

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = x + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ y=x+1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=-1, \quad x_2=4 \\ y=x+1 \end{cases}.$$

Итак, парабола и прямая пересекаются в точках $M_1(-1;0)$ и $M_2(4;5)$ (рис.11).

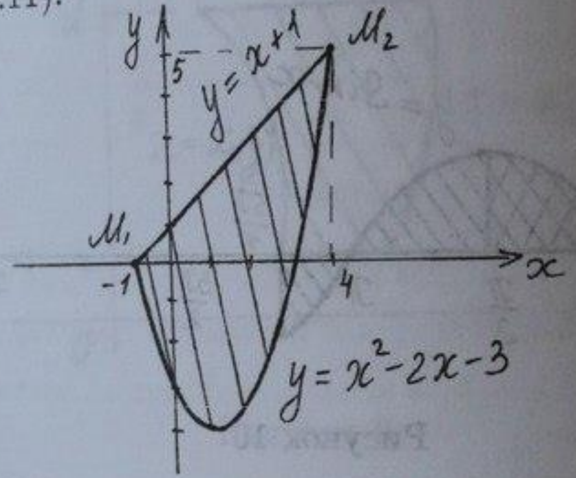

Рисунок 11

Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой (2.3):

$$S=\int_{-1}^{4}((x+1)-(x^2-2x-3))dx=\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)dx=$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-1}^{4}=$$

$$=-\frac{64}{3}+\frac{48}{2}+16-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)=20\frac{5}{6}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=9-x, \quad y=3+x.$

Решение. Решив систему

$$\begin{cases} y^2=9-x \\ y=3+x, \end{cases}$$

найдем координаты точек пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases} (3+x)^2 = 9-x \\ y = 3+x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+7x=0 \\ y=3+x \end{cases} \iff \begin{cases} x=0, \quad x=-7 \\ y=3+x. \end{cases}$$

Получаем две точки $M_1(-7;-4)$ и $M_2(0;3)$. Для вычисления площади фигуры (рис.12) воспользуемся формулой (2.4), где

$$x_1(y) = y-3, \quad x_2(y) = 9-y^2, \quad c=-4, \quad d=3.$$

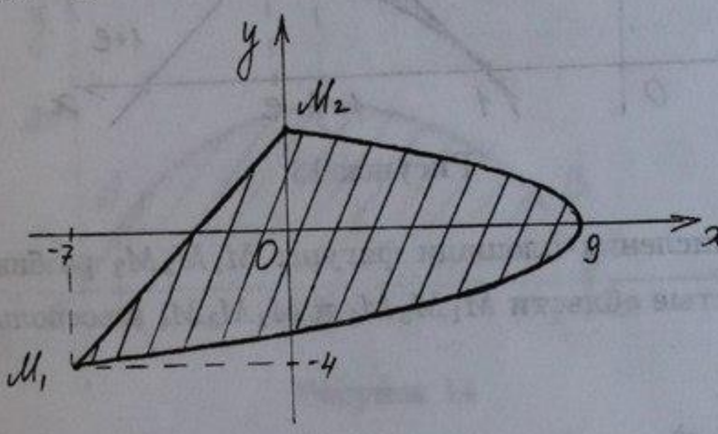

Рисунок 12

Следовательно,

$$S = \int_{-4}^{3} \big((9-y^2)-(y-3)\big)\,dy = \int_{-4}^{3}(-y^2-y+12)\,dy =$$

$$= \Big(-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+12y\Big)\Big|_{-4}^{3} = 57\frac{1}{6}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x, \quad y = x-1, \quad y = e+1-x$ (рис.13).

Решение. Составим системы

$$\begin{cases} y=\ln x \\ y=x-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=\ln x \\ y=e+1-x \end{cases}; \quad \begin{cases} y=x-1 \\ y=e+1-x \end{cases}.$$

Решив полученные системы, найдем координаты точек пересечения данных линий: $M_1(1;0), M_2(e;1), M_3(1+\frac{e}{2};\frac{e}{2})$.

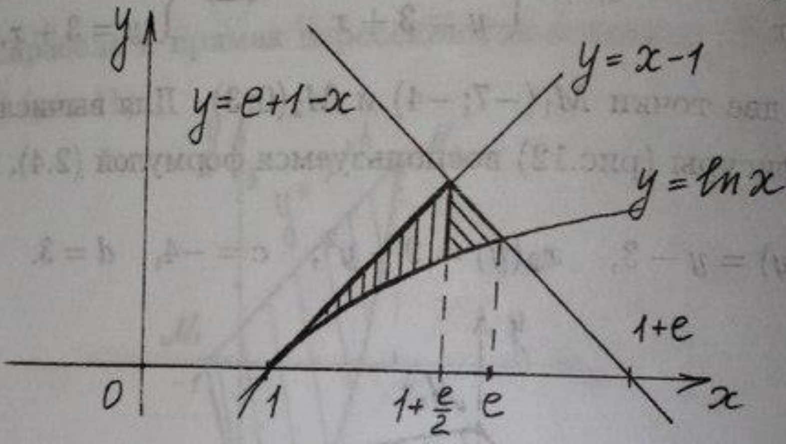

Рисунок 13

Для вычисления площади фигуры $M_1M_2M_3$ разбиваем ее на две простые области $M_1M_3M_4$ и $M_2M_3M_4$ и воспользуемся формулой

$$S=\int_a^b \big(y_2(x)-y_1(x)\big)dx+\int_b^c \big(y_3(x)-y_1(x)\big)dx,$$

где $y_1(x)=\ln x, y_2(x)=x-1, y_3(x)=e+1-x, a=1, b=1+\frac{e}{2}$, $c=e$.

$$S=\int_1^{1+\frac{e}{2}}(x-1-\ln x)dx+\int_{1+\frac{e}{2}}^{e}(e+1-x-\ln x)dx=$$

$$=\Big(\frac{(x-1)^2}{2}-x\ln x+x\Big)\Big|_1^{1+\frac{e}{2}}+\Big(-\frac{(x-e-1)^2}{2}-x\ln x+x\Big)\Big|_{1+\frac{e}{2}}^{e}=$$

$$=\Big(\frac{e^2}{8}-\big(1+\frac{e}{2}\big)\ln\big(\frac{e}{2}+1\big)+\big(1+\frac{e}{2}\big)\Big)-1+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}-e+e\right)-\left(1\frac{e^2}{8}-\left(1+\frac{e}{2}\right)\ln\left(1+\frac{e}{2}\right)+\left(1+\frac{e}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{2}=\frac{e^2-6}{4}.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ и прямой $y = \frac{a}{2}$, $a>0$ (рис.14).

