

## Лабораторная работа №4.

### Построение двухфакторного эксперимента с использованием квадратичной модели

#### *Цель работы:*

Изучение методики построения квадратичных моделей объектов на основе планов второго порядка и теории композиционного планирования (центрально-композиционный план и ортогональный центрально-композиционный план).

#### *Основные понятия*

Планирование эксперимента – это оптимальное управление ходом эксперимента с целью получения максимально возможной информации на основе минимально допустимого количества опытных данных. Под экспериментом будем понимать совокупность операций совершаемых над объектом исследования с целью получения информации об его свойствах [1].

#### Планы второго порядка

Планы второго порядка предназначены для получения регрессионной модели в виде полного квадратичного полинома (полинома второй степени)

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} x_1^2 + \dots + \alpha_{2n} x_n^2 + \alpha_{2n+1} x_1 x_2 + \dots + \alpha_k x_{n-1} x_n \quad (1)$$

где

$y(x)$  – функция отклика;

$x$  – факторы эксперимента,  $x := (x_1 \dots x_n)$ ;

$n$  – количество факторов;

$\alpha_0$  – свободный член;

$\alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n$  – линейные коэффициенты;

$\alpha_{n+1} \dots \alpha_{ij} \dots \alpha_k$  – коэффициенты парного взаимодействия.

Подобные планы применяют, как правило – либо в том случае, когда использование планирования первого порядка не позволило получить адекватную регрессионную модель, и выяснилась необходимость ее усложнения – либо если заранее известно, что объект исследования обладает существенными нелинейными свойствами.

По сравнению с планами первого порядка планы второго порядка являются более сложными по структуре, имеют большее число точек и уровней варьирования для каждого фактора, требуют при своей реализации увеличенного количества опытов.

### Центрально-композиционный план (ЦКП)

Центрально-композиционные планы (ЦКП) любой модификации состоят из трех частей.

Первая часть – основа или ядро плана – это полный факторный эксперимент (ПФЭ)  $2^n$ , где  $n$  – количество неизвестных коэффициентов регрессии.

Вторая часть ЦКП – так называемые «звездные» точки. Общее число таких звёздных точек равно  $2n$ , расположенных на осях фиктивного пространства, координаты которых:

$$(\pm\alpha, 0, \dots, 0), (0, \pm\alpha, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm\alpha),$$

где  $\alpha$ - расстояние от центра плана до звездной точки – «звездного плеча».

«Звездное» плечо – это расстояние между центральной и звездной точками плана второго порядка.

Третья часть ЦКП – опыты в центре плана; число таких опытов  $N_0 \geq 1$ . Для описания поверхности отклика полиномами второго порядка независимые факторы должны принимать не менее трех разных значений.

Общее количество опытов рассчитывается по формуле (2):

$$N = 2^n + 2n + n_0, \tag{2}$$

где  $n_0$  – количество опытов в центре плана;

$2n$  – число «звездных» точек плана;

$2^n$  – число опытов полного факторного эксперимента,  $2^k = N_0$

Длина «звездного плеча»  $\alpha$  рассчитывается по формуле (3):

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{N \cdot N_0} - N_0)/2} \quad (3)$$

Произвольный симметричный ЦКП приведен в таблице 1:

Таблица 1

Произвольный симметричный центрально-композиционный план

Составные части ЦКП	Входные факторы			
	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
Ядро плана ПФЭ – ( $N_0 = 2^k$ )	-1	-1	...	-1
	+1	-1	...	-1
	-1	+1	...	-1
	+1	+1	...	-1
	...	...	...	...
	+1	+1	...	-1
«Звездные» точки ( $2k$ )	$-\alpha$	0	...	0
	$+\alpha$	0	...	0
	0	$-\alpha$	...	0
	0	$+\alpha$	...	0
	...	...	...	...
	0	0	...	$-\alpha$
	0	0	...	$+\alpha$
Центральные точки ( $n_0$ )	0	0	...	0
	...	...	...	...
	0	0	...	0

На рис.1 представлен композиционный план при  $k=2$ : точки 1-4 образуют ПФЭ  $2^2$  с координатами (-1;1), (1;1), (-1;-1) и (1;-1), точка 5 – центр плана с координатами (0;0), точки 6-9 – звездные точки.

