

**Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»**

---

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

### **Часть 1**

**Учебное пособие**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
ПГУПС  
2011**

Федеральное агентство железнодорожного транспорта  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ»

---

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Часть 1

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ  
ПГУПС  
2011

УДК 624.04  
ББК 38.112  
Р47

**Р е ц е н з е н т ы :**  
зав. кафедрой строительной механики  
Санкт-Петербургского государственного  
архитектурно-строительного университета (СПбГАСУ),  
профессор, д-р техн. наук,  
*Л. Н. Кондратьева;*  
доцент каф. прочности материалов и конструкций  
Петербургского государственного университета  
путей сообщения (ПГУПС), канд. техн. наук,  
*Б. М. Аллахвердов*

**Решение задач по строительной механике. Часть 1:**  
Р47 учеб. пособие / А. В. Бенин, О. В. Козьминская, Я. К. Кульгавий,  
И. Б. Поварова, И. И. Рыбина, Р. А. Шафеев. – СПб. : Петербург-  
ский государственный университет путей сообщения, 2011. –  
43 с.

ISBN 978-5-7641-0282-5

Настоящее учебное пособие разработано на основании курса лекций «Динамика и устойчивость искусственных сооружений», который авторы читают в ПГУПС. Первая часть учебного пособия включает в себя три задачи: расчет многопролетной статически определимой балки, расчет трехшарнирной арки и расчет фермы на подвижную нагрузку.

Предназначено для студентов заочной формы обучения, изучающих дисциплины «Строительная механика» и «Сопро- тивление материалов с элементами строительной механики».

УДК 624.04  
ББК 38.112

ISBN 978-5-7641-0282-5

© Коллектив авторов, 2011  
© Петербургский государственный  
университет путей сообщения,  
2011

## Общие положения

Исходные данные для индивидуальных заданий на контрольные работы по строительной механике студент должен брать из приводимой к каждой задаче таблицы в строгом соответствии с шифром зачетной книжки. Для этого нужно написать шифр несколько раз и под последними шестью цифрами подписать буквы: а, б, в, г, д, е. Тогда цифра над буквой «а» укажет, какую строку следует взять из столбца «а», цифра над буквой «б» – какую строку следует взять из столбца «б» и т. д. (см. пример ниже).

При шифре 96-С-181 нужно написать подряд два раза 181 и под шестью цифрами подписать буквы:	При шифре 10-С-04 нужно написать подряд три раза 04 и под шестью цифрами подписать буквы:
1 8 1 1 8 1	0 4 0 4 0 4
а б в г д е	а б в г д е

Чертежи следует выполнять при строгом соблюдении масштаба; чертежи и тетрадь расчетов должны быть подписаны студентом, выполнившим работу. Страницы в тетради необходимо пронумеровать. Нужно также указать свой учебный номер (шифр) и адрес.

### Задача № 1

#### РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Для многопролетной шарнирной балки (рис. 1.1) требуется:

- 1) вычертить в масштабе схему балки и указать основные размеры в метрах;
- 2) проверить геометрическую неизменяемость системы;
- 3) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от заданной нагрузки;
- 4) построить линию влияния изгибающего момента в сечении  $m$ ;
- 5) загрузить эту линию влияния заданной нагрузкой и сопоставить полученное значение момента с величиной, полученной в п. 3.

Исходные данные взять из табл. 1.1.

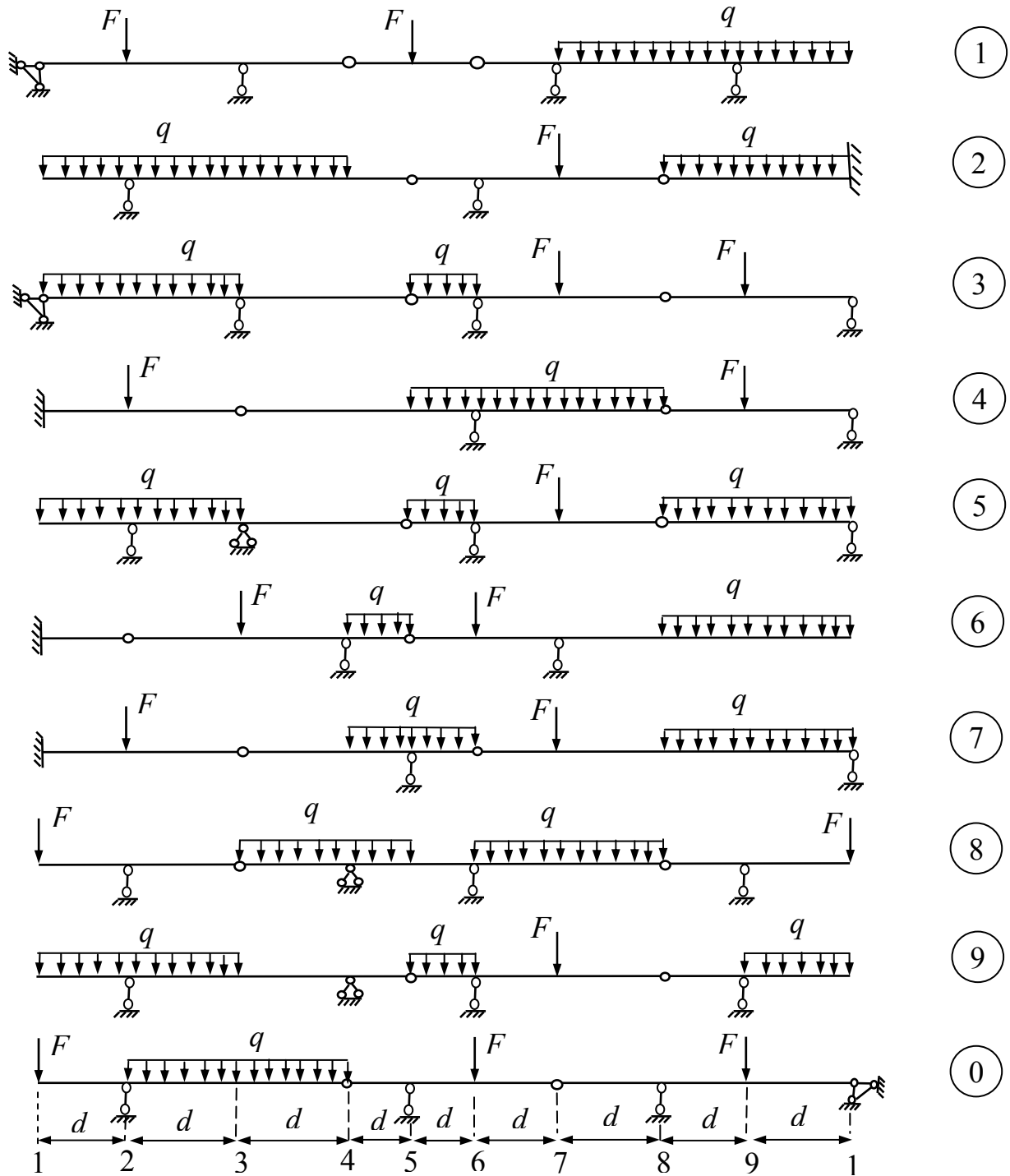


Рис. 1.1

Таблица 1.1

Номер		Длина панели $d$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	Сечение $t$
строки	схемы				
1	1	2	10	2	4
2	2	3	20	4	2
3	3	4	30	3	2
4	4	5	40	4,5	10
5	5	2,5	50	2,5	2
6	6	3,5	5	3,5	1
7	7	4,5	5	5	5
8	8	5,5	5	5,5	3
9	9	2,5	5	6	9
0	0	3,5	5	3	1
	е	а	в	д	е

### Пример решения задачи № 1

Исходные данные:  $d = 3$  м;  $F = 30$  кН;  $q = 4$  кН/м;  $M = 6$  кН м.

**1.1. Вычерчивание в масштабе схемы балки с указанием основных размеров в метрах (рис. 1.2).**

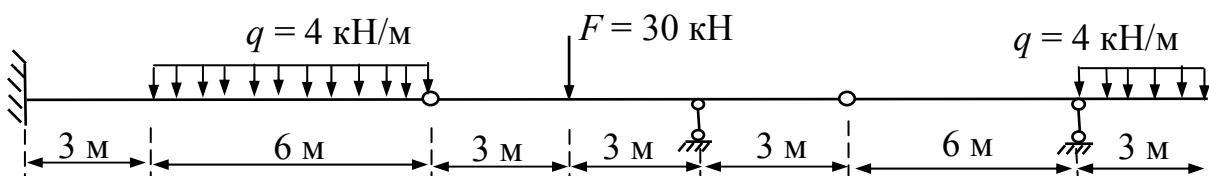


Рис. 1.2

### 1.2. Проверка геометрической неизменяемости системы

Проверку геометрической неизменяемости системы производим по формуле:

$$W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (1.1)$$

где  $W$  – число степеней свободы системы;

$D$  – число жестких дисков;

$Ш$  – число шарниров в балке;

$C_0$  – число опорных связей.

В нашем случае:  $D = 3$ ;  $Ш = 2$ ;  $C_0 = 5$  (рис. 1.3), тогда

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

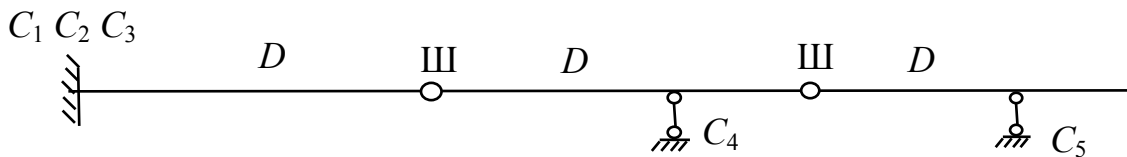


Рис. 1.3

Условие (1.1) является необходимым, но недостаточным условием геометрической неизменяемости. Для получения достаточного условия произведем анализ структурного образования системы. С этой целью изобразим схему взаимодействия отдельных элементов балки (поэтажную схему, рис. 1.4, а).

На этой схеме промежуточные шарниры заменены шарнирно-неподвижными опорами, соединяющими отдельные элементы балки.

Балка  $AB$  геометрически неизменяемая, как балка, жестко заделанная одним концом. Расположенная выше балка  $BCD$  одним своим концом прикреплена с помощью двух стрижней к геометрически неизменяемой балке  $AB$ , а в точке  $C$  опирается на вертикальный опорный стержень, связывающий ее непосредственно с «землей». Три стержня обеспечивают геометрическую неизменяемость балки  $BCD$ . Аналогично прикрепляется и расположенная еще выше балка  $DEG$ .

Таким образом, произведенный анализ структурного образования подтверждает, что рассматриваемая система является геометрически неизменяемой.

### 1.3. Построение эпюры поперечных сил и изгибающих моментов от заданной нагрузки

Построение эпюр  $Q$  и  $M$  произведем следующим образом: определим поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M$  в каждом элементе многопролетной балки и построим эпюры  $Q$  и  $M$  для каждого такого элемента. Эти эпюры будут являться отдельными участками эпюр  $Q$  и  $M$  для всей балки.

Изобразим каждый из элементов исходной балки с действующими на него внешними нагрузками и опорными реакциями (рис. 1.4, б).

Определим опорные реакции.

Начнем с балки  $DEG$ , так как она имеет наименьшее количество неизвестных опорных реакций. Определим опорные реакции  $R_D$  и  $R_E$ :

$$\sum M_E = 0; \quad R_D \cdot 6 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0; \quad R_D = -\frac{q \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = -\frac{4 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = -3 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad R_D \cdot 6 - q \cdot 3 \cdot 7,5 = 0; \quad R_D = \frac{q \cdot 3 \cdot 7,5}{6} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 7,5}{6} = 15 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y_i = 0; \quad R_D + R_E - q \cdot 3 = -3 + 15 - 4 \cdot 3 = 0.$$

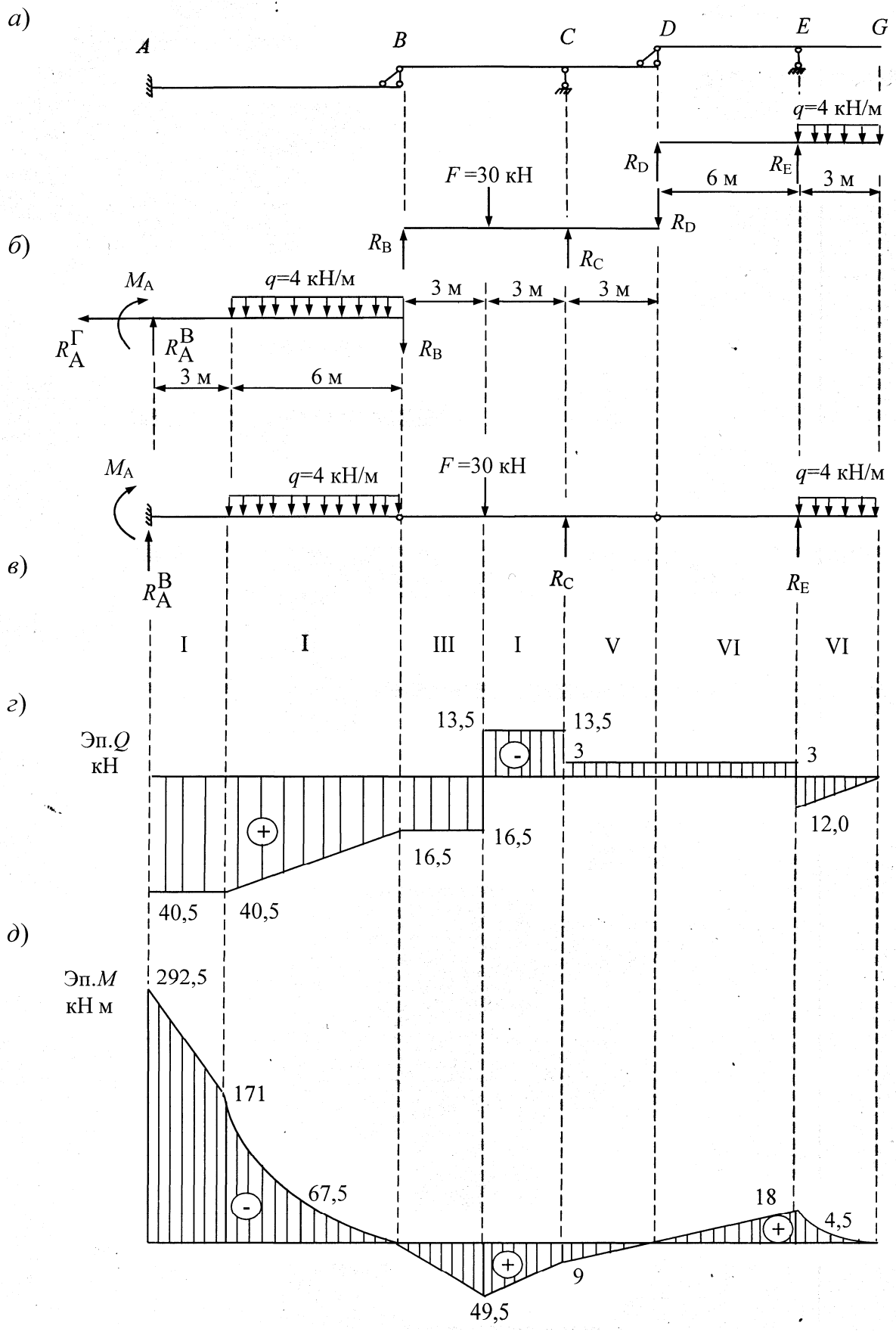


Рис. 1.4



Далее определим опорные реакции  $R_B$  и  $R_C$ :

$$\sum M_B = 0; F \cdot 3 - R_C \cdot 6 + R_D \cdot 9 = 0;$$

$$R_C = \frac{F \cdot 3 + R_D \cdot 9}{6} = \frac{30 \cdot 3 - 3 \cdot 9}{6} = 10,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0; R_B \cdot 6 - F \cdot 3 + R_D \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot 3 - R_D \cdot 3}{6} = \frac{30 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6} = 16,5 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y_i = 0; R_B - F + R_C - R_D = 16,5 - 30 + 10,5 + 3 = 0.$