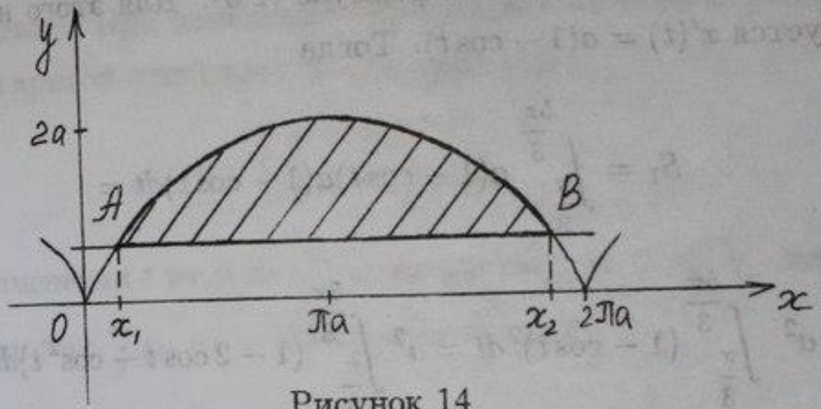

Рисунок 14

Решение. Находим координаты точек пересечения заданных линий:

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \\ a(1-\cos t) = \frac{a}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = \frac{a}{2} \\ \cos t = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = \frac{a}{2} \\ t = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k \end{cases}.$$

Поскольку рассматривается первая арка циклоиды, то $t\in[0;2\pi]$, следовательно, $t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = 2\pi-\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Соответственгде $y = y_2(x)$ – уравнение кривой при изменении параметра t от a до $\frac{a}{2}$, а $y = y_1(x)$ – уравнение кривой при изменении параметра t от 0 до $\frac{a}{2}$. Следовательно, переходя к параметрическому заданию уравнения, получим

$$S = \int_a^{\frac{a}{2}} t^2(a-t)(a-2t)dt - \int_0^{\frac{a}{2}} t^2(a-t)(a-2t)dt.$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле, тогда

$$S = \int_a^{\frac{a}{2}} t^2(a-t)(a-2t)dt + \int_{\frac{a}{2}}^0 t^2(a-t)(a-2t)dt =$$

$$= \int_a^0 t^2(a-t)(a-2t)dt = \int_a^0 (a^2t^2 - 3at^3 + 2t^4)dt =$$

$$= \left(\frac{a^2t^3}{3} - \frac{3at^4}{4} + \frac{2t^5}{5}\right)\Big|_a^0 = -\frac{a^5}{3} + \frac{3a^5}{4} - \frac{2a^5}{6} = \frac{a^5}{60}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

2 а) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями:

1) $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 = y+1 \\ x^2 = 9-y \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 = x^3 \\ x = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = \dfrac{8}{x^2+4} \end{cases}$

6) $\begin{cases} y = \cos x \\ y = x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y = e^x \\ x + y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y = e^{-x} \\ y = x + 1 \\ x = -1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 2^{-x} \\ y = 2 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y = \sin x \\ y = 2\sin x \\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

11) $\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \\ O \in D \end{cases}$

12) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y \leq x \\ y \geq \dfrac{x}{9} \end{cases}$

13) $\begin{cases} y \leq x^2 \\ y \geq -(x-3)(x-5) \\ y = 0, \quad y = 1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^3 \\ x = -1 \end{cases}$

15) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{x} \\ y \leq 2x \\ y \geq \dfrac{x}{2} \end{cases}$

16) $\begin{cases} y = |x| \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$

17) $\begin{cases} y = 2 + x^3 \\ y = |x| \\ x = 1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} y = 2|x| \\ y = x^2 \end{cases}$

19) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = -x^3 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$

20) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = |x| - 1 \end{cases}$

21) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 2x^3 \\ x = 1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x^3 \leq y \leq x^3 + 2 \\ x + y = 2 \\ y = -x \end{cases}$

23) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2\sqrt{x} \\ y = x \end{cases}$ 24) $\begin{cases} y = 3^x \\ y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$

25) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = -2x^3 \\ x = 1 \end{cases}$ 26) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{1+x^2} \\ y = \dfrac{|x|}{2} \end{cases}$

27) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ 28) $\begin{cases} y = 2^x \\ x + 2y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$

29) $\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ 30) $\begin{cases} x = 4 - 2y^2 \\ x = -y^2 \end{cases}$

31) $\begin{cases} y = x^3 + 2 \\ y = x^2 \\ x = 1 \end{cases}$ 32) $\begin{cases} y = \ln x \\ x + y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

33) $\begin{cases} y = \ln x \\ y = -\ln x \\ x = e \end{cases}$ 34) $\begin{cases} y = 2^{|x|} - 2 \\ y = 4 \end{cases}$

35) $\begin{cases} y = 3^x \\ y = -3^x \\ -1 \le x \le 2 \end{cases}$

2 б) Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной параметрически заданными линиями:

1) $\begin{cases} \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \\ x \ge 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \\ y \ge 1 \end{cases}$

III

3) $\begin{cases} \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases} \\ x \geq 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \\ y \geq 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \\ x \geq 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases} \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases} \\ y \geq 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \\ x \leq 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases} \\ x \geq 3\sqrt{3} \end{cases}$

10) $\begin{cases} \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \\ y \geq 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases} \\ y \geq 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases} \\ y \geq 2\sqrt{2} \end{cases}$

14) $\begin{cases} \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases} \\ x \geq 2\sqrt{2} \end{cases}$

15) $\begin{cases} \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases} \end{cases}$

16) $\begin{cases} \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \\ y \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$

17) $\begin{cases} \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \\ y \geq 6 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \\ x \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$

19) $\begin{cases} \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

20) $\begin{cases} \begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases} \\ x \geq 2\sqrt{2} \end{cases}$

21) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=8(t-\sin t)\\ y=8(1-\cos t)\end{array}\right.\\ y\geq 8\end{array}\right.$

22) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=6\cos t\\ y=3\sin t\end{array}\right.\\ x\leq 3\sqrt{3}\end{array}\right.$

23) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{array}\right.\\ x^2+y^2\geq 1\end{array}\right.$

24) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=7\cos t\\ y=2\sin t\end{array}\right.\\ y\geq \sqrt{3}\end{array}\right.$

25) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=4\cos^3 t\\ y=8\sin^3 t\end{array}\right.\\ y\geq 3\sqrt{3}\end{array}\right.$

26) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=5\cos t\\ y=3\sin t\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=5\cos^3 t\\ y=3\sin^3 t\end{array}\right.\end{array}\right.$

27) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=8\cos^3 t\\ y=8\sin^3 t\end{array}\right.\\ y\geq 1\end{array}\right.$

28) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=10(t-\sin t)\\ y=10(1-\cos t)\end{array}\right.\\ y\geq 15\end{array}\right.$

29) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=6\cos^3 t\\ y=6\sin^3 t\end{array}\right.\\ x^2+y^2\geq 9\end{array}\right.$

30) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=\cos t\\ y=2\sin t\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{array}\right.\end{array}\right.$

31) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=2\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{array}\right.\end{array}\right.$

32) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=5\cos t\\ y=2\sin t\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{array}\right.\end{array}\right.$

33) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{array}\right.\\ y\geq 0\end{array}\right.$

34) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=2(\cos t+t\sin t)\\ y=2(\sin t-t\cos t)\end{array}\right.\\ x\geq 0,\quad y\geq 0\end{array}\right.$

35) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=2\cos t+\cos 2t\\ y=2\sin t-\sin 2t\end{array}\right.\\ y\geq 0,\quad y\geq -x\sqrt{3}\end{array}\right.$

2.2 Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат

Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком функции $\rho = \rho(\varphi)$, $\quad \varphi \in [\alpha;\beta]$, заданной в полярной системе координат, и отрезками лучей $\varphi = \alpha$, $\quad \varphi = \beta$. Будем называть такую фигуру (рис.16а) криволинейным сектором. Площадь криволинейного сектора AOB вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (2.6)$$

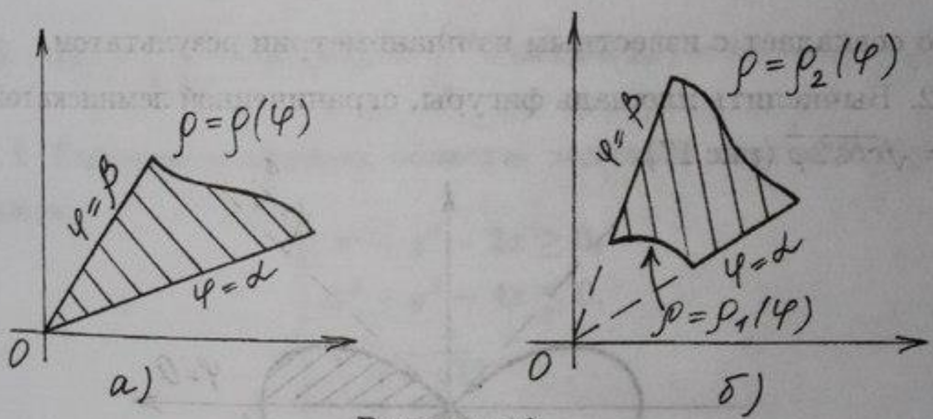

Рисунок 16

Для вычисления площади области $ABCD$, ограниченной графиками функций $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\quad \rho = \rho_2(\varphi)$ и отрезками лучей $\varphi = \alpha$, $\quad \varphi = \beta$ (рис.16б), используем формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi))d\varphi. \qquad (2.7)$$

Примеры.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 2R\cos\varphi$.

Это уравнение определяет окружность (см.рис.5б). Площадь круга определяется следующим образом:

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2R\cos\varphi)^2 d\varphi = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi = \pi R^2.$$

Это совпадает с известным из планиметрии результатом.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ (рис.17).

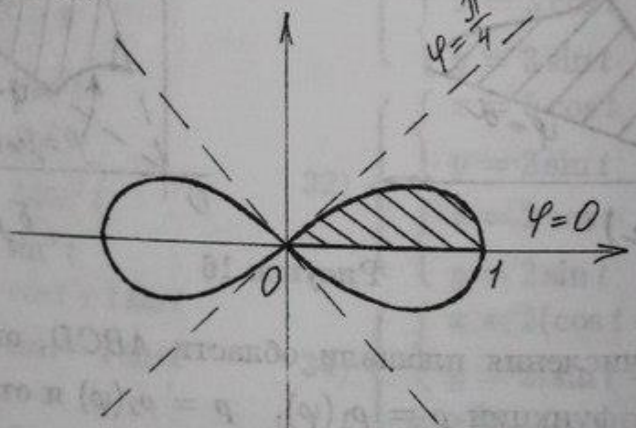

Рисунок 17

Построим эту кривую. В силу четности функции, график кривой расположен симметрично относительно оси Ox. Найдем область определения этой функции: $\cos 2\varphi \geq 0$, отсюда получаем $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$. Кроме того отметим, что период функции равен π, то есть кривая симметрична относительно начала координат.

Из этой последней симметрии и совокупности с симметрией относительно полярной оси Ox следует, что кривая симметрична относительно оси Oy. Так как $\rho(\pm\frac{\pi}{4}) = 0$, то в начале координат кривая имеет касательные, уравнения которых $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$. В конечном счете искомая площадь, ограниченная кривой, в четыре раза больше площади заштрихованной части фигуры на рис.17.

Имеем

$$S = 4S_1 = \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d(2\varphi) = \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

3. Вычислить площадь области, заданной системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \geq 0, \\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0, \\ y \geq -\frac{x}{\sqrt{3}}, \\ y \leq \sqrt{3}x. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения кривых $x^2 + y^2 - 2x = 0$ и $x^2 + y^2 - 4x = 0$, переходя к полярным координатам:

$$x^2 + y^2 = 2x \iff \rho^2 = 2\rho\cos\varphi \iff \rho = 2\cos\varphi,$$

$$x^2 + y^2 = 4x \iff \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \iff \rho = 4\cos\varphi,$$

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} \iff \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$y = \sqrt{3}x \iff \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Фигура, площадь которой надо вычислить, ограничена дугами смещенных по оси Ox окружностей и прямыми, проходящими под углами $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ и $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (рис.18).

