ИНФОРМАТИКА

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Методические указания к курсовой работе для студентов специальности 311100

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2004

УДК 681.142.2 (075.83)

ИНФОРМАТИКА. Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами: Методические указания к курсовой работе / Санкт-Петербургский горный ин-т. Сост.: *И.О.Онушкина, А.Б.Маховиков.* СПб, 2004. 26 с.

Методические указания призваны помочь студенту при выполнении курсовой работы. Подробно изложенные применяемые методы подкреплены примерами, разработан план выполнения работы, даны требования к оформлению.

Предназначены для студентов специальности 311100 «Городской кадастр».

Табл.2. Библиогр.: 4 назв.

Научный редактор доц. *А.Б.Маховиков*

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

ВВЕДЕНИЕ

Целью курсовой работы является закрепление и развитие навыков решения задач вычислительной математики путем составления программ на алгоритмических языках.

Решением системы называется конкретный набор значений всех неизвестных, подстановка которого в систему обращает каждое уравнение в тождество. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на точные и итерационные.

Под точными методами подразумевают методы, которые дают решение задачи при помощи конечного количества однотипных шагов. При этом, если исходные данные, определяющие задачу, заданы точно и вычисления выполняются точно, то решение получается точным. Решение системы при помощи итерационных методов получается как предел последовательных приближений, вычисляемых некоторым единообразным процессом – предел последовательности некоторых векторов, построение которых осуществляется посредством единообразного процесса итераций. Этот процесс прерывают на таком шаге, который обеспечивает получение решения системы с заранее обусловленной точностью. Как правило, вычислительные схемы этих методов просты и удобны для реализации их на компьютере, а компьютерные программы значительно короче, чем программы для точных методов решения.

Однако, каждый итерационный процесс имеет свою ограниченную область применимости, так как процесс итерации может оказаться расходящимся для данной системы или сходимость процесса может быть настолько медленной, что практически оказывается невозможным достигнуть удовлетворительной близости к решению.

К итерационным методам решения системы линейных алгебраических уравнений относятся, в частности, метод простой итерации и метод Зейделя. Рассмотрим каждый из них.

1. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ

Пусть требуется найти с заданной точностью $\epsilon > 0$ решение системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, записанной в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, b_i - свободные члены, x_j - искомые неизвестные, n – порядок системы.

Достаточными условиями (условиями сходимости) для применимости метода простой итерации являются следующие:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{или } |a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ (j \neq i)}}^{n} |a_{ij}| \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

т.е. для применимости метода простой итерации достаточно, чтобы модули диагональных элементов матрицы $A = [a_{ij}]$ системы (1) для каждой строки или столбца были больше суммы модулей недиагональных элементов этой строки или столбца.

Систему (1) можно представить матричным уравнением:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица системы, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

есть векторы-столбцы системы (1).

В методе простой итерации система предварительно приводится к виду:

$$X = PX + Q,$$

где P – квадратная матрица n-го порядка, Q – вектор-столбец из n элементов.

При выполнении условий (2), разрешая первое уравнение системы (1) относительно x_1, второе – относительно x_2 и т.д., n-ое уравнение относительно x_n, вместо системы (1) можно рассматривать некоторую эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a_{in}x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}). \end{cases} \qquad (3)$$

Возьмем некоторые начальные приближения к решению системы $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, в качестве которых, например, можно принять:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}},\ x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}},\ \dots,\ x_n^{(0)} = \frac{b_n}{a_{nn}}. \qquad (4)$$

Подставим их в правые части системы (3).

Полученные значения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$, а именно:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - \dots - a_{nn-1}^{(0)}x_{n-1}^{(0)}), \end{cases}$$

являются первым приближением.

Аналогично можно найти второе, третье и последующие приближения.

В результате ($k-1$) шага будут вычислены $x_1^{(k-1)}$, $x_2^{(k-1)}$, …, $x_n^{(k-1)}$ (k – номер итерации).

На k-ом шаге будем иметь:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}). \end{cases} \qquad (5)$$

В компактной форме расчетные формулы метода простой итерации можно записать в виде:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right),\quad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (6)$$

Из вычислительной математики известен факт, что для системы линейных алгебраических уравнений, преобразованной к виду (3), при выполнении условий (2) преобладания диагональных элементов процесс итераций по формулам (5) сходится к единственному решению этой системы при любом начальном приближении, т.е. решение удовлетворяет соотношению $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ - решение системы. Это утверждение указывает **достаточное условие сходимости метода простой итерации**.