Определим опорные реакции в основной балке  $AB$ :

$$\sum X_i = 0; R_A^F = 0;$$

$$\sum M_A = 0; M_A + q \cdot 6 \cdot 6 + R_B \cdot 9 = 0;$$

$$M_A = -q \cdot 6 \cdot 6 - R_B \cdot 9 = -4 \cdot 6 \cdot 6 - 16,5 \cdot 9 = -292,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_B = 0; M_A + R_A^B - q \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$R_A^B = \frac{-M_A \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 3}{9} = \frac{292,5 + 4 \cdot 6 \cdot 3}{9} = 40,5 \text{ кН}.$$

Проверка:  $\sum Y_i = 0; R_A^B - q \cdot 6 - R_B = 40,5 - 4 \cdot 6 - 16,5 = 0.$

Выполним еще одну проверку правильности вычисления опорных реакций. Для этого рассмотрим равновесие исходной балки (рис. 1.4, *в*):

$$\sum Y_i = 0;$$

$$R_A^B - q \cdot 6 - F + R_C + R_E - q \cdot 3 = 40,5 - 4 \cdot 6 - 30 + 10,5 + 15 - 4 \cdot 3 = 0.$$

Таким образом, опорные реакции:

$$R_E = 15 \text{ кН}; R_C = 10,5 \text{ кН}; R_A^B = 40,5 \text{ кН}; M_A = -292,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Реакции давления одних элементов на другие:  $R_D = -3 \text{ кН}; R_B = 16,5 \text{ кН}.$

Построим эпюры  $Q$  и  $M$  в элементах исходной балки. Начнем с балки  $AB$  (можно начать с любой другой). Балка  $AB$  будет иметь два участка, различающихся выражением для  $Q$  и  $M$ . Обозначим эти участки римскими цифрами I и II (рис. 1.4, *з*):

$$\text{участок I: } 0 \leq z \leq 3 \text{ м}; \quad Q^I = R_A^B = 40,5 \text{ кН};$$

$$\text{участок II: } 0 \leq z \leq 6 \text{ м}; \quad Q^{II} = R_B + qz;$$

$$z = 0; \quad Q^{II} = R_B = 16,5 \text{ кН};$$

$$z = 6; \quad Q^{II} = R_B + q \cdot 6 = 16,5 + 4 \cdot 6 = 40,5 \text{ кН}.$$

Эпюра  $Q$  для балки  $AB$  показана на рис. 1.4, *з*. Построим эпюру  $M$  для балки  $AB$ :

участок I:  $0 \leq z \leq 3$  м;  $M^I = R_A^B z + M_A$ ;

$z = 0$ ;  $M^I = M_A = -292,5$  кН м;

$z = 3$ ;  $M^I = R_A^B \cdot 3 + M_A = 40,5 \cdot 3 - 292,5 = -171$  кН · м.

участок II:  $0 \leq z \leq 6$  м;  $M^{II} = -R_B z - \frac{q z^2}{2}$ .

На участке II эпюра  $M$  очерчена по квадратной параболе. Но так как в пределах участка II отсутствуют экстремумы функции  $M^{II}$  (см. эпюру  $Q^{II}$ ), определим следующие три значения  $M^{II}$ :

при  $z = 0$   $M^{II} = 0$ ;

при  $z = 3$  м  $M^{II} = -R_B \cdot 3 - \frac{q \cdot 3^2}{2} = -16,5 \cdot 3 - \frac{4 \cdot 3^2}{2} = -67,5$  кН · м;

при  $z = 6$  м  $M^{II} = -R_B \cdot 6 - \frac{q \cdot 6^2}{2} = -16,5 \cdot 6 - \frac{4 \cdot 6^2}{2} = -171$  кН · м.

Эпюра  $M$  для балки  $AB$  показана на рис. 1.4, д.

Построим эпюры  $Q$  и  $M$  в балке  $BD$ , которая будет состоять из трех участков (см. рис. 1.4, з).

Эпюра  $Q$ :

участок III:  $0 \leq z \leq 3$  м;  $Q^{III} = R_B = 16,5$  кН;

участок IV:  $3 \leq z \leq 6$  м;  $Q^{IV} = R_B - F = 16,5 - 30 = -13,5$  кН;

участок V:  $0 \leq z \leq 3$  м;  $Q^V = R_B = -3$  кН.

Эпюра  $Q$  для элемента  $BD$  показана на рис. 1.4, з.

Эпюра  $M$ :

участок III:  $0 \leq z \leq 3$  м;  $M^{III} = -R_B \cdot z$ ;

$z = 0$ ;  $M^{III} = 0$ ;

$z = 3$  м;  $M^{III} = -R_B \cdot 3 = 16,5 \cdot 3 = 49,5$  кН · м.

участок IV:  $3 \leq z \leq 6$  м;  $M^{IV} = R_B \cdot z - F(z - 3)$ ;

$z = 3$  м;  $M^{IV} = R_B \cdot 3 = 16,5 \cdot 3 = 49,5$  кН · м;

$z = 6$  м;  $M^{IV} = R_B \cdot 6 - F \cdot 3 = 16,5 \cdot 6 - 30 \cdot 3 = 9$  кН · м.

участок V:  $0 \leq z \leq 3$  м;  $M^V = R_D \cdot z$ ;

$z = 0$ ;  $M^V = 0$ ;

$z = 3$  м;  $M^V = -R_D \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$  кН · м.

Эпюра  $M$  для элемента  $BD$  показана на рис. 1.4, д.

Построим эпюры  $Q$  и  $M$  для балки  $DEG$ , которая состоит из двух участков (см. рис. 1.4,  $z$ ).

Эпюра  $Q$ :

$$\text{участок VI: } 3 \leq z \leq 6 \text{ м; } Q^{\text{VI}} = R_B = -3 \text{ кН;}$$

$$\text{участок VII: } 0 \leq z \leq 3 \text{ м; } Q^{\text{VII}} = q \cdot z;$$

$$z = 0; \quad Q^{\text{VII}} = 0;$$

$$z = 3 \text{ м; } Q^{\text{VII}} = q \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кН.}$$

Эпюра  $Q$  для элемента  $DEG$  представлена на рис. 1.4,  $z$ .

Эпюра  $M$ :

$$\text{участок VI: } 0 \leq z \leq 6 \text{ м; } M^{\text{VI}} = R_D \cdot z;$$

$$z = 0; \quad M^{\text{VI}} = 0;$$

$$z = 6 \text{ м; } M^{\text{VI}} = R_D \cdot 6 = -3 \cdot 6 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{участок VII: } 0 \leq z \leq 3 \text{ м; } M^{\text{VII}} = -\frac{q z^2}{2}.$$

Поскольку эпюра  $Q$  указывает на отсутствие экстремума функции  $M^{\text{VII}}$ , определим следующие значения  $M^{\text{VII}}$ :

$$z = 0; \quad M^{\text{VII}} = 0;$$

$$z = 1,5 \text{ м; } M^{\text{VII}} = -\frac{q \cdot 1,5^2}{2} = -\frac{4 \cdot 1,5^2}{2} = -4,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = 3 \text{ м; } M^{\text{VII}} = -\frac{q \cdot 3^2}{2} = -\frac{4 \cdot 3^2}{2} = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра  $M$  для балки  $DEG$  показана на рис. 1.4,  $d$ .

#### **1.4. Построение линии влияния изгибающего момента в сечении $m$**

Линия влияния – это график изменения усилия сечения от движущейся единичной силы.

При построении линии влияния изгибающего момента расчетное сечение может располагаться как в пределах основной балки, так и вспомогательных. Во всех случаях построение линии влияния  $M_m$  следует начинать с построения ее в пределах той простой балки, к которой относится сечение  $m$ , а затем линия влияния достраивается для всей составной балки исходя из следующих соображений.

Известно, что в пределах длины любой простой балки, к которой не относится сечение  $m$ , линия влияния  $M_m$  будет иметь линейный вид

(рис. 1.5 б, в), поэтому двух значений момента вполне достаточно для построения линии влияния  $M_m$  для такой балки. Одним из двух значений является значение изгибающего момента, определенного для начала (конца) рядом расположенного построенного участка линии влияния, другим – нулевое значение над опорой, расположенной в пределах рассматриваемой балки.

Согласно исходным данным, сечение  $m$  расположено над опорой  $C$  вспомогательной балки  $BD$  (рис. 1.5, а). Для построения линии влияния  $M_m$  воспользуемся рис. 1.5, б, в.

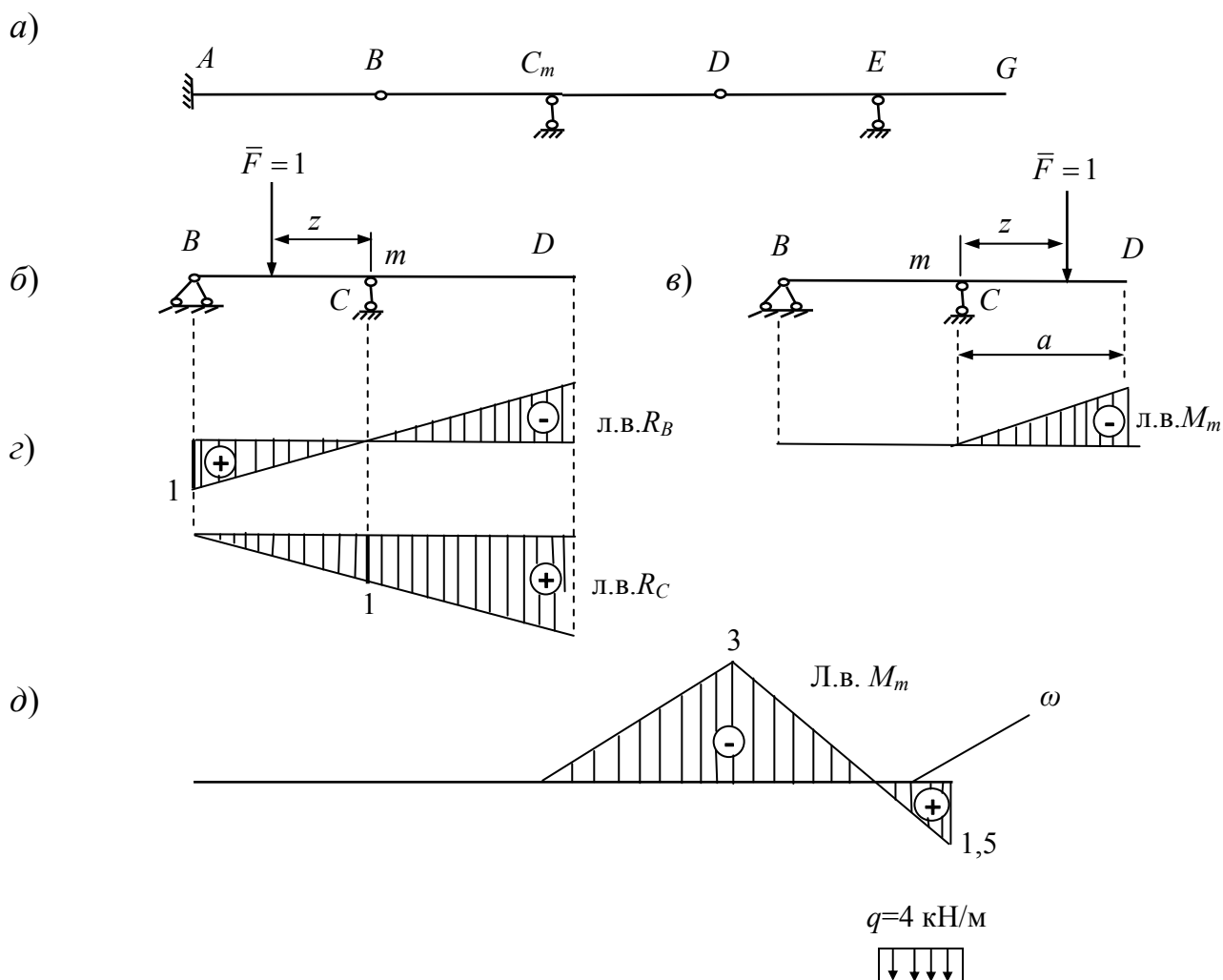


Рис. 1.5

Вначале линию влияния  $M_m$  построим на участке  $BD$  как линию влияния в консольной однопролетной балке.

Рассмотрим два положения единичного груза:

а) груз слева от сечения  $m$ ; равновесие правой части (рис. 1.5, б):  
 $M_m = 0$ ;

б) груз справа от сечения  $m$ ; равновесие правой части (рис. 1.5, в):

$$M_m = -\bar{F} \cdot z = -z; \quad z = 0; \quad M_m = 0; \quad z = 3 \text{ м}; \quad M_m = -3 \text{ м.}$$

Пользуясь полученными данными, построим линию влияния  $M_m$  на участке  $BD$  (рис. 1.5, г). Далее построим линию влияния на других участках. В пределах балки  $DG$  построение проводим таким образом: вершину крайней правой ординаты линии влияния  $M_m$  на участке  $BD$  соединим с нулевой точкой над опорой  $E$  балки  $DG$  и далее продолжим прямую линию до конца балки  $DG$  (см. рис. 1.5, г). В пределах элемента  $AB$  линия влияния  $M_m$  будет иметь нулевое значение, так как при загрузении основной балки  $AB$  вспомогательная балка  $BD$  в работу не включается (см. рис. 1.4, а). (Если сечение  $m$  на консоли, то линия влияния будет только на консоли.)