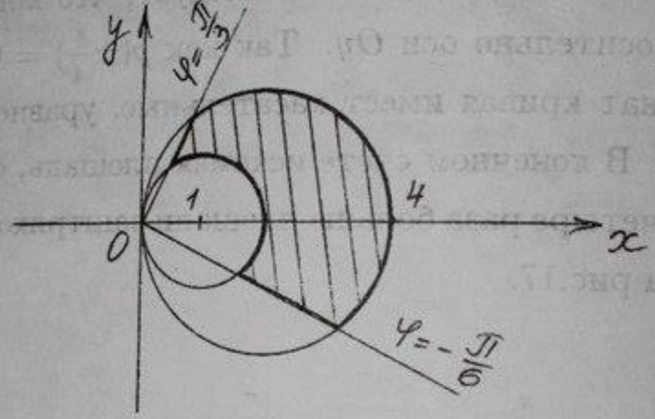

Рисунок 18

Площадь вычисляем по формуле (2.7):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi))d\varphi,$$

где $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\rho_1(\varphi) = 2\cos\varphi$, $\rho_2(\varphi) = 4\cos\varphi$.

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (16\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi)d\varphi = \frac{12}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 3\Big(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 3\Big(\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{2}\Big) -$$

$$-3\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right)=3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}}{2}\right)=$$

$$=3\left(\frac{\pi+\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}(\pi+\sqrt{3}).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

3 Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями:

1) $\begin{cases}\rho=\cos\varphi\\ \rho=2\cos\varphi\\ y\geq\dfrac{3}{\sqrt{3}}\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\rho=\sin\varphi\\ \rho=2\\ y\leq x\end{cases}$

3) $\begin{cases}\rho=\cos 3\varphi\\ \rho=3\cos 3\varphi\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\rho=2\sin 4\varphi\\ \rho=3\sin 4\varphi\end{cases}$

5) $\begin{cases}\rho=\cos\varphi\\ \rho=\sqrt{3}\sin\varphi\\ \text{(внутри обеих)}\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\rho=\sqrt{3}\cos\varphi\\ \rho=-\sin\varphi\\ \text{(внутри обеих)}\end{cases}$

7) $\begin{cases}\rho=\cos 2\varphi\\ \rho=2\cos 2\varphi\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\rho=\sin 2\varphi\\ \rho=4\sin 2\varphi\end{cases}$

9) $\begin{cases}\rho=5\\ \rho=5\cos 3\varphi\quad\text{(вне)}\end{cases}$ 10) $\begin{cases}\rho=a\varphi^2\\ y\geq\dfrac{x}{\sqrt{3}}\\ y\leq x\sqrt{3}\end{cases}$

11) $\begin{cases} \rho = a(1+\cos\varphi) \\ y \geq -x \end{cases}$

12) $\begin{cases} \rho = a\varphi \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} \rho = 4\sin\varphi \\ y \geq |x| \end{cases}$

14) $\begin{cases} \rho = 8\cos\varphi \\ x \leq 6 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \rho = 4(1+\cos\varphi) \\ \rho\cos\varphi = 3 \quad \text{(справа)} \end{cases}$

16) $\begin{cases} \rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ \rho \leq a \end{cases}$

17) $\begin{cases} \rho = 4\sin 3\varphi \\ \rho \geq 2 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \rho = a(1+\sin\varphi) \\ \rho = a \quad \text{(внутри обеих)} \end{cases}$

19) $\begin{cases} \rho = \sqrt{6\cos 2\varphi} \\ \rho = 2\cos\varphi \quad \text{(вне)} \end{cases}$

20) $\begin{cases} \rho = 2(1+\cos\varphi) \\ y \geq -\dfrac{x}{2} + 2 \end{cases}$

21) $\begin{cases} \rho = a\cos^3\varphi \\ \rho = a\cos\varphi \quad \text{(вне)} \end{cases}$

22) $\begin{cases} \rho = a(1+\cos\varphi) \\ \rho = -a\cos\varphi \quad \text{(вне)} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

23) $\begin{cases} \rho = -2\sqrt{3}\cos\varphi \\ \rho = 2\sin\varphi \\ \text{(внутри обеих)} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \rho = 1+\cos\varphi \quad \text{(внутри)} \\ \rho = 1-\cos\varphi \quad \text{(вне)} \end{cases}$

25) $\begin{cases} \rho = 4 \\ \rho = 4\sin\varphi \quad \text{(вне)} \end{cases}$

26) $\begin{cases} \rho = 4(1+\cos\varphi) \\ \rho\cos\varphi = 3 \text{(слева)} \end{cases}$

27) $\begin{cases} \rho = \sqrt{6\cos\varphi} \\ \rho = 2\cos\varphi \\ \text{(внутри обеих)} \end{cases}$

28) $\begin{cases} \rho = a\sin 2\varphi \quad \text{(вне)} \\ \rho = a \\ y \geq |x| \end{cases}$

29) $\begin{cases} \rho = 2\cos\varphi \\ \rho = 2\cos 2\varphi \end{cases}$

30) $\begin{cases} \rho = a\sin\varphi \\ \rho = a(1+\cos\varphi) \\ \text{(внутри обеих)} \end{cases}$

31) $\begin{cases} \rho \leq 2+\sin 3\varphi \\ \rho \geq 1 \end{cases}$

32) $\begin{cases} \rho = a(1+\sin\varphi) \\ \rho = a\sin\varphi \\ x \geq 0, \quad y \leq x \end{cases}$

33) $\begin{cases} \rho \le 3 + 2\cos 3\varphi \\ \rho \ge 1 \end{cases}$ 34) $\begin{cases} \rho \le 3 + \sin 4\varphi \\ \rho \ge 1 \end{cases}$

35) $\begin{cases} \rho \le 4 + \cos 4\varphi \\ \rho \ge 2 \end{cases}$

3 ДЛИНА ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Для выполнения заданий по данной теме следует повторить методы интегрирования в определенном интеграле, усвоить нижеприведенные формулы и просмотреть решения предложенных примеров.