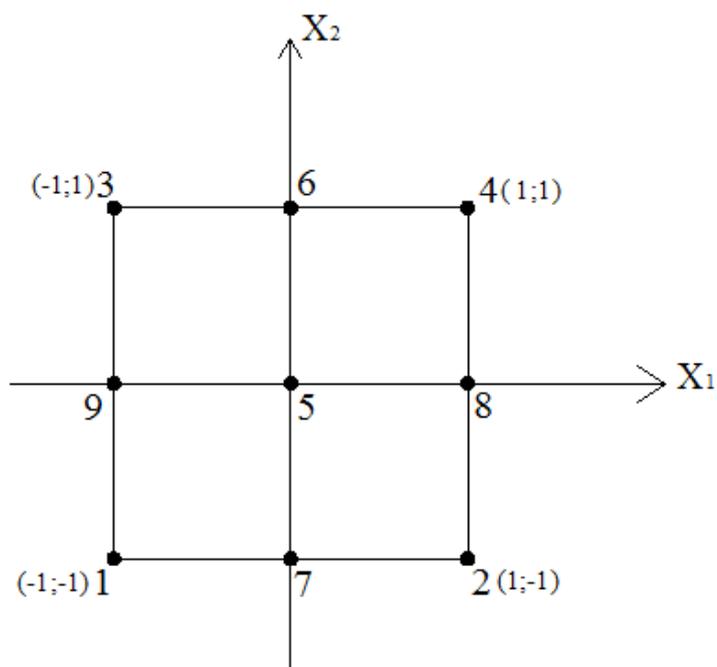


Рис.1. Композиционный план второго порядка для  $k=2$

Таким образом, ЦКП для  $n$  – факторов имеет общий вид, который показан в табл. 2.

Таблица 2

Центрально-композиционный план для  $n$  – факторов

Номер опыта	Входной фактор		Факторы взаимодействия			Значение функции отклика
	$x_1$	$x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_1x_2$	
<b>N</b>	$x_1$	$x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_1x_2$	<b>Y</b>
<b>1</b>	$x_{11}$	$x_{21}$	$x_{11}^2$	$x_{21}^2$	$x_{11} x_{21}$	<b>Y<sub>1</sub></b>
<b>2</b>	$x_{12}$	$x_{22}$	$x_{12}^2$	$x_{22}^2$	$x_{12} x_{22}$	<b>Y<sub>2</sub></b>
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
<b>9</b>	$x_{19}$	$x_{29}$	$x_{19}^2$	$x_{29}^2$	$x_{19} x_{29}$	<b>Y<sub>9</sub></b>

ЦКП для  $n=2$  факторов имеет вид, который показан в табл. 3.

Центрально-композиционный план для n=2 факторов

	Номер опыта	Входной фактор		Факторы взаимодействия			Значение функции отклика
	N	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub> <sup>2</sup>	x <sub>2</sub> <sup>2</sup>	x <sub>1</sub> x <sub>2</sub>	
ПФЭ 2 <sup>2</sup>	1	-1	-1	+1	+1	+1	Y <sub>1</sub>
	2	+1	-1	+1	+1	-1	Y <sub>2</sub>
	3	-1	+1	+1	+1	-1	Y <sub>3</sub>
	4	+1	+1	+1	+1	+1	Y <sub>4</sub>
«Звездные точки» 2k	5	-1	0	+1	0	0	Y <sub>5</sub>
	6	+1	0	+1	0	0	Y <sub>6</sub>
	7	0	-1	0	+1	0	Y <sub>7</sub>
	8	0	+1	0	+1	0	Y <sub>8</sub>
Центр плана n <sub>0</sub>	9	0	0	0	0	0	Y <sub>9</sub>

По формуле (3) для плана по 2-м факторам длину «звездного» плеча ( $\alpha$ ) получаем:

$$\alpha = \sqrt{(\sqrt{N \cdot N_0} - N_0)/2} = \sqrt{(\sqrt{9 \cdot 4} - 4)/2} = 1$$

### Ортогональный центрально-композиционный план (ОЦКП)

Конкретные значения плеча  $\alpha$  и центра плана  $n_0$  выбираются исходя из тех или иных критериев оптимальности регрессионных экспериментов. В связи с этим принято выделять ортогональные (ОЦКП) и рототабельные (РЦКП) центрально-композиционные планы [3].