Итерационный процесс - процесс уточнения неизвестных - прекращают, когда на k-м шаге значения всех неизвестных $x_i^{(k)}$ станут достаточно близкими к значениям всех неизвестных $x_i^{(k-1)}$ ($k-1$)-го шага. Критерий близости можно задать в форме:

$$M^{(k)} = \max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon \text{ при } \varepsilon > 0. \qquad (7)$$

1.1. Вычислительная схема метода простой итерации

Вычислительная схема метода простой итерации может быть реализована следующим образом.

1. До начала итерационного процесса задают точность ϵ, с которой хотят получить решение системы (1).
2. Проверяют условия сходимости (2)[1].
3. Переписывают систему в виде (3).
4. В соответствии с формулами (4) задают начальные приближения для искомых величин.

[1] В случае, если условия сходимости не выполняются, систему следует преобразовать с помощью соответствующих элементарных преобразований [1].

5. Дальнейшие вычисления выполняют по формулам (5), для проверки на окончание используя соотношение (7), т.е. для каждого $k = 0, 1, 2\dots$ проверяют выполнение неравенства (7). Если неравенство выполняется, то полученные значения неизвестных принимают за решение системы (1), если же неравенство не выполняется, то данный пункт повторяют.

Результаты вычислений записывают в таблицу (табл.1), столбцы которой содержат номер итерации k, значения неизвестных на каждом шаге $x_i^{(k)}$, разность между последующим и предыдущим значениями неизвестного на каждом шаге $\Delta x_i^{(k)}$ и критерий близости $M^{(k)}$, сравнивая его заданной точностью ϵ.

1.2. Пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации

Решим с точностью $\epsilon = 0{,}005$ систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} 15{,}2x_1 + 2{,}6x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}4 \\ 1{,}9x_1 + 13{,}1x_2 + 2{,}1x_3 = 2{,}6 \\ 7{,}2x_1 + 3{,}8x_2 - 14{,}5x_3 = 6{,}5. \end{cases}$$

В общем виде система выглядит так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 15{,}2 & 2{,}6 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 13{,}1 & 2{,}1 \\ 7{,}2 & 3{,}8 & -14{,}5 \end{pmatrix}$, вектор-столбец системы $B = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 2{,}6 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$.

Проверим условия сходимости (2), которые в общем виде для данной системы запишем следующим образом:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|.$$

Подставив значения, получим неравенства:

$$15{,}2 > 2{,}6 + 1{,}9$$
$$13{,}1 > 1{,}9 + 2{,}1$$
$$14{,}5 > 7{,}2 + 3{,}8.$$

Выразив из первого уравнения системы x_1, из второго x_2, из третьего x_3, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2), \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{15,2}(0,4 - 2,6x_2 - 1,9x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{13,1}(2,6 - 1,9x_1 - 2,1x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{-14,5}(6,5 - 7,2x_1 - 3,8x_2). \end{cases}$$

В соответствии с формулами (4) зададим начальные приближения для искомых величин, а именно:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{0,4}{15,2} \approx 0,0263, \quad x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{2,6}{13,1} \approx 0,1985,$$

$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6,5}{-14,5} \approx -0,4483.$$

Дальнейшие вычисления проводим по формулам (6).

На первом шаге ($k = 1$) будем иметь:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{15,2}(0,4 - 2,6 \cdot 0,1985 - 1,9 \cdot (-0,4483)) \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{13,1}(2,6 - 1,9 \cdot 0,0263 - 2,1 \cdot (-0,4483)) \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{-14,5}(6,5 - 7,2 \cdot 0,0263 - 3,8 \cdot 0,1985). \end{cases}$$

В результате первого шага получим $x_1^{(1)} \approx 0,0484$, $x_2^{(1)} \approx 0,2666$, $x_3^{(1)} \approx -0,3832$. Критерий близости вычислим по формуле (7). Получим:

$$M^{(1)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right| =$$

$$= \max_{1 \le i \le 3}\left(\left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right|; \left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right|; \left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| \right) =$$

$$= \max\left(\left| \Delta x_1^{(1)} \right|; \left| \Delta x_2^{(1)} \right|; \left| \Delta x_3^{(1)} \right| \right) \approx$$

$$\approx \max\left(\left| 0,0221 \right|; \left| 0,0680 \right|; \left| 0,0651 \right| \right) = 0,0680.$$

Таким образом, после первой итерации заданная точность не достигнута, т.к. $0,0680 > \epsilon$ ($0,0680 > 0,005$). Переходим ко второму шагу.