Все функции будем рассматривать в предположении, что они непрерывны вместе со своими производными на заданном отрезке.

1. Пусть кривая задана явно:

$$y = f(x), \quad x \in [a; b].$$

Тогда ее длина

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{3.1}$$

2. Пусть кривая задана параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta].$$

Тогда

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \tag{3.2}$$

3. Пусть кривая задана в полярных координатах:

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha; \beta].$$

Тогда

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \tag{3.3}$$

Примеры.

1. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ между точками $A(0;0)$ и $B(9;27)$ (рис.19).

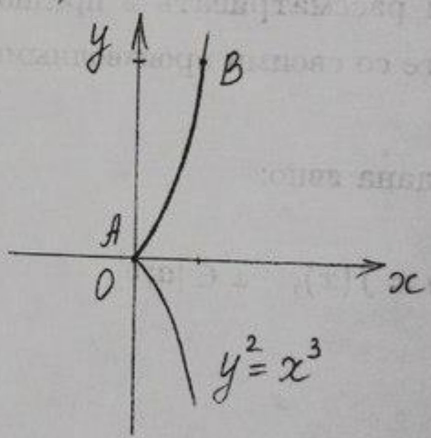

Рисунок 19

Это полукубическая парабола, имеющая две симметричные относительно оси OX ветви $y = \pm\sqrt{x^3}$, расположенные в первой и четвертой четверти. Дуга AB расположена в первой четверти, поэтому выбираем $y = \sqrt{x^3}$. Находим $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, тогда $(y')^2 = \frac{9}{4}x$. По условию задачи $a = 0, b = 9$. Тогда используя формулу (3.1), получаем:

$$l = \int_0^9 \sqrt{1 + \frac{9}{4}xdx} = \frac{1}{2}\int_0^9 \sqrt{4+9x}dx =$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^9 (4+9x)^{\frac{1}{2}} d(4+9x) = \frac{2}{54}(4+9x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^9 =$$

$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{85^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{\sqrt{85^3}-8}{27}.$$

2. Найти длину дуги всей кривой Штейнера (рис.20) $(r : R = 1 : 3)$, определяемой уравнениями

$$\begin{cases} x = 2R\cos\frac{t}{3} + R\cos\frac{2t}{3} \\ y = 2R\sin\frac{t}{3} - R\sin\frac{2t}{3} \end{cases}, 0 \le t \le 6\pi.$$

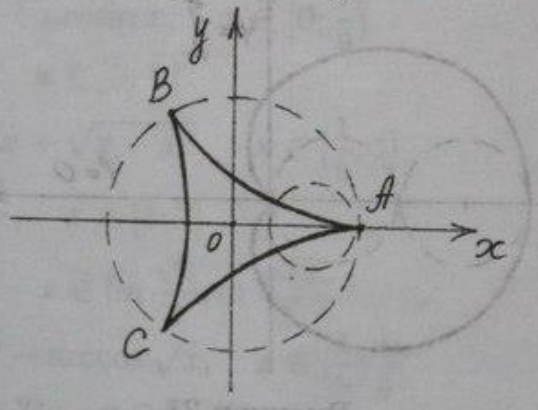

Рисунок 20

Используем формулу (3.2). Находим требуемые производные и возводим их в квадрат:

$$\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}R\sin\frac{t}{3} - \frac{2}{3}R\sin\frac{2t}{3}, \\ y' = \frac{2}{3}R\cos\frac{t}{3} - \frac{2}{3}R\cos\frac{2t}{3}; \end{cases}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{4}{9}R^2\Big(\sin^2\frac{t}{3} + 2\sin\frac{t}{3}\sin\frac{2t}{3} + \sin^2\frac{2t}{3} +$$
$$+ \cos^2\frac{t}{3} - 2\cos\frac{t}{3}\cos\frac{2t}{3} + \cos^2\frac{2t}{3}\Big) =$$
$$= \frac{8}{9}R^2(1-\cos t) = \frac{16}{9}R^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

При прохождении точкой участка AB параметр t пробегает значения от 0 до 2π. Поэтому

$$\frac{l}{3} = \int_0^{2\pi}\frac{4}{3}R\sin\frac{t}{2}dt = -\frac{8}{3}R\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{3}R,$$
$$l = 16R.$$

3. Найти длину дуги кардиоиды (рис.21), определяемой уравнением $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$.

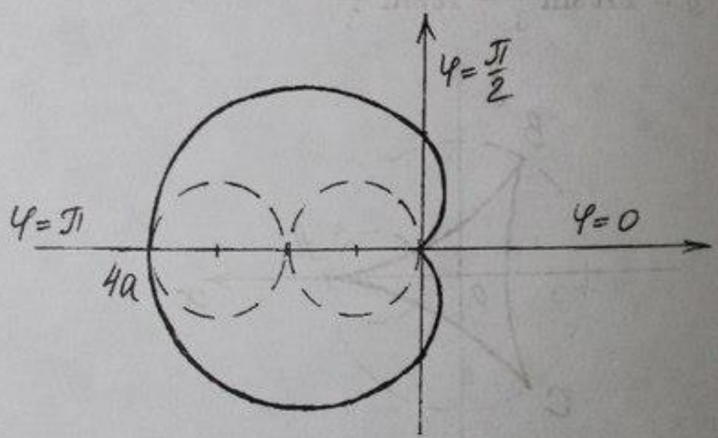

Рисунок 21

Используем формулу (3.3). Сначала находим производную $\rho' = 2a\sin\varphi$.

$$\rho^2 + (\rho')^2 = 4a^2(1-\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi =$$
$$= 4a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4a^2(2-2\cos\varphi) =$$

$$= 8a^2(1-\cos\varphi) = 16a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Тогда
$$l = \int_0^{2\pi} 4a\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = 16a.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

4

а) Вычислить длину заданной дуги кривой:

1) $y = e^x - 2, \quad x \in [\ln\sqrt{8}; \ln\sqrt{24}]$

2) $y = \ln(x^2 - 1), \quad x \in [2; 3]$

3) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad x \in [0; \frac{7}{9}]$

