Лабораторная работа № 2
Анализ линейных систем автоматического регулирования

Цель работы: изучить методы анализа линейных систем автоматического управления.

Краткие теоретические сведения

Понятие частотных характеристик

Если подать на вход системы с передаточной функцией $W(p)$ гармонический сигнал

$$u(t) = U_m e^{j\omega t} = U_m(\cos\omega t + j\cdot\sin\omega t),$$

то после завершения переходного процесса на выходе установится гармонические колебания

$$y(t) = Y_m \cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi)} = Y_m e^{j\omega\cdot t} e^{j\varphi}$$

с той же частотой ω, но иными амплитудой и фазой, зависящими от частоты ω возмущающего воздействия. По ним можно судить о динамических свойствах системы. Зависимости, связывающие амплитуду и фазу выходного сигнала с частотой входного сигнала, называются *частотными характеристиками* (ЧХ). Анализ ЧХ системы с целью исследования ее динамических свойств называется *частотным анализом*.

Подставим выражения для $u(t)$ и $y(t)$ в уравнение динамики

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_n\right) y = \left(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \ldots + b_m\right) u$$

Учтем, что

$$p\cdot u = p\cdot U_m \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = U_m\cdot j\cdot\omega\cdot e^{j\cdot\omega\cdot t} = j\cdot\omega\cdot u,$$

а значит

$$p^n\cdot u = p^n\cdot U_m\cdot e^{j\omega\cdot t} = U_m\cdot(j\cdot\omega)^n\cdot e^{j\omega\cdot t} = (j\cdot\omega)^n\cdot u.$$

Аналогичные соотношения можно записать и для левой части уравнения. Получим:

$$p^n u = p^n U_m e^{j\omega t} = U_m\cdot(j\omega)^n e^{j\omega t} = (j\omega)^n u$$

По аналогии с передаточной функцией можно записать:

$$y = \frac{\left(b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + b_2(j\omega)^{m-2} + \ldots + b_m\right)}{\left(a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + \ldots + a_m\right)} = W(j\omega)\cdot u,$$

где $W(j\omega)$ - частотная передаточная функция, равная отношению выходного сигнала к входному при изменении входного сигнала по гармоническому закону. Легко заметить, что она может быть получена путем простой замены p на $j\omega$ в выражении $W(p)$.

$W(j\omega)$ есть комплексная функция, поэтому:

$$W(j\omega) = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

где $P(\omega)$ - вещественная (действительная) *ЧХ (ВЧХ)*; $Q(\omega)$ - *мнимая ЧХ (МЧХ)*; $A(\omega)$ - *амплитудная ЧХ (АЧХ)*: $\varphi(\omega)$ - *фазовая ЧХ (ФЧХ)*. АЧХ дает отношение амплитуд выходного и входного сигналов, ФЧХ - сдвиг по фазе выходной величины относительно входной.

Если $W(j\omega)$ изобразить вектором на комплексной плоскости, то при изменении ω от 0 до $+\infty$ его конец будет вычерчивать кривую, называемую *годографом вектора* $W(j\omega)$, или *амплитудно - фазовую частотную характеристику (АФЧХ)* (рис. 2.1).

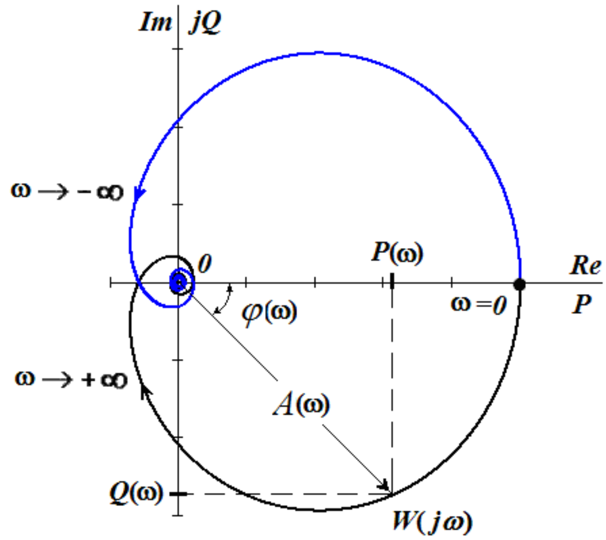

Рис. 2.1. АФЧХ.