На втором шаге ($k = 2$) будем иметь:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{15,2}(0,4 - 2,6 \cdot 0,2665 - 1,9 \cdot (-0,3832)) \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{13,1}(2,6 - 1,9 \cdot 0,0484 - 2,1 \cdot (-0,3832)) \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{-14,5}(6,5 - 7,2 \cdot 0,0484 - 3,8 \cdot 0,2665). \end{cases}$$

В результате второго шага получим значения:

$$x_1^{(2)} \approx 0,0286, \quad x_2^{(2)} \approx 0,2529, \quad x_3^{(2)} \approx -0,3544.$$

Вычислив критерий близости, получим:

$$M^{(2)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right|, \text{ или } M^{(2)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| \Delta x_i^{(2)} \right| \approx 0,0288.$$

Критерий близости на втором шаге $0,0288 > \epsilon$ ($0,0288 > 0,005$), т.е. требуемая точность не достигнута. Переходим к третьему шагу.

На третьем шаге ($k = 3$) будем иметь:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{15,2}(0,4 - 2,6 \cdot 0,2529 - 1,9 \cdot (-0,3544)) \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{13,1}(2,6 - 1,9 \cdot 0,0286 - 2,1 \cdot (-0,3544)) \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{-14,5}(6,5 - 7,2 \cdot 0,0286 - 3,8 \cdot 0,2529). \end{cases}$$

В результате третьего шага получим значения:

$$x_1^{(3)} \approx 0,0274, \quad x_2^{(3)} \approx 0,2511, \quad x_3^{(3)} \approx -0,3678.$$

Вычислив критерий близости, получим:

$$M^{(3)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(3)} - x_i^{(2)} \right|, \text{ или } M^{(3)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| \Delta x_i^{(3)} \right| \approx 0,0134.$$

$0,0134 > \epsilon$ ($0,0134 > 0,005$). Заданная точность не достигнута. Переходим к четвертому шагу.

На четвертом шаге ($k = 4$) будем иметь:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \dfrac{1}{15,2}(0,4 - 2,6 \cdot 0,2511 - 1,9 \cdot (-0,3678)) \\ x_2^{(4)} = \dfrac{1}{13,1}(2,6 - 1,9 \cdot 0,0274 - 2,1 \cdot (-0,3678)) \\ x_3^{(4)} = \dfrac{1}{-14,5}(6,5 - 7,2 \cdot 0,0274 - 3,8 \cdot 0,2511). \end{cases}$$

В результате четвертого шага получим значения:

$$x_1^{(4)} \approx 0,0293, \quad x_2^{(4)} \approx 0,2535, \quad x_3^{(4)} \approx -0,3689.$$

Вычислив критерий близости, получим:

$$M^{(4)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(4)} - x_i^{(3)} \right|, \text{ или } M^{(4)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| \Delta x_i^{(4)} \right| \approx 0,0023.$$

$0,0023 < \epsilon$ ($0,0023 < 0,005$). Таким образом, на четвертом шаге достигнута заданная точность, следовательно, вычисления закончены.

Для наглядности запишем результаты вычислений в таблицу (табл.1).

Таблица 1

Результаты вычислений методом простой итерации

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\Delta x_1^{(k)}$	$\Delta x_2^{(k)}$	$\Delta x_3^{(k)}$	$M^{(k)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$
0	0,0263	0,1985	-0,4483				
1	0,0484	0,2665	-0,3832	0,0221	0,0680	0,0651	$0,0680 > \epsilon$
2	0,0286	0,2529	-0,3544	-0,0198	-0,0136	0,0288	$0,0288 > \epsilon$
3	0,0274	0,2511	-0,3678	-0,0013	-0,0018	-0,0134	$0,0134 > \epsilon$
4	0,0293	0,2535	-0,3689	0,0020	0,0023	-0,0011	$0,0023 < \epsilon$

Решение системы: $x_1 \approx 0,029$, $x_2 \approx 0,254$, $x_3 \approx -0,369$.

1.3. Задание по теме “Решение систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации”

Составить программу для решения методом простой итерации с точностью $\epsilon = 0,005$ системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка. Систему уравнений выбрать в соответствии с номером варианта. Выполнить проверку решения вручную в соответствии с приведенным выше примером, оформив результаты вычислений в виде таблицы.

2. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ

Если в методе простой итерации новые приближения неизвестных используются только на следующем шаге после уточнения значений всех неизвестных, то в методе Зейделя значения искомых величин на каждом шаге уточняются путем подстановки их самых последних приближений в правые части уравнений (3).