4) $y = \ln\cos x, \quad x \in [0; \frac{\pi}{3}]$

5) $y = \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \quad x \in [\frac{1}{9}; 1]$

6) $y = \frac{\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}, \quad x \in [1; 2]$

7) $y = 2e^x + 1, \quad x \in [\ln\frac{\sqrt{3}}{2}; \ln\frac{\sqrt{15}}{2}]$

8) $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x}, \quad x \in [\frac{1}{9}; \frac{1}{4}]$

9) $y = \ln(2x^2 - 2), \quad x \in [2; 4]$

10) $y = \ln\sin x, \quad x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}]$

11) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}, \quad x \in [2; 3]$

12) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad x \in [-\frac{5}{9}; 0]$

13) $y = e^{-x} + 4, \quad x \in [-\ln\sqrt{24}; -\ln\sqrt{3}]$

14) $y = -\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}, \quad x \in [\frac{1}{4}; 1]$

15) $y=\ln(2\cos x), \quad x\in[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}]$

16) $y=\frac{\ln 3x}{2}-\frac{x^2}{4}, \quad x\in[\frac{1}{2};1]$

17) $y=\ln(3x^2-3), \quad x\in[2;5]$

18) $y=e^{2x}-1, \quad x\in[\frac{1}{4}\ln\frac{3}{4};\frac{1}{4}\ln 2]$

19) $y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x+3, \quad x\in[-\frac{8}{9};\frac{7}{9}]$

20) $y=\ln(3\sin x), \quad x\in[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}]$

21) $y=\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}, \quad x\in[\frac{1}{25};\frac{1}{9}]$

22) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln(x^3)}{6}, \quad x\in[1;3]$

23) $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-2, \quad x\in[\frac{1}{3};\frac{1}{2}]$

24) $y=-\ln\cos x, \quad x\in[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}]$

25) $y=1+e^{-2x}, \quad x\in[-\frac{1}{4}\ln\frac{15}{4};-\frac{1}{4}\ln\frac{3}{4}]$

26) $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2}, \quad x\in[\frac{9}{25};1]$

27) $y=\ln(1-x^2), \quad x\in[0;\frac{1}{2}]$

28) $y=\frac{x^4}{8}+\frac{1}{4x^2}, \quad x\in[1;3]$

29) $y=-\ln\sin x, \quad x\in[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}]$

30) $y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x+1, \quad x\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{4}]$

31) $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}, \quad x\in[\frac{4}{25};\frac{1}{4}]$

32) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln 7x}{2}, \quad x\in[\frac{1}{3};1]$

33) $y=\frac{x^5}{10}+\frac{1}{6x^3}, \quad x\in[1;2]$

34) $y^2=\frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеч. прямой $x=-1$

35) $y=2x^2$, отсеч. прямой $y=2x$

4 б) Вычислить длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат:

1) $\rho = 2\sin^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$

2) $\rho = \varphi^2, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

3) $\rho = 1 - \cos\varphi$

4) $\rho = e^{2\varphi}, \quad \varphi \in [0; \pi]$

5) $\rho = \cos^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

6) $\rho = 4(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

7) $\rho = 4\cos\varphi$, расп. выше линии $y = x$

8) $\rho = 3\varphi^2, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$

9) $\rho = 2(1 - \cos\varphi), \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

10) $\rho = 3\sin^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$

11) $\rho = 2e^{3\varphi}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

12) $\rho = 2\cos^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$

13) $\rho = 1 + \cos\varphi, \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

14) $\rho = 3$, расп. выше линии $y = |x|$

15) $\rho = 2\varphi^2, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$

16) $\rho = 3(1 - \cos\varphi), \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$

17) $\rho = 3e^{\varphi}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$

18) $\rho = 4\sin^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$

19) $\rho = 3(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{4}]$

20) $\rho = 3\cos^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$

21) $\rho = 6\sin\varphi$, расп. ниже линии $y = x\sqrt{3}$

22) $\rho = 4\varphi^2, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{6}]$

23) $\rho = 5(1 - \cos\varphi)$

24) $\rho = 2e^{5\varphi}, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$

25) $\rho = 4\cos^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

26) $\rho = 5\sin^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

27) $\rho = 4(1+\cos\varphi), \quad \varphi \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

28) $\rho = 4\sin\varphi,$ расп. внутри линии $\rho = 2$

29) $\rho = 3e^{3\varphi}, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$

30) $\rho = 5\cos^3\frac{\varphi}{3}, \quad \varphi \in [0; \frac{\pi}{6}]$

31) $\rho = 6\cos\varphi,$ расп. внутри линии $\rho = 3$

32) $\rho = 5\varphi^2, \quad \varphi \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$

33) $\rho = 3(1-\cos\varphi), \quad \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

34) $\rho = -2\sqrt{3}\cos\varphi,$ расп. внутри линии $\rho = 2\sin\varphi$

35) $\rho = 2(1+\cos\varphi)$

4

в) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

2) $\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$ (1 арка)

3) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

4) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t \\ y = t^2 + 2 \end{cases}, \quad t \in [0; 3]$

6) $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

7) $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{4}]$

8) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{4}]$

9) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

10) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ (1 арка)

11) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ (в 1 четверти)

12) $\begin{cases} x = 5\sin t + 2\cos t \\ y = 2\sin t - 5\cos t \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

13) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \quad t \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

14) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

15) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{3}]$

16) $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ (в 1 четверти)

17) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

18) $\begin{cases} x = 5\cos^2 t \\ y = 5\sin^2 t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

19) $\begin{cases} x = 5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{6}]$

20) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3} - t \\ y = t^2 + 5 \end{cases}, \quad t \in [0; 2]$

21) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{4}]$

22) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ (1 арка)

23) $\begin{cases} x = 6\sin t + 5\cos t \\ y = 5\sin t - 6\cos t \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

24) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

25) $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{4}]$

26) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

27) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, \quad t \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$

28) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$

29) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

30) $\begin{cases} x = 4\cos^2 t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

31) $\begin{cases} x = e^t(\cos t - \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$

32) $\begin{cases} x = 2\sin t + 3\cos t \\ y = 3\sin t - 2\cos t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

33) $\begin{cases} x = \dfrac{t^5}{5} - t \\ y = \dfrac{2}{3}t^3 + 5 \end{cases}, \quad t \in [0; 2]$

34) $\begin{cases} x = 9(t - \sin t) \\ y = 9(1 - \cos t) \end{cases}$ (1 арка)

35) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \quad t \in [0; \frac{\pi}{3}]$

4 ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Объем тела, если известна площадь $S(x)$ любого сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс при $x \in [a;b]$ (рис.22а) вычисляется как $\int_a^b S(x)dx$.