Окончательный вид линии влияния  $M_m$  приведен на рис. 1.5, г; дополнительная ордината на линии влияния  $M_m$  определена из подобия треугольников.

### ***1.5. Загружение линии влияния $M_m$ заданной нагрузкой и сопоставление полученного значения момента с величиной, полученной в п. 3***

Загружение линии влияния  $M_m$  заданной нагрузкой по формуле  $M_m = \sum q_i \omega_i + \sum F_j \eta_j$  производится только для ненулевого участка линии влияния. Схема загрузки показана на рис. 1.5, д. Определим величину момента  $M_m$ :  $M = q \cdot \omega = 4 \cdot 2,25 = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Здесь  $\omega$  – площадь линии влияния с учетом знаков  $M_m$  в пределах участка загрузки:

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 = 2,25 \text{ м}^2.$$

Таким образом, значения  $M_m$ , полученные здесь и в п. 3, совпали:  
 $M_m = 9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

## Задача № 2

### РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ ИЛИ РАМЫ

Для трехшарнирной арки или рамы (рис. 2.1) требуется:

1) определить аналитически опорные реакции, поперечную и продольную силы, изгибающий момент в заданном сечении от заданной нагрузки;

2) построить линии влияния изгибающего момента, поперечной и продольной сил в заданном сечении;

3) вычислить величины изгибающего момента, поперечной и продольной сил в рассматриваемом сечении по линиям влияния и сравнить их с полученными в п. 1 задания.

Исходные данные взять из табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер строки	Номер схемы	$l$ , м	$\frac{f}{l}$	$\frac{z}{l}$	$\alpha = \frac{h}{f}$ (только для рам)	$\beta$	$q$ , кН/м	$u_1$	$u_2$	$u_3$
1	5	16	0,3	0,25	0,80	1,2	5	0,25	0,50	1,00
2	4	18	0,3	0,75	0,75	1,4	6	0,50	0	0,75
3	3	20	0,4	0,75	0,60	1,6	7	0,75	0	1,00
4	2	22	0,5	0,25	0,50	1,8	8	0,50	0,25	1,00
5	1	24	0,3	0,75	0,75	2,0	9	0,25	0,25	0,75
6	5	26	0,5	0,75	0,80	2,2	10	0,75	0	0,75
7	4	28	0,4	0,25	0,60	2,4	11	0,50	0,25	0,50
8	3	30	0,3	0,25	0,50	2,5	12	0,25	0,50	0,75
9	2	32	0,5	0,75	0,80	2,0	13	0,75	0	0,25
0	1	36	0,3	0,25	0,75	2,0	14	0,50	0,75	1,00
	е	б	в	г	б	е	д	а	б	д

Трехшарнирные арки и рамы состоят из двух дисков, соединенных одним шарниром между собой и двумя шарнирами – с основанием. Если рассматривать основание как третий диск, то система может быть представлена как соединение трех дисков тремя шарнирами. Если шарниры не лежат на одной прямой, то такие системы геометрически неизменяемы.

Если диски представляют собой стержни с криволинейной осью, выпуклые по отношению к действующей нагрузке, то система носит название трехшарнирной арки. Если дисками являются стержни с «ломаной» осью, то систему называют трехшарнирной рамой. В дальнейшем будем называть трехшарнирные арки и рамы трехшарнирными системами.

Опорные сечения арок называются пятями ( $A, B$  на рис. 2.1).

Наиболее удаленное от линии пят сечение – замок ( $C$ , рис. 2.1), пролет арки –  $l$ , стрела подъема –  $f$ .

Направления усилий в шарнирных соединениях заранее не известны, поэтому их следует представлять в виде двух составляющих, например вертикальной и горизонтальной.

Горизонтальная составляющая реакции арки называется распором  $H$  (рис. 2.2, в).

Для каждого из двух стержней можно составить по три уравнения равновесия. Таким образом, количество уравнений равновесия равно числу неизвестных, поэтому система статически определима.

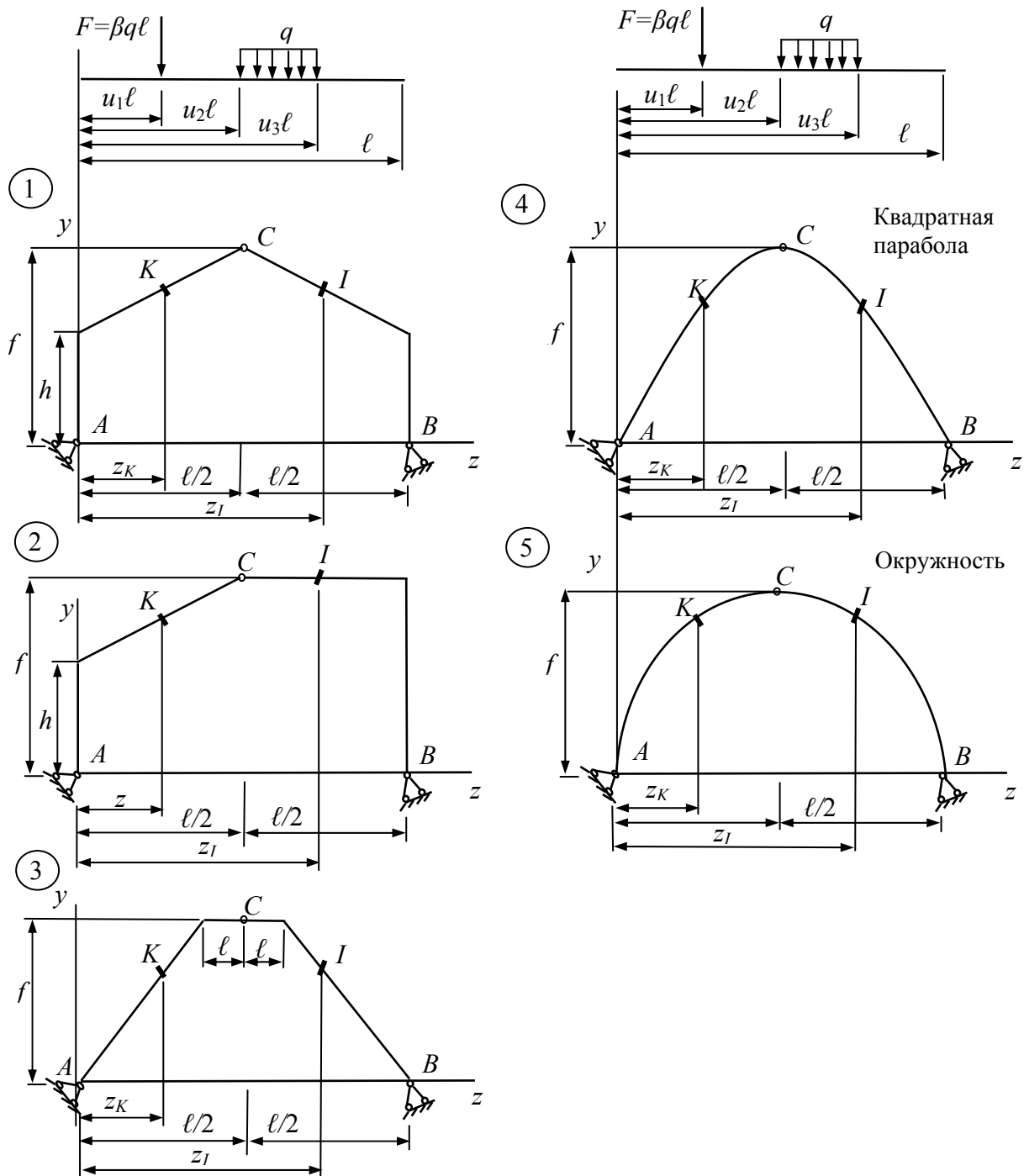


Рис. 2.1

## Пример решения задачи № 2

На рис. 2.2, а показана схема трехшарнирной системы под действием вертикальной нагрузки.

### 2.1. Определение опорных реакций

Очевидно, что для определения усилий в любом сечении достаточно найти реакции одного из опорных шарниров. Однако удобнее установить реакции обоих опорных шарниров. Для этого целесообразно составить следующие уравнения равновесия.

Для всей системы:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; & \quad V_B \cdot 20 - F \cdot 17 - q \cdot 7 \cdot 8,5 = 0; \\ \sum M_B = 0; & \quad V_A \cdot 20 - F \cdot 3 - q \cdot 7 \cdot 11,5 = 0.\end{aligned}$$

Для сил, приложенных соответственно только к левому или только к правому стержню (рис. 2.2, в):

$$\begin{aligned}\sum M_C^{\text{лев}} = 0; & \quad H_A \cdot 5 - V_A \cdot 10 + q \cdot 5 \cdot 2,5 = 0; \\ \sum M_C^{\text{прав}} = 0; & \quad H_B \cdot 5 - V_B \cdot 10 + F \cdot 7 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Первые два уравнения позволяют определить вертикальные, вторые два – горизонтальные составляющие опорных реакций, причем каждое уравнение содержит по одному неизвестному.

Таким образом,

$$V_B = \frac{1}{20} (F \cdot 17 + q \cdot 7 \cdot 8,5) = \frac{1}{20} (100 \cdot 17 + 10 \cdot 7 \cdot 8,5) = 114,75 \text{ кН};$$

$$V_A = \frac{1}{20} (F \cdot 3 + q \cdot 7 \cdot 11,5) = \frac{1}{20} (100 \cdot 3 + 10 \cdot 7 \cdot 11,5) = 55,25 \text{ кН};$$

$$H_A = \frac{1}{5} (V_A \cdot 10 - q \cdot 5 \cdot 2,5) = \frac{1}{5} (55,25 \cdot 10 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5) = 85,5 \text{ кН};$$

$$H_B = \frac{1}{5} (V_B \cdot 10 - F \cdot 7 - q \cdot 2 \cdot 1) = \frac{1}{5} (114,75 \cdot 10 - 100 \cdot 7 - 10 \cdot 2 \cdot 1) = 85,5 \text{ кН}.$$

Трехшарнирная система (рис. 2.2, а) загружена только вертикальной нагрузкой, поэтому:

- вертикальные составляющие реакций совпадают с реакциями однопролетной балки (рис. 2.2, б), перекрывающей тот же пролет и загруженной той же нагрузкой («эквивалентная балка»); для проверки правильности их определения следует использовать уравнение  $\sum Y = 0$ ;

- горизонтальные составляющие реакций равны между собой, что следует из уравнения  $\sum Z = 0$ , которое также можно использовать для проверки;



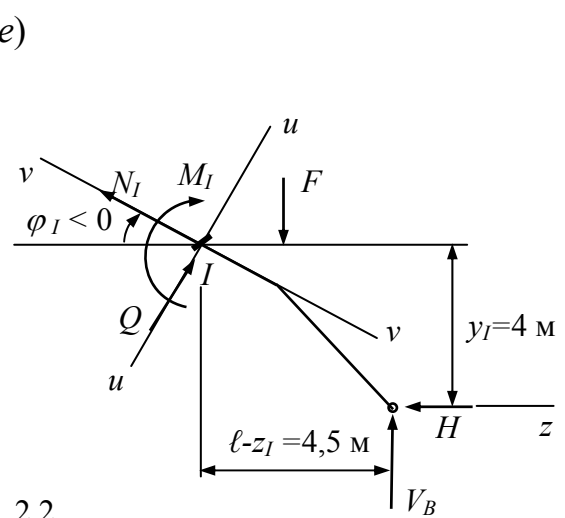
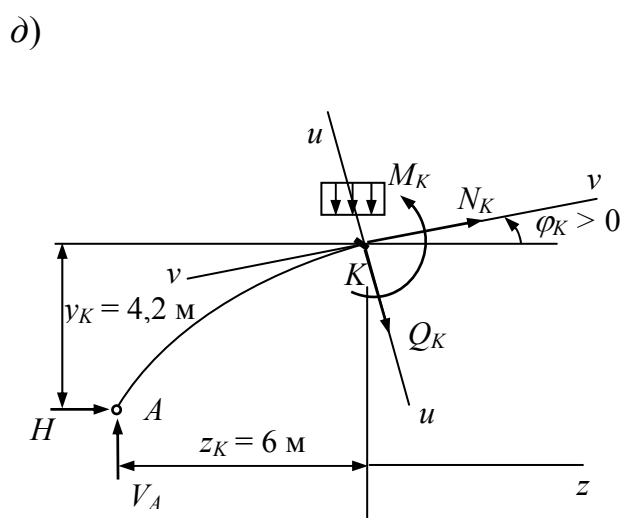
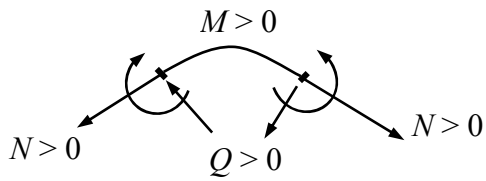
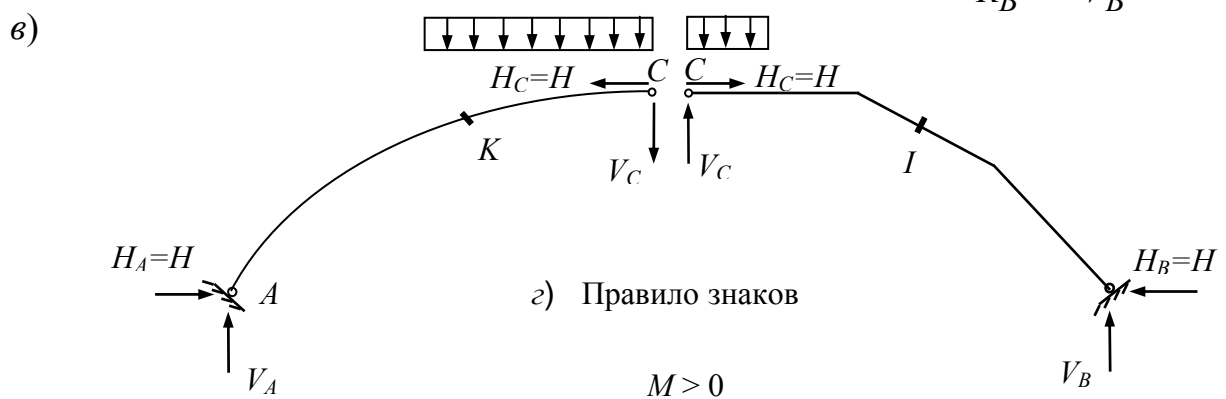
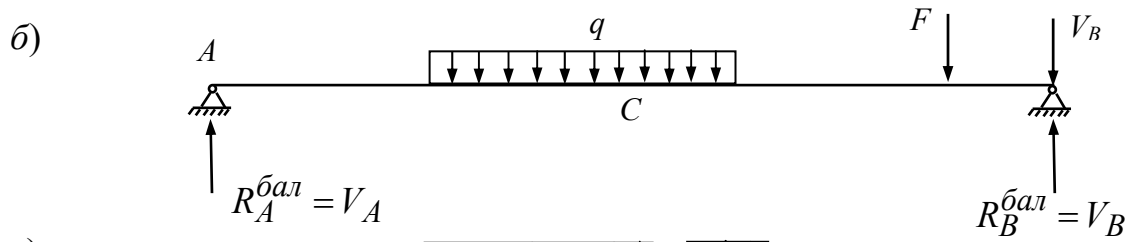
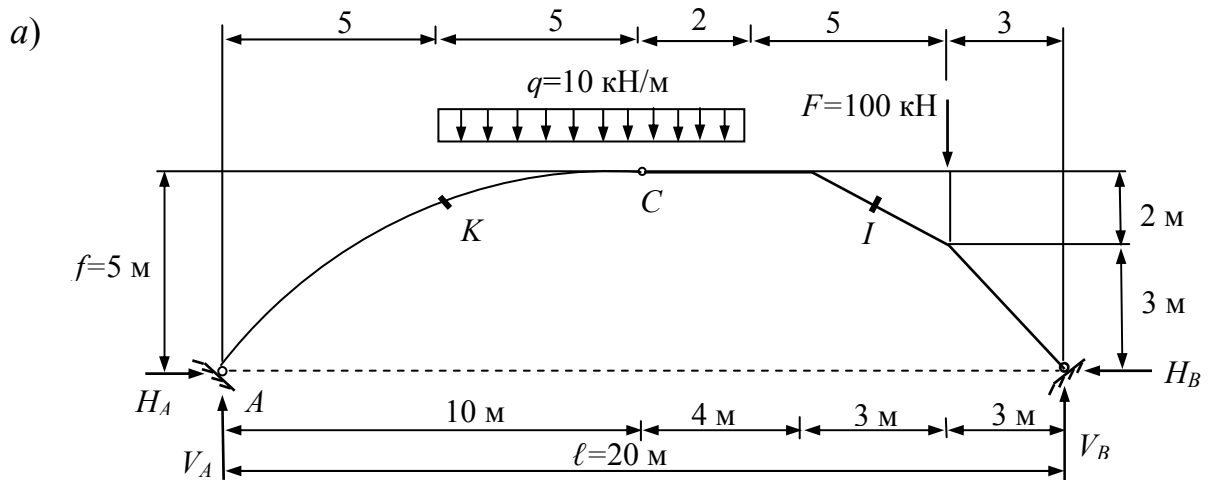