Пусть в результате (k-1)-го шага вычислены $x_1^{(k-1)}$, $x_2^{(k-1)}$, …, $x_n^{(k-1)}$.

Тогда на *k*-ом шаге значения неизвестных уточняют по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i^{(k)} = \dfrac{1}{a_{ii}}(b_i - a_{i1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k-1)} - \ldots - a_{in}x_n^{(k-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}). \end{cases} \tag{8}$$

В компактной форме расчетные формулы можно записать так:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Условия сходимости описаны при изложении метода простой итерации формулой (2).

В ряде случаев оказывается, что метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации. Иногда метод Зейделя сходится медленнее метода простой итерации.

2.1. Вычислительная схема метода Зейделя

Вычислительная схема метода Зейделя реализуется следующим образом.

1. Задают точность ϵ, с которой нужно получить решение системы (1).

2. Проверяют условия сходимости (2)[2].
3. Для $i = 1, 2, \ldots, n$ вычисляют начальные приближения к решению $x_i = b_i / a_{ii}$.
4. Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ вычисляют $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, …, $x_n^{(k)}$ по формулам (8).
5. Далее проверяют неравенство $\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \epsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если оно выполняется, то считают $x^{(k+1)}$ решением уравнения, а если неравенство не выполняется, то повторяют операцию, начиная с п.4.

Результаты вычислений записывают в таблицу (табл.2), столбцы которой содержат номер итерации *k*, значения неизвестных на каждом шаге $x_i^{(k)}$, разность между последующим и предыдущим значениями неизвестного на каждом шаге $\Delta x_i^{(k)}$ и критерий близости $M^{(k)}$, сравнивая его заданной точностью ϵ.

2.2. Пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Методом Зейделя решим с точностью $\epsilon = 0{,}005$ систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} 15{,}2x_1 + 2{,}6x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}4 \\ 1{,}9x_1 + 13{,}1x_2 + 2{,}1x_3 = 2{,}6 \\ 7{,}2x_1 + 3{,}8x_2 - 14{,}5x_3 = 6{,}5. \end{cases}$$

В общем виде система выглядит так:

[2] В случае, если условия сходимости не выполняются, систему следует преобразовать с помощью соответствующих преобразований [1].

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 15{,}2 & 2{,}6 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 13{,}1 & 2{,}1 \\ 7{,}2 & 3{,}8 & -14{,}5 \end{pmatrix}$, вектор-столбец системы $B = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 2{,}6 \\ 6{,}5 \end{pmatrix}$.

Проверим условия сходимости (2), которые в общем виде запишем следующим образом:

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|.$$

Подставив значения, получим неравенства:

$$15{,}2 > 2{,}5 + 1{,}9$$
$$13{,}1 > 1{,}9 + 2{,}1$$
$$14{,}5 > 7{,}2 + 3{,}8.$$

Преобразуем систему к виду (3):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{15{,}2}(0{,}4 - 2{,}6x_2 - 1{,}9x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{13{,}1}(2{,}6 - 1{,}9x_1 - 2{,}1x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{-14{,}5}(6{,}5 - 7{,}2x_1 - 3{,}8x_2). \end{cases}$$

В соответствии с формулами (4) зададим начальные приближения искомых величин, а именно: $x_1^{(0)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} = \dfrac{0{,}4}{15{,}2} \approx 0{,}0263$, $x_2^{(0)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} = \dfrac{2{,}6}{13{,}1} \approx 0{,}1985$, $x_3^{(0)} = \dfrac{b_3}{a_{33}} = \dfrac{6{,}5}{-14{,}5} \approx -0{,}4483$.

Дальнейшие вычисления проводим по формулам (8):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{15{,}2}(0{,}4 - 2{,}6 \cdot 0{,}1985 - 1{,}9 \cdot (-0{,}4483)) \approx 0{,}0484 \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{13{,}1}(2{,}6 - 1{,}9 \cdot 0{,}0484 - 2{,}1 \cdot (-0{,}4483)) \approx 0{,}2633 \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{-14{,}5}(6{,}5 - 7{,}2 \cdot 0{,}0484 - 3{,}8 \cdot 0{,}2633) \approx -0{,}3552. \end{cases}$$

Критерий близости вычислим по формуле (7). Получим:

$$M^{(1)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(1)} - x_i^{(0)} \right| =$$
$$= \max_{1 \le i \le 3}\left(\left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right|; \left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right|; \left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| \right) =$$
$$= \max\left(\left| \Delta x_1^{(1)} \right|; \left| \Delta x_2^{(1)} \right|; \left| \Delta x_3^{(1)} \right| \right) \approx$$
$$\approx \max\left(\left| 0{,}0221 \right|; \left| 0{,}0648 \right|; \left| 0{,}0931 \right| \right) = 0{,}0931.$$