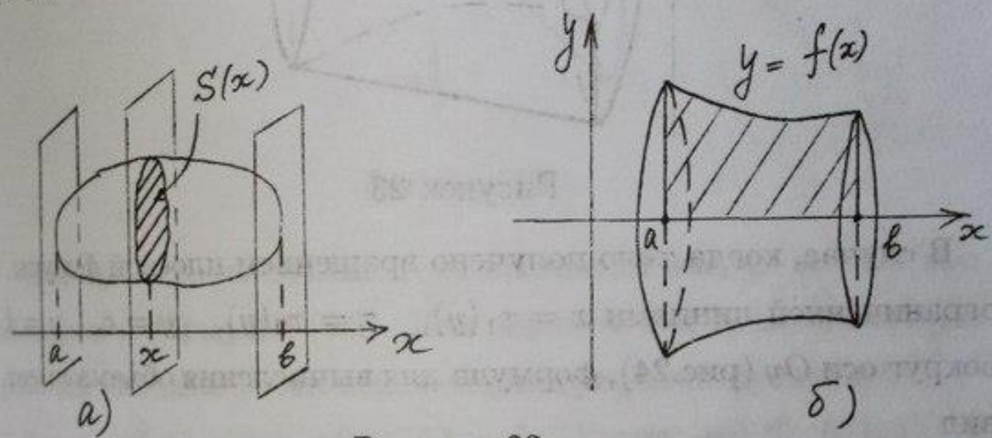

Рисунок 22

В частности, если тело получено вращением вокруг оси Ox (рис.22б) плоской фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, то сечение есть круг и $S(x) = \pi f^2(x)$. Тогда формула для вычисления объема тела принимает вид

$$V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{4.1}$$

Если область ограничена линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$ (рис.23), то удобно пользоваться формулой

$$V_{ox} = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx. \tag{4.2}$$

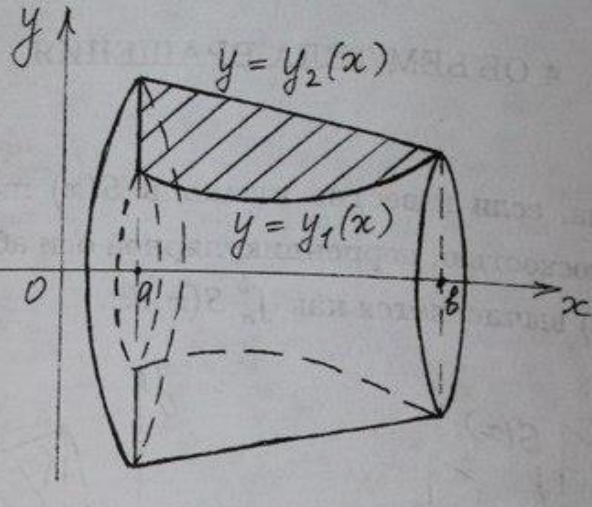

Рисунок 23

В случае, когда тело получено вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = c$, $y = d$ вокруг оси Oy (рис.24), формула для вычисления объема имеет вид

$$V_{oy} = \pi \int_c^d (x_2^2(y) - x_1^2(y))dy. \tag{4.3}$$

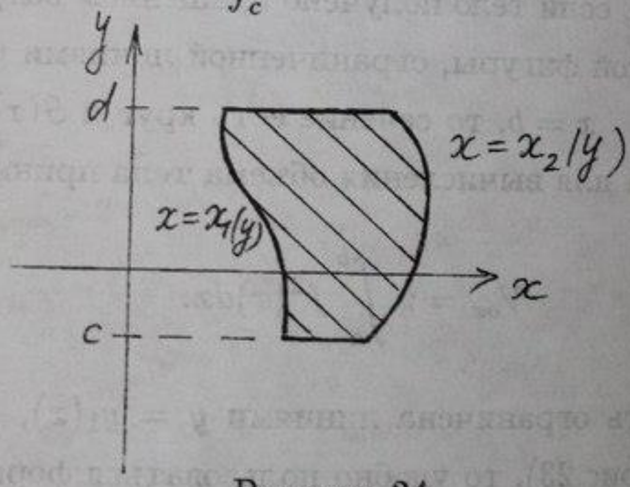

Рисунок 24

Примеры.

1. Найти объем тел, полученных вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = x$ (рис.25).

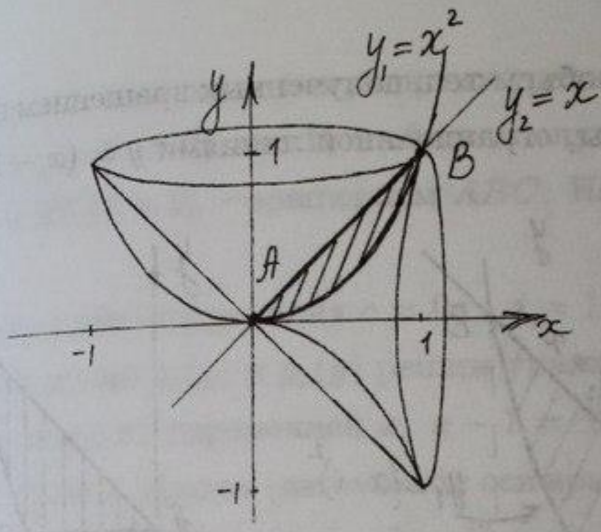

Рисунок 25

Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Ox воспользуемся формулой (4.2). Для определения границ интегрирования находим точки пересечения графиков функций $y = x^2$ и $y = x$: $x^2 = x \Longrightarrow x(x-1) = 0$. Тогда $A(0;0), B(1;1)$. В нашем случае $y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x, \quad a = 0, \quad b = 1$. Тогда имеем:

$$V_{ox} = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \pi\Big(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\Big)\Big|_0^1 = \pi\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{2\pi}{15}.$$

При вращении вокруг оси Oy границы интегрирования $c = 0$, $d = 1$, а $x_1(y) = y, \quad x_2(y) = \sqrt{y}$. Тогда с помощью формулы (4.3) получаем:

$$V_{oy} = \pi \int_0^1 ((\sqrt{y})^2 - y^2)dy = \pi \int_0^1 (y - y^2)dy =$$

$$= \pi\Big(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_0^1 = \pi\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

2. Найти объем тел, полученных вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^2$ и $y = x+1$ (рис.26).