Ветвь АФЧХ при изменении ω от $-\infty$ до 0 можно получить зеркальным отображением данной кривой относительно вещественной оси.

В теории управления широко используются *логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ)* (рис. 2.2): *логарифмическая амплитудная ЧХ (ЛАЧХ)* $L(\omega)$ и *логарифмическая фазовая ЧХ (ЛФЧХ)* $\varphi(\omega)$. Они получаются путем логарифмирования передаточной функции:

$$\ln[W(j\omega)] = \ln\left[A(\omega)\cdot e^{j\cdot\varphi(\omega)}\right] = \ln[A(\omega)] + \ln\left[e^{j\cdot\varphi(\omega)}\right] = \ln[A(\omega)] + \varphi(\omega)$$

ЛАЧХ получают из первого слагаемого, которое из соображений масштабирования умножается на 20, и используют не натуральный логарифм, а десятичный, то есть $L(\omega) = 20\cdot lg(A(\omega))$. Величина $L(\omega)$ откладывается по оси ординат в *децибелах*. Изменение уровня сигнала на 10 дБ соответствует изменению его мощности в 10 раз. Так как мощность гармонического сигнала P пропорциональна квадрату его амплитуды A, то изменению сигнала в 10 раз соответствует изменение его уровня на 20 дБ,так как

$$\lg\left(P_2/P_1\right) = \lg\left(A_2^2/A_1^2\right) = 20\cdot\lg\left(A_2/A_1\right).$$

По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе. То есть единичным промежуткам по оси абсцисс соответствует изменение ω в 10 раз. Такой интервал называется *декадой*. Так как $lg(0) = -\infty$, то ось ординат проводят произвольно.

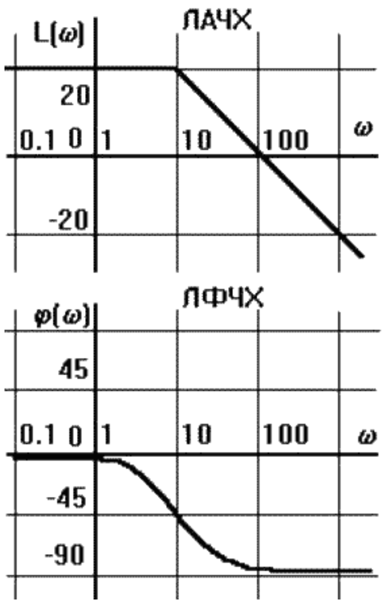

Рис. 2.2. ЛАЧХ и ЛФЧХ.

ЛФЧХ, получаемая из второго слагаемого, отличается от ФЧХ только масштабом по оси ω. Величина $\varphi(\omega)$ откладывается по оси ординат в градусах или радианах. Для элементарных звеньев она не выходит за пределы: $-\pi \le \varphi \le \pi$.

ЧХ являются исчерпывающими характеристиками системы. Зная ЧХ системы можно восстановить ее передаточную функцию и определить параметры.

Задание на лабораторную работу:

Полагая $p = j\omega$, где ω - круговая частота, построить АФЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ:

1. Для апериодического звена с чистым запаздыванием:

   $$W(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1} \cdot e^{-p \cdot \tau},$$

   коэффициент усиления $k = \text{№} \cdot 10$;
   постоянная времени апериодического звена $T = 0.15 \cdot \text{№}$;
   постоянная времени звена чистого запаздывания $\tau = 0.03 \cdot \text{№}$;
   где № - номер обучающегося в списке группы.
2. Для дифференцирующего, интегрирующего, изодромного и форсирующего элементарных стационарных звеньев. Значения параметров T_i принять равными номеру студента в списке группы.