После первой итерации заданная точность не достигнута, т.к. $0{,}0931 > \epsilon$ ($0{,}0931 > 0{,}005$). Переходим ко второму шагу. На втором шаге ($k = 2$) будем иметь:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{15{,}2}(0{,}4 - 2{,}6 \cdot 0{,}2633 - 1{,}9 \cdot (-0{,}3552)) \approx 0{,}0257 \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{13{,}1}(2{,}6 - 1{,}9 \cdot 0{,}0257 - 2{,}1 \cdot (-0{,}3552)) \approx 0{,}2517 \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{-14{,}5}(6{,}5 - 7{,}2 \cdot 0{,}0257 - 3{,}8 \cdot 0{,}2517) \approx -0{,}3696. \end{cases}$$

В результате второго шага получим значения:

$$x_1^{(2)} \approx 0{,}0257, \quad x_2^{(2)} \approx 0{,}2517, \quad x_3^{(2)} \approx -0{,}3696.$$

Вычислив критерий близости, получим:

$$M^{(2)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \right|, \text{ или } M^{(2)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| \Delta x_i^{(2)} \right| \approx 0{,}0227.$$

Критерий близости на втором шаге $0{,}0227 > \epsilon$ ($0{,}0227 > 0{,}005$), т.е. требуемая точность не достигнута. Переходим к третьему шагу.

На третьем шаге ($k = 3$) будем иметь:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{15{,}2}(0{,}4 - 2{,}6 \cdot 0{,}2517 - 1{,}9 \cdot (-0{,}3696)) \approx 0{,}0295 \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{13{,}1}(2{,}6 - 1{,}9 \cdot 0{,}0295 - 2{,}1 \cdot (-0{,}3696)) \approx 0{,}2534 \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{-14{,}5}(6{,}5 - 7{,}2 \cdot 0{,}0295 - 3{,}8 \cdot 0{,}2534) \approx -0{,}3672. \end{cases}$$

В результате третьего шага получим значения:

$$x_1^{(3)} \approx 0{,}0295, \quad x_2^{(3)} \approx 0{,}2534, \quad x_3^{(3)} \approx -0{,}3672.$$

Вычислив критерий близости, получим:

$$M^{(3)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| x_i^{(3)} - x_i^{(2)} \right|, \text{ или } M^{(3)} = \max_{1 \le i \le 3} \left| \Delta x_i^{(3)} \right| \approx 0{,}0038.$$

$0{,}0038 < \epsilon$ ($0{,}0038 < 0{,}005$). На третьем шаге достигнута заданная точность, следовательно, вычисления закончены.

Для наглядности запишем результаты вычислений в таблицу (табл.2).

Таблица 2

Результаты вычислений методом Зейделя

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\Delta x_1^{(k)}$	$\Delta x_2^{(k)}$	$\Delta x_3^{(k)}$	$M^{(k)} = \max_{1 \le i \le 3} \left\| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right\|$
0	0,0263	0,1985	-0,4483				
1	0,0484	0,2633	-0,3552	0,0221	0,0648	0,0931	$0{,}0931 > \epsilon$
2	0,0257	0,2517	-0,3696	-0,0227	-0,0116	0,0144	$0{,}0227 > \epsilon$
3	0,0295	0,2534	-0,3672	-0,0038	-0,0017	-0,0024	$0{,}0038 < \epsilon$

Решение системы: $x_1 \approx 0{,}0295$, $x_2 \approx 0{,}2534$, $x_3 \approx -0{,}3672$.

Видно, что при решении рассмотренной системы метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации.

2.3. Задание по теме “Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя”

Составить программу для решения методом Зейделя с точностью $\epsilon = 0{,}001$ системы линейных алгебраических уравнений третьего порядка. Систему уравнений выбрать в соответствии с номером варианта. Выполнить проверку решения вручную в соответствии с приведенным выше примером, оформив результаты вычислений в виде таблицы.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Воспользоваться редактором Microsoft Word.