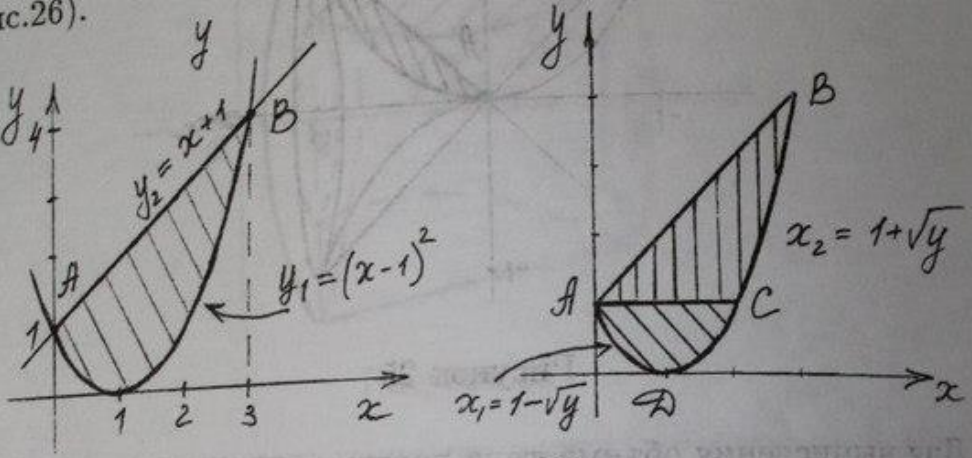

Рисунок 26

Найдем точки пересечения графиков функций: $x^2 - 2x + 1 = x+1 \Longrightarrow x(x-3) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$. Тогда $A(0;1)$, $B(3;4)$. Для вычисления V_{ox} используем формулу (4.2), где полагаем $a = 0$, $b = 3$, $y_1(x) = (x-1)^2$, $y_2(x) = x+1$:

$$V_{ox} = \pi \int_0^3 ((x+1)^2 - (x-1)^4)dx =$$

$$= \pi \int_0^3 (x^2 + 2x + 1 - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1))dx =$$

$$= \pi \int_0^3 (6x - 5x^2 + 4x^3 - x^4)dx = \pi\left(3x^2 - \frac{5}{3}x^3 + x^4 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3 =$$

$$= \pi\left(27 - 45 + 81 - \frac{243}{5}\right) = \frac{72\pi}{5}.$$

Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Oy придется разбить область на две части, так как ближняя к оси вращения линия описывается двумя разными уравнениями (см. рис.26). Тогда $V_{oy} = V_1 + V_2$, где V_1 – объем, полученный вращением области ACD, а V_2 – вращением ABC. Найдем их по отдельности.

Для V_1 границы интегрирования $c = 0, \quad d = 1$. Для получения уравнений линий $g_1(y)$ и $g_2(y)$ решим уравнение $y = (x-1)^2$ относительно переменной x: $x - 1 = \pm\sqrt{y} \Longrightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}$. Таким образом, правая (дальняя от оси вращения) ветка параболы имеет уравнение $x_2(y) = 1 + \sqrt{y}$, а левая (ближняя к оси вращения) $x_1(y) = 1 - \sqrt{y}$. Тогда

$$V_1 = \pi \int_0^1 ((1+\sqrt{y})^2 - (1-\sqrt{y})^2)dy =$$

$$= \pi \int_0^1 (1 + 2\sqrt{y} + y - 1 + 2\sqrt{y} - y)dy =$$

$$= \pi \int_0^1 4\sqrt{y}dy = \frac{8\pi}{3} y^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}.$$

Для V_2 границы интегрирования $c = 1, \quad d = 4$, дальняя от оси вращения линия описывается тем же уравнением, что и для случая V_1, а ближняя – уравнением $x_1(y) = y - 1$. Тогда

$$V_2 = \pi \int_1^4 ((1+\sqrt{y})^2 - (y-1)^2)dy =$$

$$= \pi \int_1^4 (1 + 2\sqrt{y} + y - y^2 + 2y - 1)dy = \pi \int_1^4 (2\sqrt{y} + 3y - y^2)dy =$$

$$= \pi\left(\frac{4}{3}y^{3/2} + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_1^4 = \pi\left(\frac{32}{3} + 24 - \frac{64}{3} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{45}{2} - \frac{35}{3}\right) = \frac{65}{6}\pi.$$

Складывая полученные результаты, получаем окончательно

$$V_{oy} = \frac{8}{3}\pi + \frac{65}{6}\pi = \frac{81}{6}\pi = \frac{27}{2}\pi.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

5 Найти объемы тел, полученных вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, заданной условиями:

1) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 - x \\ x = 0, \quad x = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \frac{3}{x} \\ y = \frac{x}{3} \\ x = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = (x-2)^2 \\ y = x \\ y = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y = e^x \\ y = e^{-x} \\ x = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x - 1 \\ y = 1, \quad y = 2 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x - 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} y = 2^x \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x \leq y \leq x + 1 \\ y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2\sqrt{x} \\ y = x \end{cases}$

14) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x - 1 \leq y \leq x + 1 \\ y = 2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = 2 - 2x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x \leq y \leq x + 2 \\ y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x \end{cases}$

18) $\begin{cases} y = x \\ x + y = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

19) $\begin{cases} y = x \\ y = x + 2 \\ 2 \leq y \leq 3 \end{cases}$

20) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2\sqrt{x} \\ x = 1 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 1 - x \leq y \leq 2 - x \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

22) $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

23) $\begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = x \end{cases}$

24) $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x + y = 2 \\ x = 0, \quad y = 0 \end{cases}$

25) $\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \\ x + y = 3 \end{cases}$

26) $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$