В ОЦКП, как правило,  $n_0 = 1$ , а план целиком строится с учетом критерия ортогональности (сумма попарных произведений значений уровней двух любых факторов (столбцов) равна нулю). Для построения ОЦКП, прежде всего, несколько видоизменяют систему базисных функций, а именно – ищут регрессионную модель в виде:

$$y(x) = b_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1}(x_1^2 - \beta) + \dots + \alpha_{2n}(x_n^2 - \beta) + \alpha_{2n+1} x_1 x_2 + \dots + \alpha_k x_{n-1} x_n \quad (4)$$

где

$$\beta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_{ij}^2 \quad (5)$$

где N – общее число точек плана:  $N = N_0 + 2k + n_0$ ;

$$j = 1 \dots N;$$

$$i = 1 \dots n.$$

От формулы (4) легко перейти к формуле (1), определив  $\alpha_0$  по формуле (6) следующим образом:

$$\alpha_0 = b_0 - \beta \sum_{i=1}^N a_{n+1} \quad (6)$$

Как видно, в этой модели при квадратичных коэффициентах используются центрированные переменные. Переход к таким переменным обеспечивает ортогональность численных значений базисных функций, соответствующих свободному члену уравнения регрессии, и любого из столбцов центрированных квадратов.

По формуле (3) найдены конкретные числовые значения  $\alpha$  при  $k = 2 \div 4$  и приведены в табл. 4:

Таблица 4

Числовые значения  $\alpha$  при  $k = 2 \div 4$

N	2	3	4
Ядро ЦКП	ПФЭ $2^2$	ПФЭ $2^3$	ПФЭ $2^4$
N	9	15	25
$\alpha$	1,000	1,215	1,414

Оценки коэффициентов регрессии, полученные с помощью ОЦКП, некоррелированы между собой, что, впрочем, характерно для любого ортогонального плана.

Правило ортогональности: скалярное произведение любых двух столбцов матрицы равно нулю при любом выборе  $\alpha$ .

Приведем формулы (7-9) для расчета оценок регрессионных коэффициентов:

$$\bar{\alpha}_i = \begin{cases} c_1 \sum_{j=1}^N x_{ij} * \tilde{Y}_i, & i=1, \dots, n, & (7) \\ c_2 \sum_{j=1}^N [(x_{ij-n})^2 - \beta] * \tilde{Y}_i, & i=n+1, \dots, 2n, & (8) \\ c_3 \sum_{j=1}^N x_{i\mu} x_{i\lambda} * \tilde{Y}_i, & \lambda, \mu \neq 1, 2, \dots, n, \mu = \lambda, i=2n+1, \dots, k. & (9) \end{cases}$$

где  $x_{ij}$  – значение  $i$ -го фактора в  $j$ -м опыте;

$c_1, c_2, c_3$  – постоянная для расчета (см. табл. 5);

$\tilde{Y}_i$  – среднее значение отклика;

$i=n+1, \dots, 2n$ , тогда  $i=n+1=2+1=3$ ,  $i=2n=2*2=4$ ;

$$\beta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = \frac{2^n + \alpha^2}{N}.$$

1) В данной лабораторной работе для количества факторов  $n=2$  формула (7) для линейных коэффициентов для фактора  $x_1$  принимает следующий вид:

$$\bar{\alpha}_1 = c_1 \sum_{j=1}^9 x_{1j} * \tilde{Y}_1 = c_1 (x_{11} * \tilde{Y}_1 + x_{12} * \tilde{Y}_2 + \dots + x_{19} * \tilde{Y}_9) \quad (10)$$

для фактора  $x_2$  принимает:

$$\bar{\alpha}_2 = c_1 (x_{21} * \tilde{Y}_1 + x_{22} * \tilde{Y}_2 + \dots + x_{29} * \tilde{Y}_9) \quad (11)$$

2) Формула (8) для центрированных квадратичных переменных принимает вид:

$$\bar{\alpha}_i = c_2 ([(x_{ij-n})^2 - \beta] * \tilde{Y}_1 + [(x_{ij-n})^2 - \beta] * \tilde{Y}_2 + \dots + [(x_{ij-n})^2 - \beta] * \tilde{Y}_9) \quad (12)$$

Для  $n=2$  по формуле (12), получим:

$$\bar{\alpha}_3 = c_2([(x_{11})^2 - \beta] * \tilde{Y}_1 + [(x_{12})^2 - \beta] * \tilde{Y}_2 + \dots + [(x_{19})^2 - \beta] * \tilde{Y}_9) \quad (13)$$

$$\bar{\alpha}_4 = c_2([(x_{21})^2 - \beta] * \tilde{Y}_1 + [(x_{22})^2 - \beta] * \tilde{Y}_2 + \dots + [(x_{29})^2 - \beta] * \tilde{Y}_9) \quad (14)$$

3) Формула (9) для парных взаимодействий принимает вид:

$$\bar{\alpha}_5 = c_3(x_{11}x_{21} * \tilde{Y}_1 + x_{32} * \tilde{Y}_2 + \dots + x_{39} * \tilde{Y}_9) \quad (15)$$

Постоянные коэффициенты  $c_1, c_2, c_3$  приведены в таблице (5).