1. Размер бумаги А4 (210×297 мм), печать односторонняя, ориентация книжная; поля: верхнее, нижнее и правое по 2,5 см, левое 3,0 см; колонтитулы: от края колонтитула верхнего 1,25 см; нижнего 1,6 см; переплет 0 см; нумерация внизу страницы, от центра (титульный лист не нумеровать), размер шрифта 10.
2. Шрифт Times New Roman, размер 12; выравнивание для абзаца – по ширине, для заголовка – по центру, отступ первой строки абзаца 1,25 см; межстрочный интервал одинарный; автоматическая расстановка переносов, запрет висячих строк. Размер символов формулы: обычный 12, крупный индекс 7, мелкий индекс 5, крупный символ 18, мелкий символ 12. Размер символов таблицы и блок-схемы 10. Рисунки и подрисуночные подписи – по центру, размер символов подписи 10. Размер шрифта оглавления 10, номеров формул - 12.

Отчет должен содержать:

- пояснительную записку (титульный лист, заполненный в соответствии с образцом, приведенным в Приложении 1);
- индивидуальное задание (лист, заполненный в соответствии с образцом, приведенным в Приложении 2);
- аннотацию на русском и одном из иностранных языков, размещенную на отдельном листе (на стр. 3 отчета);
- оглавление (выполненное командой Microsoft Word **Вставка | Оглавление и указатели | Оглавление (Форматы: из шаблона, уровни: 1, заполнитель …..)**), размещенное на отдельном листе (на стр. 4 отчета);
- введение;
- теоретическую часть работы, содержащую описание применяемого при расчетах метода;
- проверку условия сходимости для применимости метода по отношению к конкретной системе уравнений;
- результаты вычислений, произведенных вручную и представленных в соответствии с табл.1 или табл.2 (в зависимости от применяемого метода);
- решение системы, полученное вручную;
- блок-схему вычислительного процесса;
- текст файла с входными данными;
- текст программы, реализующей вычислительный процесс (программа должна содержать достаточное количество комментариев; имена переменных должны быть разумными; ввод данных из файла, вывод результатов в файл, вычисление новых приближений и собственно итерационный метод должны быть оформлены в виде подпрограмм);
- текст файла с результатом, полученным при решении системы уравнений с применением программы;
- заключение;
- библиографический список.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

1)
$$\begin{cases} 13{,}21x_1 - 4{,}25x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06 \\ 7{,}09x_1 + 11{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = 4{,}75 \\ 1{,}43x_1 - 0{,}40x_2 - 3{,}62x_3 = -1{,}05 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 10{,}01x_1 + 4{,}17x_2 - 3{,}29x_3 = 2{,}07 \\ -5{,}03x_1 - 11{,}15x_2 - 3{,}22x_3 = 11{,}95 \\ -2{,}03x_1 + 1{,}78x_2 - 4{,}52x_3 = 11{,}05 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 9{,}05x_1 - 5{,}26x_2 - 2{,}22x_3 = 2{,}05 \\ -1{,}09x_1 - 11{,}17x_2 + 5{,}33x_3 = 3{,}61 \\ -1{,}55x_1 + 0{,}26x_2 - 3{,}43x_3 = 9{,}01 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} -3{,}12x_1 - 0{,}21x_2 + 2{,}22x_3 = 6{,}13 \\ 5{,}03x_1 - 7{,}87x_2 - 0{,}23x_3 = -4{,}71 \\ 1{,}03x_1 + 4{,}41x_2 - 8{,}51x_3 = -11{,}13 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} -1{,}01x_1 + 0{,}26x_2 - 0{,}23x_3 = 12{,}03 \\ 1{,}09x_1 + 4{,}17x_2 + 2{,}31x_3 = 0{,}65 \\ -1{,}15x_1 - 0{,}23x_2 + 3{,}53x_3 = 8{,}05 \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} 1{,}11x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}03x_3 = 8{,}01 \\ 1{,}02x_1 - 4{,}07x_2 - 2{,}11x_3 = 1{,}15 \\ 1{,}18x_1 + 1{,}13x_2 - 4{,}51x_3 = 2{,}05 \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} 8{,}05x_1 - 3{,}21x_2 - 0{,}11x_3 = -2{,}05 \\ 1{,}25x_1 - 4{,}97x_2 - 1{,}30x_3 = 6{,}64 \\ 1{,}14x_1 + 1{,}22x_2 + 3{,}59x_3 = -1{,}05 \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} 5{,}02x_1 + 2{,}25x_2 - 0{,}18x_3 = 12{,}01 \\ 1{,}27x_1 - 5{,}94x_2 + 0{,}31x_3 = 1{,}64 \\ 0{,}14x_1 - 1{,}26x_2 + 8{,}54x_3 = 10{,}01 \end{cases}$$