Рис. 2.2

• сравнение выражения для горизонтальной составляющей реакции (распора  $H$ ) с выражением для момента в сечении  $C$  балки позволяет записать:

$$H = \frac{M_C^{\text{бал}}}{f}. \quad (2.1)$$

Поскольку уравнения равновесия содержат расстояния от линии действия сил до шарниров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , реакции зависят не от очертания оси стержней, а только от положения шарниров.

## 2.2. Определение усилий в сечениях арки

Предварительно следует определить координаты сечения, а также косинус и синус угла между касательной к оси стержня в рассматриваемом сечении и осью  $z$  (рис. 2.2,  $\delta$ ,  $e$ ).

Для точки  $K$ , расположенной на параболической части трехшарнирной системы (внимание: ось арки в этом случае строится по точкам, соединенных по лекалу):

$$z_K = 6 \text{ м}; \quad y_A = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot z_K \cdot (l - z_K) = \frac{4 \cdot 5}{20^2} \cdot 6 \cdot (20 - 6) = 4,2 \text{ м};$$

$$\text{tg } \varphi_A = y'_K = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot (l - 2 \cdot z_K) = \frac{4 \cdot 5}{20^2} \cdot (20 - 2 \cdot 6) = 0,40;$$

$$\cos \varphi_A = \frac{1}{\sqrt{1 + (y'_K)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,40^2}} = 0,9285;$$

$$\sin \varphi_K = \frac{y'_K}{\sqrt{1 + (y'_K)^2}} = \frac{0,40}{\sqrt{1 + 0,40^2}} = 0,3714.$$

При очертании оси по окружности радиусом  $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$

$$y_K = \sqrt{R^2 - (0,5 - z)^2} - R + f; \quad \sin \varphi = \frac{\frac{l}{2} - z}{R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}.$$

Для точки  $I$ , расположенной на «рамной» части трехшарнирной системы (см. рис. 2.2,  $e$ ):

$$z_I = 15 \text{ м}; \quad y_I = 3,0 + 1,0 = 4,0 \text{ м};$$

$$\text{tg } \varphi_I = y'_I = \frac{0,5 - z}{\sqrt{R^2 - (0,5 - z)^2}} = -\frac{2}{3} = -0,66667 \text{ — для окружности};$$

$$\cos \varphi_I = \frac{1}{\sqrt{1+(y'_I)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,66667^2}} = 0,83205;$$

$$\sin \varphi_I = \frac{y'_I}{\sqrt{1+(y'_I)^2}} = \frac{0,66667}{\sqrt{1+0,66667^2}} = 0,55470.$$

Для усилий в распорных системах принимают правила знаков, представленные на рис. 2.2, з.

Усилия в сечениях, как и всегда, определяют из равновесия отсеченной части стержня.

Уравнения равновесия для определения усилий в сечении  $K$  (см. рис. 2.2, д) имеют вид:

$$\sum v = 0; \quad -N_K - (V_A - q \cdot 1) \cdot \sin \varphi_K - H \cdot \cos \varphi_K = 0;$$

$$\sum u = 0; \quad Q_K - (V_A - q \cdot 1) \cdot \cos \varphi_K + H \cdot \sin \varphi_K = 0;$$

$$\sum M_K = 0; \quad M_K - V_A \cdot 6 + q \cdot 1 \cdot 0,5 - H \cdot 4,2 = 0.$$

отсюда:

$$\begin{aligned} N_K &= -[(V_A - q \cdot 1) \cdot \sin \varphi_K + H \cdot \cos \varphi_K] = \\ &= -[(55,25 - 10 \cdot 1) \cdot 0,3714 + 85,5 \cdot 0,9285] = -96,19 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_K &= (V_A - q \cdot 1) \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K = \\ &= (55,25 - 10 \cdot 1) \cdot 0,9285 - 85,5 \cdot 0,3714 = 10,26; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_K &= (V_A \cdot 6 - q \cdot 1 \cdot 0,5) - H \cdot 4,2 = \\ &= (55,25 \cdot 6 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5) - 85,5 \cdot 4,2 = -32,6 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия для определения усилий в сечении  $I$  (см. рис. 2.2, е) имеют вид:

$$\sum v = 0; \quad -N_I - (V_B - F) \cdot \sin \varphi_I - H \cdot \cos \varphi_I = 0;$$

$$\sum u = 0; \quad Q_I - (V_B - F) \cdot \cos \varphi_I + H \cdot \sin \varphi_I = 0;$$

$$\sum M_I = 0; \quad M_I - V_B \cdot 4,5 + F \cdot 1,5 - H \cdot 4,0 = 0.$$

отсюда:

$$\begin{aligned} N_I &= -[(V_B - F) \cdot \sin \varphi_I + H \cdot \cos \varphi_I] = \\ &= -[(114,75 - 100) \cdot 0,5547 + 85,5 \cdot 0,83205] = -79,32 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_I &= (V_B - F) \cdot \cos \varphi_I - H \cdot \sin \varphi_I = \\ &= (114,75 - 100) \cdot 0,83205 - 85,5 \cdot 0,5547 = -35,15 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_I &= (V_B \cdot 4,5 - F \cdot 1,5) - H \cdot 4,0 = \\ &= (114,75 - 100 \cdot 1,5) - 85,5 \cdot 4,0 = 24,375 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Заметим, что в скобки заключены выражения для поперечной силы или момента в соответствующем сечении эквивалентной балки. Таким образом, эти формулы иллюстрируют выражение усилий в арках через усилия в эквивалентных балках:

$$\begin{aligned} N &= -\left[ Q^{\text{бал}} \cdot \sin \varphi + H \cdot \cos \varphi \right]; \\ Q &= Q^{\text{бал}} \cdot \cos \varphi - H \cdot \sin \varphi; \\ M &= M^{\text{бал}} - H \cdot y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

### 2.3. Построение линий влияния усилий

Пользуясь формулами (2.1) и (2.2), можно показать, что:

- линии влияния усилий в произвольном сечении трехшарнирной системы состоят из трех участков, ограниченных отрезками прямых;
- границы участков соответствуют положению шарниров и положению исследуемого сечения;
- крайние участки имеют нулевые ординаты над опорными шарнирами;
- прямая, содержащая средний отрезок линии влияния, продолженная за сечение до пятого шарнира, отсекает под опорой характерные ординаты ( $z$ ,  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ );
- линия влияния момента не имеет скачков, а линии влияния поперечной и продольной сил имеют скачки, равные характерным ординатам.

Отмеченные свойства позволяют сделать вывод о том, что если определен средний участок линии влияния, то весь график находится с помощью простых построений в пределах крайних участков. Кроме того, учитывая наличие характерных ординат, для построения отрезка линии влияния между сечением и замковым шарниром достаточно отыскать только одну точку прямой.

Ниже описан способ, позволяющий определить точку пересечения прямой, содержащей средний отрезок линии влияния, с осью графика, — так называемый способ нулевой точки.

Предполагают, что сила  $F = 1$  приложена к среднему участку арки. Тогда линия действия реакции пяты незагруженного звена по условию его равновесия проходит через центры шарниров  $B$  и  $C$  (рис. 2.3). Для определения усилий в исследуемом сечении рассматривают равновесие участка стержня между сечением и пятым шарниром, а так как нагрузка приложена к среднему участку, то из внешних сил в равновесии участвует лишь соответствующая реакция. Это позволяет указать направление реакции второй пяты, при котором то или иное усилие в сечении имеет нулевое значение:

- изгибающий момент равен нулю, если линия действия реакции проходит через центр тяжести сечения;
- поперечная сила равна нулю, если линия действия реакции параллельна касательной к оси стержня в сечении;
- продольная сила равна нулю, если линия действия реакции перпендикулярна касательной к оси стержня в сечении.

Пересечение линий действия опорных реакций определяет положение единичной силы, при котором одно из усилий в сечении равно нулю, т. е. нулевую точку линии влияния. Если найденная таким образом точка находится вне пределов среднего участка, что противоречит исходному предположению, ее называют фиктивной, так как нулевое значение соответствующего усилия не реализуется.

Рисунок 2.3 иллюстрирует применение способа нулевых точек для построения линий влияния усилий в сечении  $K$ , на левом звене трехшарнирной системы.

Характерная ордината линии влияния момента в сечении  $K$  откладывается под левой пятой и равна расстоянию от сечения до шарнира  $A$ , т. е.  $z_K = 6$  м. Через центры шарниров  $C$  и правого звена проводят линию действия реакции  $R_B$ . Через центр шарнира  $A$  и центр тяжести сечения  $K$  проводят линию действия реакции  $R_A$ . Вертикаль, проведенная через точку пересечения этих двух линий, указывает положение нулевой ординаты линии влияния момента в сечении  $K$ . С помощью нулевой точки и характерной ординаты под пятой левого звена строят отрезок линии влияния в пределах среднего участка от  $K$  до  $C$ , после чего достраивают отрезки крайних участков, соединив ординаты под  $K$  и  $C$  с нулями под опорами  $A$  и  $B$ .

Характерная ордината линии влияния поперечной силы в сечении откладывается над левой пятой и равна  $\cos \varphi_K = 0,9285$ . Через центры шарниров  $B$  и  $C$  правого звена проводят линию действия реакции  $R_B$ . Через центр шарнира  $A$ , параллельно касательной к оси стержня в сечении  $K$  проводят линию действия реакции  $R_A$ . Вертикаль, проведенная через точку пересечения этих двух линий, указывает положение нулевой ординаты линии влияния поперечной силы в сечении  $K$ .

С помощью нулевой точки и характерной ординаты под пятой левого звена строят отрезок линии влияния в пределах среднего участка, после чего достраивают отрезки крайних участков.

Характерная ордината линии влияния продольной силы в сечении  $K$  откладывается под левой пятой и равна  $\sin \varphi_K = 0,3714$ . Через центры шарниров правого звена проводят линию действия реакции  $R_B$ . Через центр шарнира  $A$  перпендикулярно касательной к оси стержня в сечении  $K$  проводят линию действия реакции  $R_A$ . Вертикаль, проведенная через точку