Таблица 5

Параметры центрально-композиционного плана

Размерность	План ядра	N	$\alpha$	$\beta$	Постоянные коэффициенты			
					$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
2	$2^2$	9	1	0,6667	0,1111	0,1667	0,5	0,25
3	$2^3$	15	1,215	0,73	0,0667	0,0913	0,2298	0,1250
4	$2^4$	25	1,414	0,8	0,04	0,05	0,125	0,0625
5	$2^{5-1}$	27	1,547	0,77	0,03704	0,0481	0,0871	0,0625
6	$2^{6-1}$	45	1,722	0,843	0,0222	0,0264	0,0564	0,03125
7	$2^{7-1}$	79	1,885	0,9	0,0127	0,0141	0,0389	0,0156
8	$2^{8-1}$	81	2,001	0,8889	0,0123	0,0139	0,0312	0,0156

Оценка  $\hat{b}_0$  рассчитывается по формуле (16)

$$\hat{b}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \tilde{Y}_i}{N} \quad (16)$$

где  $i = 1, 2, \dots; N = 9$  – количество опытов.

Для  $\hat{\alpha}_0$  в соответствии с формулой (6) имеем:

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{b}_0 - \beta \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_{n+1} \quad (17)$$

Оценки дисперсий коэффициентов определяются по формулам (18):

$$S_i^2 = \begin{cases} S^2 c_0, & i=0 \\ S^2 c_1, & i=1, \dots, n \\ S^2 c_2, & i=n+1, \dots, 2n \\ S^2 c_3, & i=2n+1, \dots, k \end{cases} \quad (18)$$

где  $S^2$  – оценка дисперсии ошибок наблюдений,

$$S^2 = \frac{S_R}{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^N (\tilde{Y}_i - \hat{Y}_i)^2}{N-k-1} \quad (19)$$

где  $k$  – количество коэффициентов  $\bar{\alpha}_i$ ,  $k = 5$

$\hat{Y}_i$  – то значение находится по уравнению регрессии (4)

Для  $\hat{\alpha}_0$  имеем:

$$S_{\hat{\alpha}_0}^2 = S^2(c_0 + n\beta^2 c_2) \quad (20)$$

### ***Задание на лабораторную работу:***

1. Составить матрицу планирования ортогонального центрально-композиционного плана для двух факторов с использованием дополнительного нулевого фактора ( $x_0=1$ ).
2. Провести эксперимент, повторив 5 раз опыты во всех точках факторного пространства (найти значения функции отклика  $Y$  согласно варианту, выданному преподавателем).
3. Проверить однородность дисперсии по критерию Кохрена и, если необходимо, подобрать такое  $m$  ( $m$  – кратность проведения опытов, не больше 5), чтобы дисперсия была однородной.
4. Найти коэффициенты уравнения регрессии для нормализованной системы координат.
5. С помощью критерия Стьюдента оценить значимость коэффициентов регрессии.
6. Проверить адекватность модели оригиналу с помощью критерия Фишера.

## Пример выполнения лабораторной работы

### 1. Матрица планирования ОЦКП для двух факторов с использованием дополнительного нулевого фактора ( $x_0=1$ )

Используя табл. 3 из теоретической части, составляем ОЦКП для двух факторов с использованием дополнительного нулевого фактора ( $x_0=1$ ), составим табл 1.1. Значения  $x_3, x_4, x_5$  рассчитываем по формулам:

$$\begin{aligned}x_3 &= (x_1)^2 \\x_4 &= (x_2)^2 \\x_5 &= x_1 \cdot x_2\end{aligned}$$

Таблица 1.1

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3 = (x_1)^2$	$x_4 = (x_2)^2$	$x_5 = x_1 \cdot x_2$
1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1
1	-1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	-1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0

Центрируем переменные квадратичных членов для обеспечения ортогональности.