9)

$$\begin{cases} -4{,}07x_1 + 2{,}25x_2 - 1{,}12x_3 = 1{,}01 \\ 0{,}11x_1 - 8{,}91x_2 + 0{,}39x_3 = -1{,}14 \\ 0{,}19x_1 - 1{,}12x_2 - 4{,}52x_3 = 10{,}05 \end{cases}$$

10)

$$\begin{cases} 7{,}12x_1 - 2{,}21x_2 + 3{,}19x_3 = -1{,}01 \\ -0{,}21x_1 + 5{,}91x_2 - 3{,}31x_3 = 1{,}14 \\ 1{,}17x_1 + 1{,}25x_2 - 4{,}52x_3 = -1{,}03 \end{cases}$$

11)

$$\begin{cases} 1{,}22x_1 - 0{,}23x_2 - 0{,}72x_3 = -1{,}09 \\ 0{,}15x_1 - 4{,}23x_2 + 1{,}20x_3 = -1{,}55 \\ -1{,}11x_1 - 1{,}55x_2 - 3{,}59x_3 = 3{,}35 \end{cases}$$

12)

$$\begin{cases} 6{,}72x_1 - 2{,}22x_2 + 1{,}48x_3 = 2{,}05 \\ -0{,}12x_1 + 5{,}71x_2 - 1{,}31x_3 = 1{,}11 \\ 0{,}12x_1 + 1{,}23x_2 - 5{,}51x_3 = 1{,}01 \end{cases}$$

13)

$$\begin{cases} 6{,}21x_1 + 1{,}25x_2 - 1{,}79x_3 = 1{,}43 \\ -1{,}15x_1 + 8{,}23x_2 - 1{,}21x_3 = 1{,}01 \\ 1{,}05x_1 + 4{,}52x_2 + 9{,}54x_3 = 1{,}34 \end{cases}$$

14)

$$\begin{cases} -2{,}76x_1 + 1{,}21x_2 + 0{,}42x_3 = -2{,}03 \\ 0{,}128x_1 - 5{,}22x_2 + 0{,}37x_3 = -1{,}41 \\ -4{,}19x_1 + 0{,}22x_2 + 5{,}77x_3 = 8{,}01 \end{cases}$$

15)

$$\begin{cases} 7{,}77x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}29x_3 = 1{,}45 \\ 1{,}17x_1 - 6{,}22x_2 + 1{,}77x_3 = 1{,}05 \\ 1{,}06x_1 + 4{,}12x_2 - 12{,}53x_3 = -1{,}31 \end{cases}$$

16)

$$\begin{cases} -2{,}16x + 1{,}21x_2 + 0{,}42x_3 = 2{,}03 \\ 1{,}12x_1 - 5{,}12x_2 + 0{,}37x_3 = -1{,}11 \\ -4{,}19x_1 + 0{,}22x_2 + 5{,}17x_3 = 8{,}01 \end{cases}$$

17)

$$\begin{cases} 4{,}11x_1 - 0{,}22x_2 + 1{,}12x_3 = 3{,}41 \\ 2{,}15x_1 - 8{,}20x_2 + 3{,}26x_3 = 9{,}15 \\ -2{,}16x_1 - 1{,}13x_2 + 9{,}11x_3 = 1{,}11 \end{cases}$$

18)

$$\begin{cases} 4{,}15x - 1{,}29x_2 - 2{,}41x_3 = 5{,}03 \\ 0{,}12x_1 + 5{,}19x_2 + 0{,}39x_3 = 1{,}12 \\ 4{,}15x_1 - 1{,}23x_2 - 9{,}18x_3 = 0{,}01 \end{cases}$$

19)

$$\begin{cases} 3{,}10x_1 + 0{,}12x_2 - 1{,}92x_3 = 1{,}41 \\ 0{,}15x_1 + 6{,}20x_2 - 4{,}25x_3 = 0{,}17 \\ 2{,}17x_1 + 0{,}13x_2 + 3{,}18x_3 = -1{,}19 \end{cases}$$

20)

$$\begin{cases} -1{,}15x_1 - 0{,}29x_2 + 0{,}48x_3 = 0{,}04 \\ 0{,}22x_1 + 3{,}17x_2 - 0{,}31x_3 = 7{,}17 \\ 2{,}15x_1 - 0{,}21x_2 - 5{,}27x_3 = 3{,}01 \end{cases}$$

21)

$$\begin{cases} -7{,}21x_1 - 1{,}18x_2 - 8{,}01x_3 = -0{,}31 \\ 0{,}17x_1 - 7{,}32x_2 + 1{,}27x_3 = -0{,}19 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}19x_2 + 7{,}13x_3 = -5{,}17 \end{cases}$$