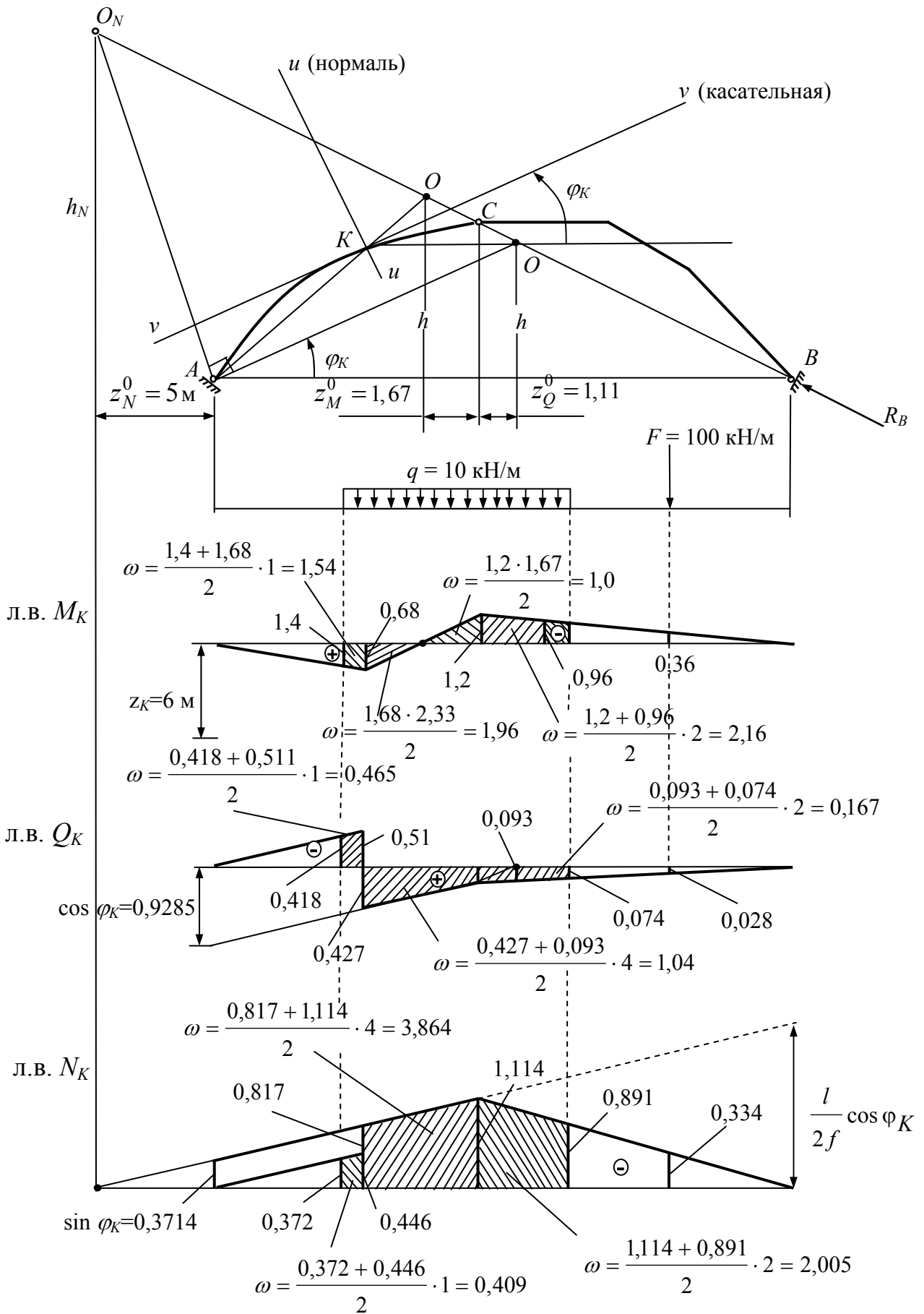


Рис. 2.3

пересечения этих двух линий, указывает положение фиктивной нулевой точки линии влияния поперечной силы в сечении  $K$ . С помощью нулевой точки и характерной ординаты под пятой левого звена строят отрезок линии влияния в пределах среднего участка, после чего достраивают отрезки крайних участков. Если фиктивная точка находится за пределами рисунка, используют еще и правый (левый) надпорный отрезок, равный  $\frac{l}{2f} \cos \varphi_K$ .

Аналогично построены и линии влияния усилий в сечении  $I$ , принадлежащем правому звену системы (рис. 2.4). При этом, если сечение принадлежит правому звену, характерная ордината линии влияния откладывается под правой пятой, кроме того:

- если для момента она равна расстоянию от сечения  $I$  до шарнира  $B$ , то она положительна;
- для поперечной силы – отрицательна;
- для продольной силы – положительна.

Линия действия реакции  $R_A$  проходит через шарниры левого звена ( $A$  и  $C$ ), линия действия реакции  $R_B$  проводится через шарнир  $B$  таким образом, чтобы соответствующее усилие в сечении  $I$  равнялось нулю, а средний участок находился в пределах правого звена системы.

#### 2.4. Определение усилий по линиям влияния

Линии влияния позволяют определить усилия  $S$  от заданной нагрузки на основании формулы

$$S = \sum q_i \cdot \omega_i + \sum F_j \cdot \eta_j,$$

где  $\omega_i$  – площади участков линий влияния, соответствующие распределенной нагрузке;

$\eta_j$  – ординаты линии влияния, соответствующие сосредоточенным силам.

Усилия в сечении  $K$  (см. рис. 2.3):

$$M_K = 10 \cdot (1,54 + 1,96 - 1,0 - 2,16) - 100 \cdot 0,36 = -32,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_K = 10 \cdot (-0,465 + 1,04 + 0,167) + 100 \cdot 0,028 = 10,26 \text{ кН};$$

$$N_K = -[10 \cdot (0,409 + 3,864 + 2,005) + 100 \cdot 0,334] = -96,2 \text{ кН}.$$

Усилия в сечении  $I$  (см. рис. 2.4):

$$M_I = 10 \cdot (-6,56 - 2,25) + 100 \cdot 1,13 = 24,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_I = 10 \cdot (-0,521 - 0,084) - 100 \cdot 0,294 = -35,4 \text{ кН};$$

$$N_I = -[10 \cdot (4,16 + 2,11) + 100 \cdot 0,166] = -79,3 \text{ кН}.$$

Сравнение величин усилий, полученных по линиям влияния, с результатами, полученными в п. 2.2, подтверждает правильность их определения.

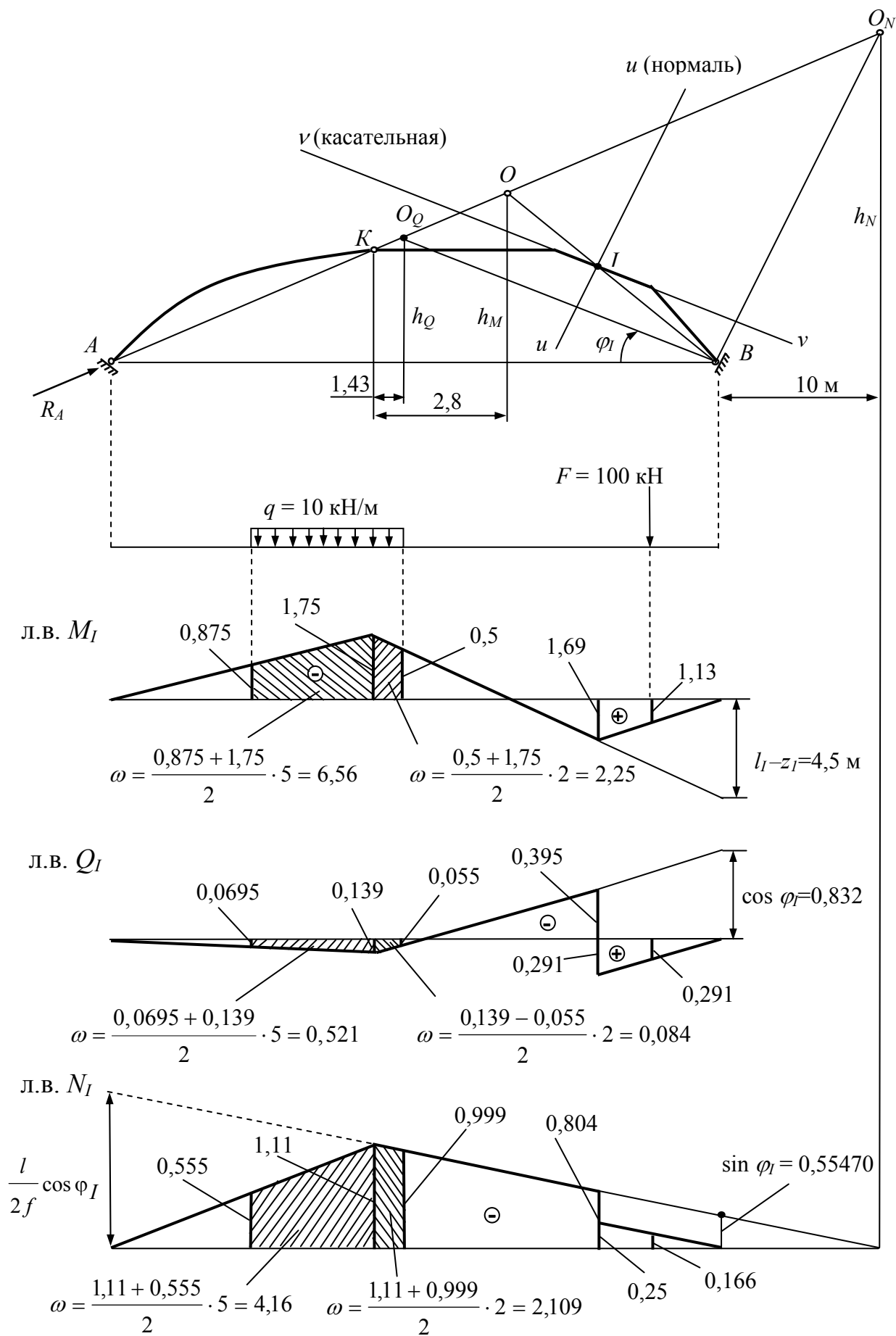


Рис. 2.4



### Задача № 3

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

### Общие понятия

Расчетная схема, называемая фермой, представляет собой систему прямолинейных стержней, соединенных идеальными шарнирами. Предполагается, что нагрузки приложены в узлах фермы. В таком случае стержни работают в условиях осевой деформации и в них возникают только продольные (нормальные) силы. Приведенные в задании схемы по типу опирания относятся к балочным фермам, т. е. реакции в них совпадают с реакциями балки того же пролета. Все усилия и реакции в приведенных схемах могут быть определены из уравнений равновесия, следовательно, они представляют собой статически определимые системы. Различают два метода определения усилий в стержнях ферм: метод вырезания узлов и метод сечений (разрезов). При выборе метода исходят из стремления составить уравнение равновесия, в которое входило бы только одно неизвестное – искомое усилие.

**Метод вырезания узлов.** Мысленно разрезают стержни, сходящиеся в узле, заменяя их соответствующими усилиями. Поскольку узел представляет собой точку, для него можно составить только два уравнения равновесия, выражающие равенство нулю сумм проекций сходящихся в узле внутренних усилий и внешних сил, приложенных в узле на две оси, например вертикальную и горизонтальную.

**Метод сечений (разрезов).** Мысленно разрезают ферму, заменяя рассекаемые стержни усилиями в них. Для любой из двух частей фермы (дисков) можно составить три уравнения равновесия, в которые входят усилия в рассеченных стержнях, а также нагрузка и реакции, приложенные к рассматриваемой части. Если в сечение попадают только три стержня, можно составить три уравнения, в каждое из которых войдет лишь одно неизвестное усилие, а именно:

- если два стержня параллельны оси  $Z$ , то для определения усилия в третьем следует приравнять к нулю сумму проекций всех сил на ось  $Y$ ;
- если оси двух стержней пересекаются в некоторой точке, называемой в таком случае моментной, то усилие в третьем определится из равенства нулю суммы моментов всех сил, приложенных к рассматриваемой части относительно моментной точки.

При составлении уравнений равновесия все стержни следует предполагать растянутыми, т. е. на схемах направлять усилия от узла. Тогда полученный при решении уравнения знак «минус» у значения усилия будет означать сжатие соответствующего стержня.

### Пример решения задачи № 3

В задании требуется выполнить расчет фермы на неподвижную нагрузку (собственный вес фермы) и расчет на подвижную нагрузку – от железнодорожного состава. Первый расчет может быть осуществлен при непосредственном загрузении узлов фермы заданной нагрузкой, второй расчет требует построения линий влияния усилий, т. е. графиков зависимости усилий в стержнях от положения единичной силы.

Для фермы (рис. 3.1) требуется:

1) определить аналитически усилия от собственного веса фермы  $q$ , равномерно распределенного по всей длине, в пяти элементах фермы, указанных в табл. 3.1;

2) построить линии влияния усилий в тех же элементах; для всех линий влияния необходимо определить числовые значения характерных ординат;

3) для одного стержня определить усилия от собственного веса с помощью линии влияния; сравнить полученные значения со значениями в аналитическом расчете по п. 1;

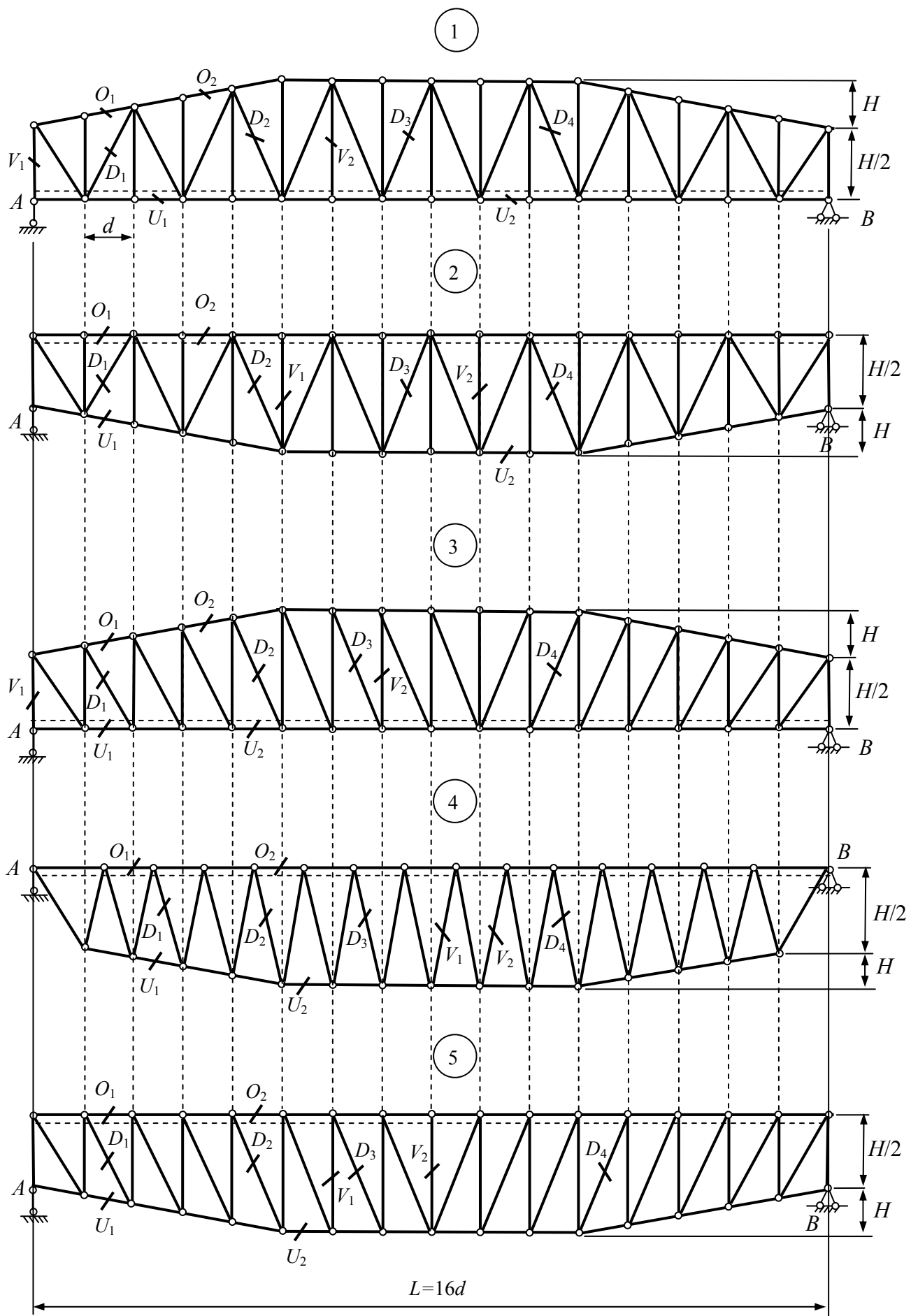
4) для этого же стержня определить усилия от подвижной нагрузки, загружая линию влияния эквивалентной нагрузкой  $K14$  (табл. 3.2, рис. 3.2);

5) по результатам пп. 3 и 4 вычислить максимальное и минимальное усилие в стержне.

Предполагается, что езда осуществляется по поясу фермы (указана штрихом).

#### ***3.1. Определение усилий от собственного веса фермы, равномерно распределенного по всей длине***

Из сказанного выше следует, что равномерно распределенная нагрузка должна быть приведена к узлам прямолинейного пояса фермы. Однако для краткости записи уравнений равновесия удобно заменять распределенную нагрузку статически эквивалентными ей узловыми силами только



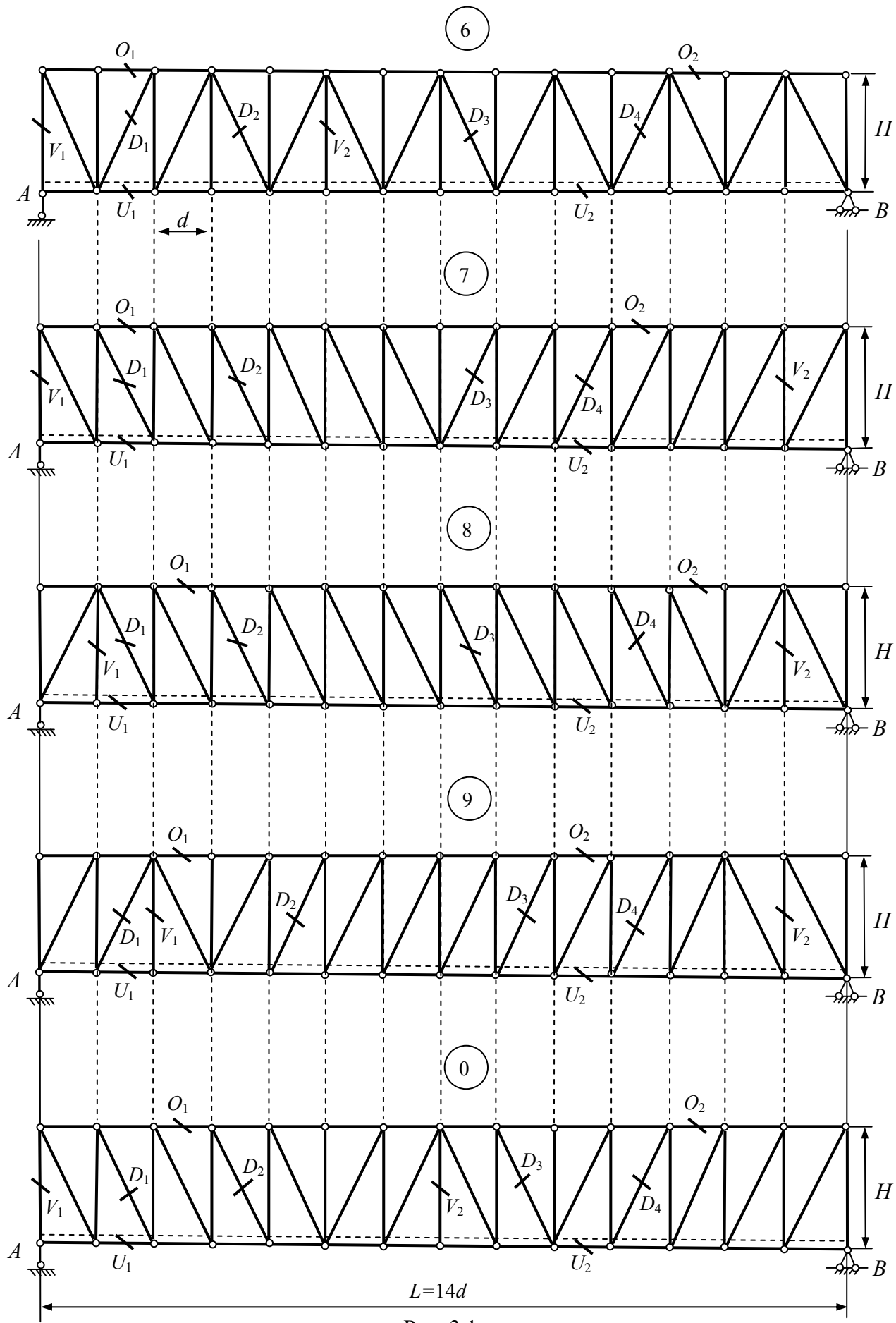


Рис. 3.1

Таблица 3.1

Номер строки	Схема	$q$ , кН/м	$d$ , м	$H/d$	Элементы				
					$U_1$	$O_1$	$D_1$	$D_2$	$V_1$
1	1	40	4,5	1,1	$U_1$	$O_1$	$D_1$	$D_2$	$V_1$
2	2	45	5,0	1,2	$U_2$	$O_2$	$D_3$	$D_4$	$V_2$
3	3	50	5,5	1,3	$U_1$	$O_1$	$D_1$	$D_2$	$V_1$
4	4	55	6,0	1,4	$U_1$	$O_1$	$D_1$	$D_2$	$V_1$
5	5	60	6,5	1,5	$U_2$	$O_2$	$D_3$	$D_4$	$V_2$
6	6	40	5,0	1,6	$U_2$	$O_2$	$D_3$	$D_4$	$V_2$
7	7	45	4,5	1,7	$U_1$	$O_1$	$D_1$	$D_2$	$V_1$
8	8	50	5,0	1,8	$U_2$	$O_2$	$D_3$	$D_4$	$V_2$
9	9	55	5,5	1,9	$U_1$	$O_1$	$D_1$	$D_2$	$V_1$
0	0	60	6,0	2,0	$U_2$	$O_2$	$D_3$	$D_4$	$V_2$
	е	д	г	в	б	а	е	д	г

Таблица 3.2

$\lambda$ , м	$q_3$ , кН/м		$\lambda$ , м	$q_3$ , кН/м	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5$		$\alpha = 0$	$\alpha = 0,5$
1	686,5	686,5	25	193,9	169,7
1,5	548,1	479,5	30	183,4	160,5
2	427,7	374,2	35	175,0	153,2
3	338,3	296,0	40	168,2	147,2
4	303,7	265,8	45	162,6	142,2
5	285,2	249,5	50	158,0	138,3
6	272,9	238,8	60	151,1	137,3
7	263,7	230,7	70	146,6	137,3
8	256,4	224,4	80	143,6	137,3
9	250,2	218,9	90	141,4	137,3
10	244,5	214,0	100	140,0	137,3
12	234,9	205,5	110	139,3	137,3
14	226,6	198,3	120	138,6	137,3
16	219,3	191,8	130	138,1	137,3
18	212,7	186,0	140	137,9	137,3
20	206,6	180,8	150 и более	137,3	137,3

Примечание:  $\lambda$  – длина однозначного участка линии влияния;  $\alpha = \frac{\min(a, b)}{\lambda}$ .

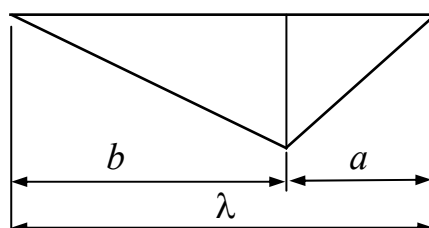


Рис. 3.2

в пределах рассекаемой панели. При длине рассеченной панели  $d$  и интенсивности нагрузки  $q$  на узлы фермы передаются сосредоточенные силы  $F = q \cdot \frac{d}{2}$ .

Опорные реакции от равномерно распределенной нагрузки при длине пролета  $L = 8d$  (рис. 3.3, а):  $R_A = R_B = q \cdot \frac{L}{2} = 4 \cdot q \cdot d$ .

### 3.2. Определение усилий в стержнях простой фермы (рис. 3.3, а)

#### 3.2.1. Усилия в стержнях верхнего и нижнего пояса

Усилие в стержне  $O_1$

Сечение 1–1 (рис. 3.3, б); уравнение равновесия:

$$\sum M_{m1} = 0; \quad N_{O_1} \cdot r_1 + R_A \cdot 2d - q \cdot d \cdot \left( d + \frac{d}{2} \right) - q \cdot \frac{d^2}{2} = 0,$$

отсюда 
$$N_{O_1} = -6 \cdot q \cdot \frac{d^2}{r_1} = -6 \cdot 40 \cdot \frac{3^2}{4} = -540,0 \text{ кН.}$$

Усилие в стержне  $U_1$

Сечение 1–1 (рис. 3.3, б); уравнение равновесия:

$$\sum M_{m2} = 0; \quad N_{U_1} \cdot r_2 - R_A \cdot d + q \cdot \frac{d^2}{2} = 0,$$

отсюда 
$$N_{U_1} = 3,5 \cdot q \cdot \frac{d^2}{r_2} = 3,5 \cdot 40 \cdot \frac{3^2}{4,437} = 284,0 \text{ кН.}$$

Усилие в стержне  $U_3$

Сечение 4–4 (рис. 3.3, в); уравнение равновесия:

$$\sum M_{m3} = 0; \quad N_3 \cdot r - R \cdot 4d - q \cdot 3d \cdot \left( d + \frac{3d}{2} \right) - q \cdot \frac{d}{2} = 0,$$

отсюда 
$$N_{U_3} = 8 \cdot q \cdot \frac{d^2}{r_3} = 8 \cdot 40 \cdot \frac{3^2}{3,5} = 822,9 \text{ кН.}$$

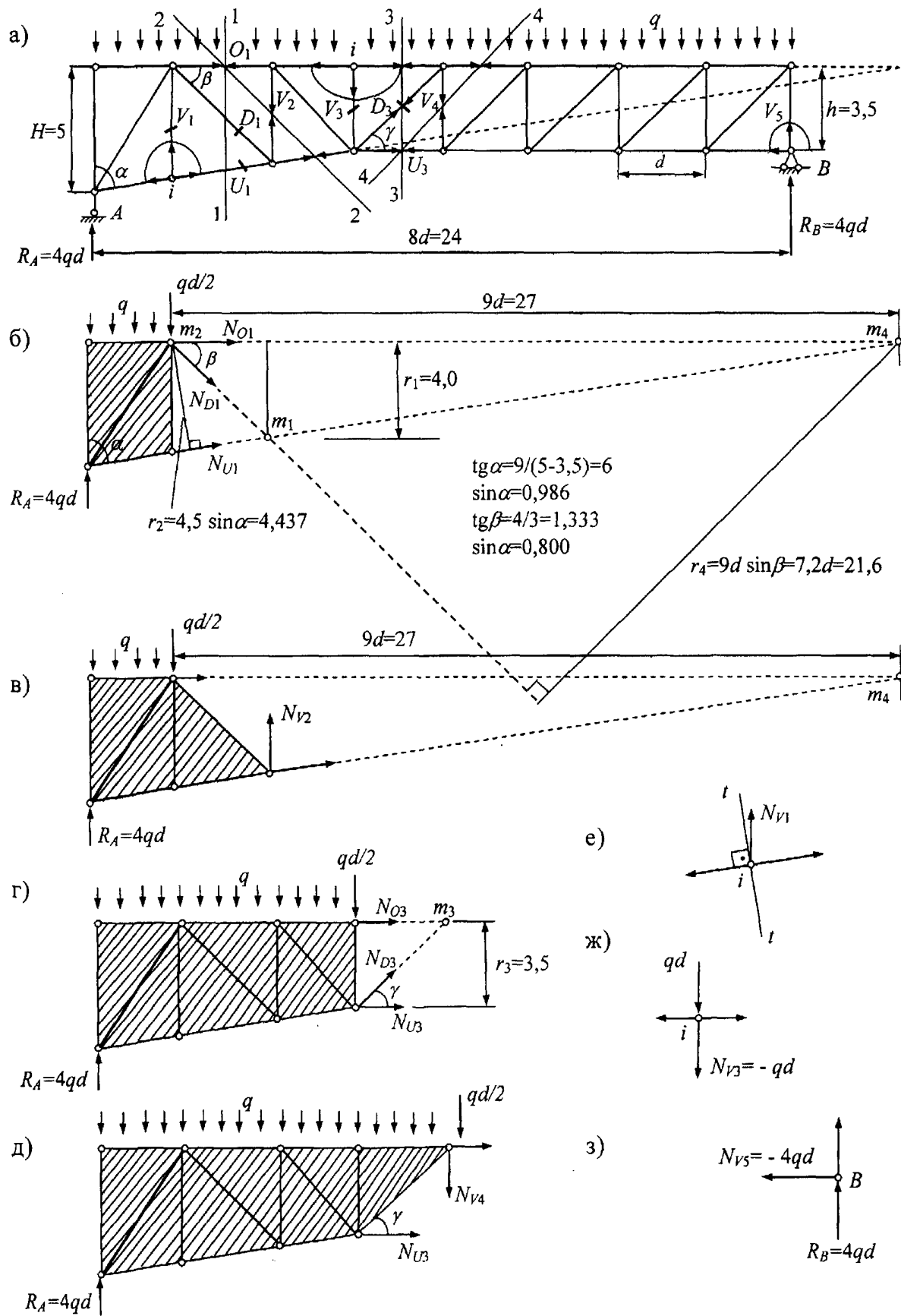


Рис. 3.3

### 3.2.2. Усилия в раскосах

#### Усилие в стержне $D_1$

Сечение 1–1 (рис. 3.3, б); уравнение равновесия:

$$\sum M_{m4} = 0; \quad N_{D_1} \cdot r_4 - R_A \cdot 10d - q \cdot d \cdot \left(9d + \frac{d}{2}\right) - 9q \cdot \frac{d^2}{2} = 0,$$

отсюда 
$$N_{D_1} = 26 \cdot q \cdot \frac{d^2}{r_4} = 26 \cdot 40 \cdot \frac{3^2}{21,6} = 433,3 \text{ кН.}$$

#### Усилие в стержне $D_3$

Сечение 3–3 (рис. 3.3, з); уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad N_{D_3} \cdot \sin \gamma + R_A - q \cdot 3d - q \cdot \frac{d}{2} = 0,$$

отсюда 
$$N_{D_3} = -q \cdot \frac{d}{2 \sin \gamma} = -40 \cdot \frac{3}{2 \cdot 0,759} = -790,5 \text{ кН.}$$

### 3.2.3. Усилия в стойках

#### Усилие в стержне $V_1$

Равновесие узла  $i$  (рис. 3.3, е);

$$\sum \text{Pr}t - t = 0,$$

отсюда 
$$N_{V_1} = 0.$$

#### Усилие в стержне $V_2$

Сечение 2–2 (рис. 3.3, в); уравнение равновесия:

$$\sum M_{m4} = 0; \quad N_{V_2} \cdot 8d + R_A \cdot 10d - q \cdot d \cdot \left(9d + \frac{d}{2}\right) - 9q \cdot \frac{d^2}{2} = 0,$$

отсюда 
$$N_{V_2} = -26 \cdot q \cdot \frac{d}{8} = -26 \cdot 40 \cdot \frac{3}{8} = -390,0 \text{ кН.}$$

#### Усилие в стержне $V_3$

Равновесие узла  $i$  (рис. 3.3, ж):

$$\sum Y = 0; \quad N_{V_3} + q \cdot d = 0,$$

отсюда 
$$N_{V_3} = -q \cdot d = 120 \text{ кН.}$$



Усилие в стержне  $V_4$

Сечение 4–4 (рис. 3.3,  $\delta$ ); уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad N_{V_4} - R_A + 4 \cdot q \cdot d + q \cdot \frac{d}{2} = 0,$$

отсюда 
$$N_{V_4} = -q \cdot \frac{d}{2} = -60 \text{ кН.}$$

Усилие в стержне  $V_5$

Равновесие узла  $B$  (рис. 3.3,  $\varepsilon$ ); уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad N_{V_5} + R_B = 0,$$

отсюда 
$$N_{V_5} = -4 \cdot q \cdot d = -4 \cdot 40 \cdot 3 = -480 \text{ кН.}$$

### **3.3. Построение линий влияния усилий**

Линии влияния усилий – графики зависимости усилий от положения подвижной единичной силы – строим статическим способом, используя для получения аналитического выражения усилия те же методы, что и при определении значений усилий от постоянной нагрузки  $q$ .