22)

$$\begin{cases} 6{,}11x_1 + 1{,}22x_2 - 0{,}33x_3 = 0{,}19 \\ 0{,}29x_1 - 7{,}19x_2 + 1{,}31x_3 = 6{,}19 \\ 1{,}15x_1 + 1{,}21x_2 - 9{,}26x_3 = 2{,}01 \end{cases}$$

23)

$$\begin{cases} -7{,}23x_1 + 2{,}19x_2 + 3{,}07x_3 = 1{,}11 \\ 0{,}19x_1 + 5{,}38x_2 - 0{,}21x_3 = -0{,}17 \\ 1{,}19x_1 + 2{,}15x_2 - 6{,}15x_3 = -1{,}16 \end{cases}$$

24)

$$\begin{cases} 2{,}14x_1 + 1{,}22x_2 + 0{,}22x_3 = -1{,}14 \\ -1{,}25x_1 - 5{,}14x_2 + 1{,}77x_3 = 2{,}12 \\ -1{,}17x_1 + 2{,}23x_2 - 8{,}31x_3 = 1{,}01 \end{cases}$$

25)

$$\begin{cases} 4{,}24x_1 + 0{,}18x_2 + 1{,}09x_3 = -7{,}32 \\ -0{,}19x_1 + 6{,}39x_2 + 2{,}29x_3 = -2{,}99 \\ -3{,}17x_1 - 1{,}15x_2 - 7{,}53x_3 = 1{,}15 \end{cases}$$

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. Учебн. пособие для ВТУЗов. Изд. 4-е, испр. М.: Наука, 1970.
2. *Епанешников А.М., Епанешников В.М.* Программирование в среде Turbo Pascal 7.0. Изд. 3-е, стер. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996.
3. *Зельднер Г.А.* Программируем на языке QuickBASIC 4.5. Изд 2-е, исправленное и дополненное). М.: ABF, 1996.
4. *Хэлворсон М.* Эффективная работа с Microsoft Office 2000. СПб; М.; Харьков; Минск: Питер, 2001.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Министерство образования Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В. Плеханова
(технический университет)

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине ____
(наименование учебной дисциплины согласно учебному плану)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Тема работы: ____
____

Автор: студент гр. ________ ________ /____________/
(шифр группы) (подпись) (Ф.И.О.)

Оценка: ____________

Дата: ____________

Проверил:
руководитель работы ________ ________ /____________/
(должность) (подпись) (Ф.И.О.)

Санкт-Петербург
200_ г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Министерство образования Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г.В. Плеханова
(технический университет)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
______/__________/
(подпись) (Ф.И.О.)
"___"_________200_ г.

Кафедра ______________________________

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине ____
(наименование учебной дисциплины согласно учебному плану)

ЗАДАНИЕ

студенту группы ________ ____________
(шифр группы) (Ф.И.О.)

1. Тема работы ____
____

2. Исходные данные к работе ____
____

3. Содержание пояснительной записки ________________________________
____

4. Перечень графического материала ________________________________
____

5. Срок сдачи законченной работы ____ __________ 200_ г.

Руководитель работы ________ ________ /____________/
(должность) (подпись) (Ф.И.О.)

Дата выдачи задания: ____ __________ 200_ г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ 4
1.1. Вычислительная схема метода простой итерации 7
1.2. Пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации 8
1.3. Задание по теме "Решение систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации" 13
2. МЕТОД ЗЕЙДЕЛЯ 13
2.1. Вычислительная схема метода Зейделя 14
2.2. Пример решения системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя 15
2.3. Задание по теме "Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя" 19
ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТА 19
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 21
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 23
ПРИЛОЖЕНИЕ 1 24
ПРИЛОЖЕНИЕ 2 25

ИНФОРМАТИКА

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Методические указания к курсовой работе для студентов специальности 311100

Составители: *И.О.Онушкина, А.Б.Маховиков*
Оригинал-макет *И.О.Онушкиной*

Лицензия ИД № 06517 от 09.01.02

Подписано к печати 13.02.04. Формат 60х84/16.
Бум. для копировальной техники. Отпечатано на ризографе. Усл.печ.л. 1,5.
Усл.кр.-отт. 1,5. Уч.-изд.л. 1. Тираж 100 экз. Заказ 67. С 21.

Санкт-Петербургский государственный горный институт имени Г.В.Плеханова
РИЦ Санкт-Петербургского государственного горного института
Адрес института и РИЦ: 199106 Санкт-Петербург, 21-я линия, 2