Если для определения усилия используется метод вырезания узлов, то рассматриваем две ситуации при движении силы по «ездовому», в нашем примере – по верхнему поясу:

- сила находится в узле;
- сила находится вне узла.

Если усилие определяется при помощи метода сечений (разрезов), то следует рассмотреть два положения подвижной силы:

- сила находится правее проведенного сечения, т. е. в пределах правого диска; при этом строится правая ветвь линии влияния, но удобнее рассматривать равновесие левого диска, связывая усилие в стержне с реакцией левой опоры;

- сила находится левее проведенного сечения, т. е. в пределах левого диска; при этом строится левая ветвь линии влияния, но удобнее рассматривать равновесие правого диска, связывая усилие в стержне с реакцией правой опоры.

На основании теоремы об узловой передаче нагрузки вершины ординат ветвей под узлами рассеченной панели ездового пояса соединяются перпендикулярной прямой.

Положительные ординаты откладываем вниз, отрицательные – вверх.

Линии влияния опорных реакций совпадают с такими же графиками для балки на двух опорах, которые показаны на рис. 3.4–3.5 сразу под схемами ферм.

### 3.4. Линии влияния усилий в стержнях фермы

#### 3.4.1. Линии влияния усилий в стержнях верхнего и нижнего пояса

##### Линия влияния усилия в стержне $O_1$

Сечение 1–1 (рис. 3.5, а); уравнение равновесия:  $\sum M_{m1} = 0$  (моментные точки показаны на рис. 3.3).

Левая ветвь (равновесие правой части):  $N_{O_1} \cdot r_1 + R_B \cdot 6d = 0$ ,

отсюда 
$$N_{O_1} = -R_B \cdot \frac{6d}{r_1} = -R_B \cdot \frac{6 \cdot 3}{4} = -4,5R_B.$$

Правая ветвь (равновесие левой части):  $N_{O_1} \cdot r_1 + R_A \cdot 2d = 0$ ,

отсюда 
$$N_{O_1} = -R_A \cdot \frac{2d}{r_1} = -R_A \cdot \frac{2 \cdot 3}{4} = -1,5R_A.$$

Построение графика (рис. 3.4, з):

- строится прямая (тонкая), имеющая ординату  $-4,5$  над опорой  $B$  и ординату  $0$  над опорой  $A$ ; левая ветвь совпадает с этой прямой в пределах первой панели слева;
- строится прямая (тонкая), имеющая ординату  $-1,5$  над опорой  $A$  и ординату  $0$  над опорой  $B$ ; правая ветвь совпадает с этой прямой в пределах шести панелей, расположенных правее рассеченной (второй) панели;
- ветви пересекаются под моментной точкой  $m_1$ .

*Замечания:*

1) левая и правая ветви линий влияния должны пересекаться под моментной точкой, этот факт следует использовать для проверки правильности построения графика;

2) в пределах рассеченной панели проводится передаточная прямая (двойная линия).

Строится линия влияния опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  (рис. 3.4, б, в).

##### Линия влияния усилия в стержне $U_1$

Сечение 1–1 (рис. 3.4, а) уравнение равновесия:  $\sum M_{m1} = 0$ .

Левая ветвь (равновесие правой части):  $N_{U_1} \cdot r_2 - R_B \cdot 7d = 0$ ,

отсюда 
$$N_{U_1} = R_B \cdot \frac{7d}{r_2} = R_B \cdot \frac{7 \cdot 3}{4,437} = 4,733R_B.$$

Правая ветвь (равновесие левой части):  $N_{U_1} \cdot r_2 - R_A \cdot d = 0$ ,

отсюда 
$$N_{U_1} = R_A \cdot \frac{d}{r_2} = R_A \cdot \frac{3}{4,437} = 0,676R_A.$$

Построение графика (рис. 3.4, *д*) производим аналогично описанному для линии влияния  $O_1$ .

Линия влияния усилия в стержне  $U_3$

Сечение 3–3 (рис. 3.4, *а*); уравнение равновесия:  $\sum M_{m3} = 0$ .

Левая ветвь (равновесие правой части):  $N_{U_3} \cdot r_3 - R_B \cdot 4d = 0$ ,

отсюда 
$$N_{U_3} = R_B \cdot \frac{4d}{r_3} = R_B \cdot \frac{4 \cdot 3}{3,5} = 3,429R_B.$$

Правая ветвь (равновесие левой части):  $N_{U_3} \cdot r_3 - R_A \cdot 4d = 0$ .

отсюда 
$$N_{U_3} = R_A \cdot \frac{4d}{r_3} = R_A \cdot \frac{4 \cdot 3}{3,5} = 3,429R_A.$$

Построение графика (рис. 3.4, *е*) производим аналогично описанному для линии влияния  $O_1$ .

### 3.4.2. Линии влияния усилий в раскосах

Линия влияния усилия в стержне  $D_1$

Сечение 1–1, уравнение равновесия:  $\sum M_{m4} = 0$ .

Левая ветвь (равновесие правой части):  $N_{D_1} \cdot r_4 + R_B \cdot 2d = 0$ ,

отсюда 
$$N_{D_1} = -R_B \cdot \frac{2d}{r_4} = -R_B \cdot \frac{2 \cdot 3}{21,6} = -0,277R_B.$$

Правая ветвь (равновесие левой части):  $N_{D_1} \cdot r_4 - R_A \cdot 10d = 0$ ,

отсюда 
$$N_{D_1} = R_A \cdot \frac{10d}{r_4} = R_A \cdot \frac{10 \cdot 3}{21,6} = 1,389R_A.$$

Построение графика (рис. 3.4, *ж*) производим аналогично описанному для линии влияния  $O_1$ , обратив внимание на то, что ветви имеют ординаты разных знаков.

Линия влияния усилия в стержне  $D_3$

Сечение 3–3 (рис. 3.4, *а*); уравнение равновесия:  $\sum Y = 0$ .

Левая ветвь (равновесие правой части):  $N_{D_3} \cdot \sin \gamma - R_B = 0$ ,

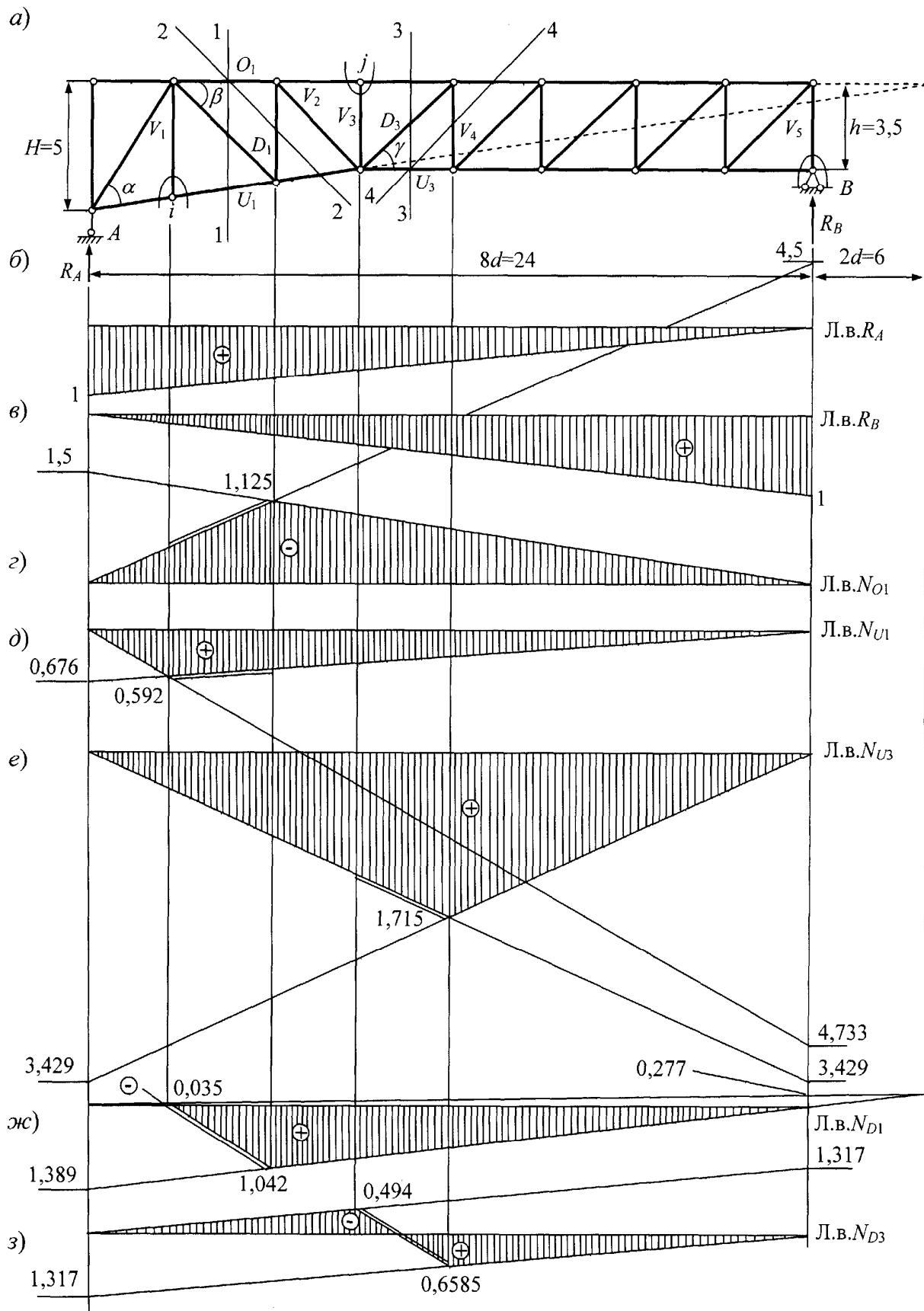


Рис. 3.4

отсюда 
$$N_{D_3} = \frac{R_B}{\sin \gamma} = \frac{R_B}{0,759} = 1,317R_B \text{ кН.}$$

Правая ветвь (равновесие левой части): 
$$N_{D_3} \cdot \sin \gamma + R_A = 0,$$

отсюда 
$$N_{D_3} = -\frac{R_A}{\sin \gamma} = -\frac{R_A}{0,759} = -1,317R_A \text{ кН.}$$

Построение графика (рис. 3.4, з) производим аналогично описанному для линии влияния  $O_1$ , обратив внимание на то, что ветви имеют ординаты разных знаков.

### 3.4.3. Линии влияния усилий в стойках

#### Линия влияния усилия в стержне $V_1$

Равновесие узла  $i$  (рис. 3.5, а); уравнение равновесия:  $\sum \text{Pr}t - t = 0$ .

Узел принадлежит нижнему поясу, при езде по верхнему поясу  $N_{V_1} = 0$  (рис. 3.5, з).

#### Линия влияния усилия в стержне $V_2$

Сечение 2–2 (рис. 3.5, а); уравнение равновесия:  $\sum M_{m4} = 0$ .

Левая ветвь (равновесие правой части): 
$$N_{V_2} \cdot 8d - R_B \cdot 2d = 0,$$

отсюда 
$$N_{V_2} = R_B \cdot \frac{2}{8} = 0,25R_B.$$

Правая ветвь (равновесие левой части): 
$$N_{V_2} \cdot 8d + R_A \cdot 10d = 0,$$

отсюда 
$$N_{V_2} = -R_A \cdot \frac{10}{8} = -1,25R_A.$$

Построение графика (рис. 3.5, д) производим аналогично описанному для линии влияния  $O_1$ , обратив внимание на то, что ветви имеют ординаты разных знаков. Сечение 2–2 рассекает две панели. Поскольку перемещение единичной силы осуществляется по верхнему поясу, левая ветвь графика имеет протяженность в пределах первой панели, а правая ветвь – начиная с третьей и кончая восьмой панелью.

Передаточная прямая находится в пределах рассеченной панели «ездового» пояса фермы.

#### Линия влияния усилия в стержне $V_3$

Равновесие узла  $j$  (рис. 3.5, а); уравнение равновесия:  $\sum Y = 0$ .

Узел принадлежит верхнему поясу; при езде по верхнему поясу возможны две ситуации: сила  $F = 1$  в узле  $j$ , тогда  $N_{V_3} + 1 = 0$ ; отсюда  $N_{V_3} = -1$ ; сила  $F = 1$  вне узла  $j$ , тогда  $N_{V_3} = 0$ .

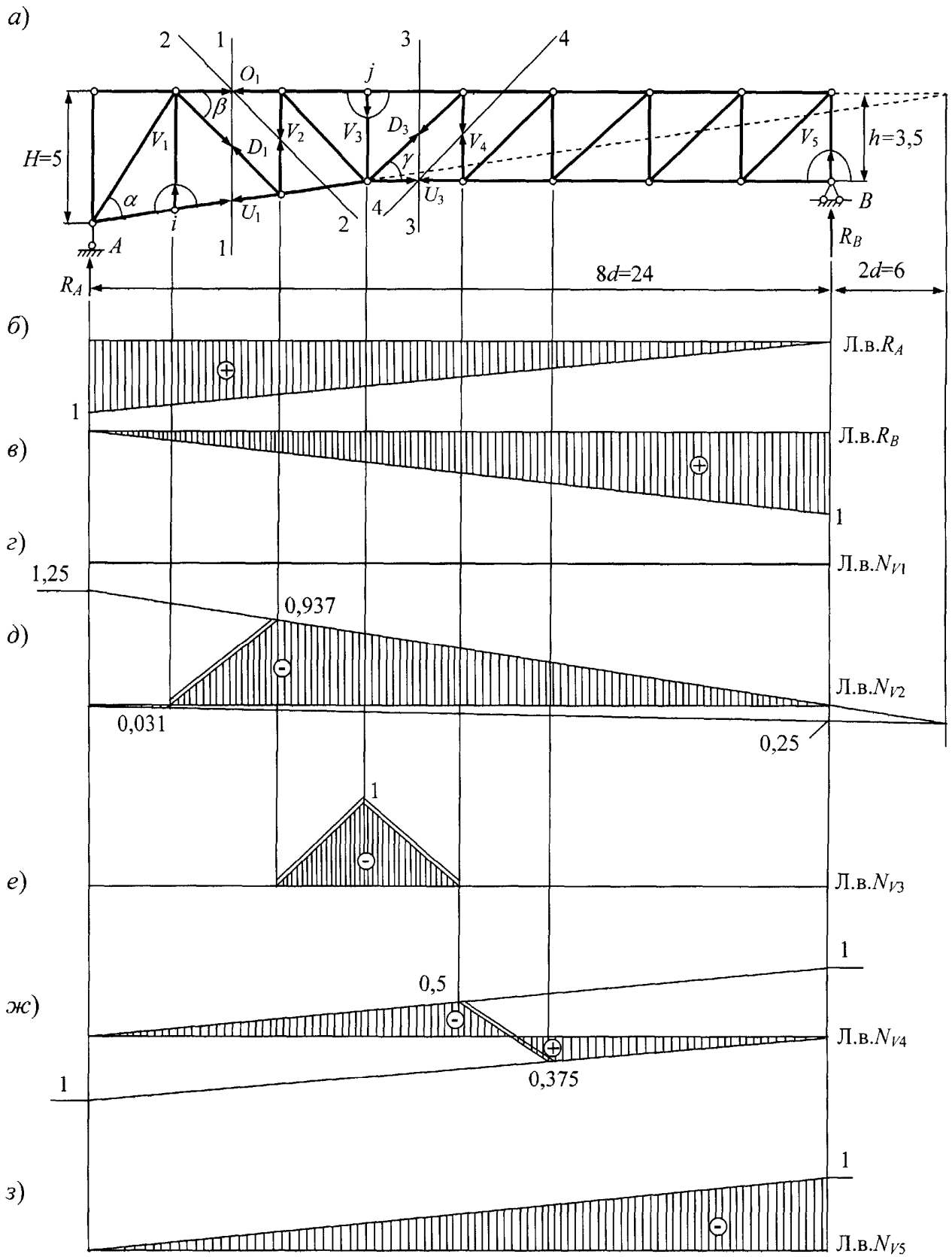


Рис. 3.5

Построение графика (рис. 3.5, е): под узлом  $j$  откладываем ординату  $-1$ , в пределах двух рассеченных панелей (третьей и четвертой) проводим передаточные прямые, соединяющие вершину ординаты в узле с нулем.

Линия влияния усилия в стержне  $V_4$

Сечение 4–4 (рис. 3.5, а); уравнение равновесия:  $\sum Y = 0$ .

Левая ветвь (равновесие правой части):  $N_{V_4} + R_B = 0$ ,

отсюда  $N_{V_4} = -R_B$ .

Правая ветвь (равновесие левой части):  $N_{V_4} - R_A = 0$ ,

отсюда  $N_{V_4} = R_A$ .

Построение графика (рис. 3.5, ж) производим аналогично описанному для линии влияния  $O_1$ , обратив внимание на то, что ветви имеют ординаты разных знаков.

Линия влияния усилия в стержне  $V_5$

Равновесие узла  $B$ ; уравнение равновесия:  $\sum Y = 0$ . Узел принадлежит нижнему поясу; при езде по верхнему поясу:  $N_{V_5} + R_B = 0$ , отсюда  $N_{V_5} = -R_B$  (рис. 3.5, з).

**3.5. Определение усилия от постоянной нагрузки (собственного веса) по линии влияния**

Значение усилия от участка равномерно распределенной нагрузки равно произведению интенсивности нагрузки на площадь линии влияния, расположенную под участком действия нагрузки. В задании собственный вес представлен нагрузкой  $q$ , равномерно распределенной по всей длине пролета, и, следовательно,  $N = q \cdot \omega$ , где  $\omega$  – площадь линии влияния под нагрузкой  $q$ . Если линия влияния имеет участки с разными знаками, то  $\omega$  равна алгебраической сумме площадей отдельных участков. Знаки площадей определяются знаками ординат участка линии влияния.

Усилие в стержне  $U_1$

Линия влияния усилия представлена на рис. 3.4, д;

$$\omega = 0,592 \cdot \frac{24}{2} = 7,104 \text{ м} \text{ и } N_{U_1}^{\text{пост}} = q \cdot \omega = 40 \cdot 7,104 = 284,2 \text{ кН.}$$

Усилие в стержне  $V_4$

Линия влияния усилия представлена на рис. 3.5, ж;

$$\omega^- = -0,5 \cdot \frac{(3 \cdot 4 + 1,71)}{2} = -3,428 \text{ м}; \quad \omega^+ = 0,375 \cdot \frac{(3 \cdot 4 - 1,71)}{2} = 1,929 \text{ м};$$

$$N_{V_4} = q \cdot (\omega^- + \omega^+) = 40 \cdot (-3,428 + 1,929) = -59,96 \text{ кН}.$$

Отличие значений усилий от полученных ранее при непосредственном нагружении ферм распределенной нагрузкой связано с погрешностью округления и составляет менее 1 %.

### 3.6. Загружение линий влияния временной нагрузкой

При определении усилий от железнодорожной поездной системы по линиям влияния треугольного очертания временная нагрузка в виде системы сосредоточенных сил заменяется эквивалентной, равномерно распределенной нагрузкой. Интенсивность эквивалентной нагрузки, приведенная в табл. 3.2, вычислена для некоторой условной нагрузки  $K1$  при невыгоднейшей установке системы сил на грузовой пояс фермы. При расчете на реальные нагрузки табличные значения должны умножаться на коэффициент нагрузки  $K$ , равный классу нагрузки. Значения интенсивности эквивалентной нагрузки  $q_{\text{эКВ}}$  зависят от длины  $\lambda$ , треугольного участка линии влияния и от положения вершины этого участка линии влияния, которая характеризуется параметром  $\alpha = \frac{a}{\lambda}$ , где  $a$  – меньшее расстояние от вершины участка линии влияния до его конца. В табл. 3.2 приведены значения эквивалентной нагрузки  $q_{\text{эКВ}}$  для класса нагрузки  $K14$ . В случае, если длина нагружения и (или) значение параметра  $\alpha$  отличаются от табличных,  $q_{\text{эКВ}}$  вычисляют с помощью линейной интерполяции ближайших табличных значений.

#### Усилие в стержне $U_1$

Линия влияния усилия (рис. 3.4, д) имеет один положительный участок:

$$\lambda = 24 \text{ м}, \quad \alpha = \frac{3}{24} = 0,125; \quad \omega = 0,592 \cdot \frac{24}{2} = 7,104 \text{ м}.$$

Для определения  $q_{\text{эКВ}}$  требуется интерполяция:

- интерполяция по вертикали:

$$q_{\text{эКВ}} \Big|_{\alpha=0,0} = 206,6 - (206,6 - 193,9) \cdot (24 - 20) / (25 - 20) = 196,4 \text{ кН/м};$$

$$q_{\text{эКВ}} \Big|_{\alpha=0,5} = 180,8 - (180,8 - 169,7) \cdot (24 - 20) / (25 - 20) = 171,9 \text{ кН/м};$$

- интерполяция по горизонтали:

$$q_{\text{эКВ}} \Big|_{\alpha=0,125} = 196,4 - (196,4 - 171,9) \cdot 0,125 / 0,5 = 190,3 \text{ кН/м}.$$



Значение эквивалентной нагрузки в расчете на одну главную плоскую ферму:

$$q_{\text{экв}} = 190,3/2 = 95,15 \text{ кН/м.}$$

Значение усилия от временной нагрузки:

$$N_{U_1}^{\text{вп}} = q_{\text{экв}} \cdot \omega = 95,15 \cdot 7,104 = 675,9 \text{ кН.}$$

Таким образом, минимальное и максимальное усилия в стержне  $U_1$ :

$$N_{U_1}^{\text{мин}} = N_{U_1}^{\text{пост}} = 284,2 \text{ кН;}$$

$$N_{U_1}^{\text{макс}} = N_{U_1}^{\text{пост}} + N_{U_1}^{\text{вп}} = 284,2 + 675,9 = 960,1 \text{ кН.}$$

#### Усилие в стержне $V_4$

Линия влияния усилия (рис. 3.5, ж) имеет один положительный и один отрицательный участки.

Для отрицательного участка:

$$\lambda^- = 3 \cdot 4 + 1,71 = 13,71 \text{ м, } \alpha^- = \frac{1,71}{13,71} = 0,125; \quad \omega^- = -0,5 \cdot \frac{13,71}{2} = -3,428 \text{ м.}$$

Для определения  $q_{\text{экв}}$  требуется интерполяция:

- интерполяция по вертикали:

$$q_{\text{экв}}|_{\alpha=0,0} = 234,9 - (234,9 - 226,6) \cdot (13,71 - 12)/(14 - 12) = 227,8 \text{ кН/м;}$$

$$q_{\text{экв}}|_{\alpha=0,5} = 205,5 - (205,5 - 198,3) \cdot (13,71 - 12)/(14 - 12) = 199,3 \text{ кН/м;}$$

- интерполяция по горизонтали:

$$q_{\text{экв}}|_{\alpha=0,125} = 227,8 - (227,8 - 199,3) \cdot 0,125/0,5 = 220,7 \text{ кН/м.}$$

Значение эквивалентной нагрузки в расчете на одну главную плоскую ферму:

$$q_{\text{экв}} = 220,7/2 = 110,3 \text{ кН/м.}$$

Значение усилия от временной нагрузки:

$$N_{V_4}^{\text{вп}} = q_{\text{экв}} \cdot \omega^- = 110,3 \cdot (-3,428) = -378,2 \text{ кН.}$$

Для положительного участка:

$$\lambda^+ = 3 \cdot 4 - 1,71 = 11,29 \text{ м, } \alpha^+ = \frac{1,71}{11,29} = 0,151;$$

$$\omega^+ = 0,375 \cdot \frac{(3 \cdot 4 - 1,71)}{2} = 1,929 \text{ м.}$$

Для определения  $q_{\text{экв}}$  требуется интерполяция:

- интерполяция по вертикали:

$$q_{\text{экв}}|_{\alpha=0,0} = 244,5 - (244,5 - 234,9) \cdot (11,29 - 10)/(12 - 10) = 238,3 \text{ кН/м;}$$

$$q_{\text{экв}}|_{\alpha=0,5} = 214,0 - (214,0 - 205,5) \cdot (11,29 - 10)/(12 - 10) = 208,5 \text{ кН/м;}$$

- интерполяция по горизонтали:

$$q_{\text{экв}}|_{\alpha=0,151} = 238,3 - (238,3 - 208,5) \cdot 0,151/0,5 = 229,3 \text{ кН/м.}$$

Значение эквивалентной нагрузки в расчете на одну главную плоскую ферму:

$$q_{\text{экв}} = 229,3/2 = 114,7 \text{ кН/м.}$$

Значение усилия от временной нагрузки:

$$N_{V_4}^{\text{вр}^+} = q_{\text{экв}} \cdot \omega^+ = 114,7 \cdot 1,929 = 221,2 \text{ кН.}$$

Таким образом, минимальное и максимальное усилия в стержне  $V_4$ :

$$N_{V_4}^{\text{min}} = N_{V_4}^{\text{пост}} + N_{V_4}^{\text{вр}^-} = -60,0 - 378,2 = -438,2 \text{ кН;}$$

$$N_{V_4}^{\text{max}} = N_{V_4}^{\text{пост}} + N_{V_4}^{\text{вр}^+} = -60,0 + 221,2 = 161,2 \text{ кН.}$$

Расчет фермы на подвижную нагрузку закончен.

### Библиографический список

1. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учебник / Под ред. А. Е. Саргсяна. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Высшая школа, 2000. – 416 с.
2. Справочные материалы для расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость и методические указания по выполнению расчетно-проектировочных работ / Сост. Г. Д. Зайцев. – Л. : ЛИИЖТ, 1986. – 34 с.
3. *Кривошапко С. Н.* Строительная механика: лекции, семинары, расчетно-графические работы: учеб. пособие / С. Н. Кривошапко. – М. : Высшая школа, 2008. – 391 с.
4. Строительная механика. Примеры и задачи : учеб. пособие / под ред. С. В. Елизарова. – СПб. : ПГУПС, 2009. – 461 с.

## Содержание

Общие положения.....	3
<i>Задача № 1.</i> Расчет многопролетной статически определимой балки.....	3
Пример решения задачи № 1.....	5
<i>Задача № 2.</i> Расчет трехшарнирой арки или рамы.....	13
Пример решения задачи № 2.....	15
<i>Задача № 3.</i> Расчет статически определимых ферм на подвижную нагрузку	24
Пример решения задачи № 3.....	25
Библиографический список.....	41

*Учебное издание*

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

### **Часть 1**

Учебное пособие

**Разработали: канд. техн. наук, доценты:  
Бенин А. В., Козьминская О. В., Кульгавий Я. К., Поварова И. Б.,  
Рыбина И. И., Шафеев Р. А.**

Редактор и корректор *И. А. Шабранская*  
Компьютерная верстка *Н. А. Старковой*

План 2010 г., № 19

Подписано в печать с оригинал-макета 01.12.2011.  
Формат 60×84 1/16. Бумага для множ. апп. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 2,625. Тираж 250 экз.  
Заказ 1138.  
Петербургский государственный университет путей сообщения.  
190031, СПб., Московский пр., 9.  
Типография ПГУПС. 190031, СПб., Московский пр., 9.