По формуле (5) получаем:

$$\beta = \frac{1}{N} \sum X_{i5} = \frac{1}{9} \cdot (1+1+1+1+0+0+1+1+0) = \frac{6}{9} = 0,666667$$

где  $N = 9$  – число опытов.

Приведем пример расчета ( $x'_{i3}$ ) и ( $x'_{i4}$ ) для первой строчки:

$$\begin{aligned}(x'_1)^2 &= x_{11} - \beta = 1 - 0,666667 = 0,333333 \\(x'_2)^2 &= x_{21} - \beta = 1 - 0,666667 = 0,333333\end{aligned}$$

Используя найденные значения, составляем новую таблицу (табл. 1.2) для ОЦКП:

Таблица 1.2

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3 = (x_1)^2$	$x_4 = (x_2)^2$	$x_5 = x_1 * x_2$
1	-1	-1	0,333333	0,333333	1
1	1	-1	0,333333	0,333333	-1
1	-1	1	0,333333	0,333333	-1
1	1	1	0,333333	0,333333	1
1	-1	0	0,333333	-0,666667	0
1	1	0	0,333333	-0,666667	0
1	0	-1	-0,666667	0,333333	0
1	0	1	-0,666667	0,333333	0
1	0	0	-0,666667	-0,666667	0

Осуществляем проверку ортогональности переменных:

$$\sum (x'_{i3}) * (x'_{i4}) = 0$$

Пусть дана выборка результатов эксперимента, представленная показателем  $Y$ .

	$Y_{i1}$	$Y_{i2}$	$Y_{i3}$	$Y_{i4}$	$Y_{i5}$
$Y_{1j}$	3,004	3,031	3,035	3,039	3,001
$Y_{2j}$	5,193	5,152	5,177	5,209	5,151
$Y_{3j}$	3,927	3,950	3,936	3,898	3,897
$Y_{4j}$	7,141	7,099	7,111	7,138	7,097
$Y_{5j}$	4,684	4,697	4,688	4,730	4,729
$Y_{6j}$	9,135	9,123	9,166	9,134	9,117
$Y_{7j}$	6,371	6,403	6,343	6,339	6,337
$Y_{8j}$	14,672	14,680	14,695	14,668	14,672
$Y_{9j}$	5,828	5,847	5,842	5,905	5,886

## 2. Эксперимент во всех точках факторного пространства значение функции отклика $Y$

Для примера сделаем расчет для 1-ой строчки и посчитаем среднее значение функции отклика  $\tilde{Y}_j$ :

$$\tilde{Y}_j = \frac{\sum_{i=1}^v Y_{ij}}{v} = \frac{3,004+3,031+3,035+3,039+3,001}{5} = 3,022 \quad (16)$$

где  $v$ - кол-во выходных факторов

Посчитаем дисперсию для 1-ой строчки  $S_1^2$ :

$$S_j^2 = \frac{\sum_{l=1}^v (Y_{lj} - \tilde{Y}_j)^2}{v-1} \quad (17)$$

$$S_1^2 =$$

$$\frac{(3,004-3,022)^2+(3,031-3,022)^2+(3,035-3,022)^2+(3,039-3,022)^2+(3,001-3,022)^2}{5-1} = 0,000326$$

	$Y_{i1}$	$Y_{i2}$	$Y_{i3}$	$Y_{i4}$	$Y_{i5}$	$\tilde{Y}$	$S_j^2$
$Y_{1j}$	3,004	3,031	3,035	3,039	3,001	3,022	0,000326
$Y_{2j}$	5,193	5,152	5,177	5,209	5,151	5,1764	0,000645
$Y_{3j}$	3,927	3,95	3,936	3,898	3,897	3,9216	0,000551
$Y_{4j}$	7,141	7,099	7,111	7,138	7,097	7,1172	0,000444
$Y_{5j}$	4,684	4,697	4,688	4,73	4,729	4,7056	0,000498
$Y_{6j}$	9,135	9,123	9,166	9,134	9,117	9,135	0,000358
$Y_{7j}$	6,371	6,403	6,343	6,339	6,337	6,3586	0,000805
$Y_{8j}$	14,672	14,68	14,695	14,668	14,672	14,6774	0,000116
$Y_{9j}$	5,828	5,847	5,842	5,905	5,886	5,8616	0,001051

### 3. Проверка однородности по критерию Кохрена

Для проверки необходимо посчитать критерий Кохрена получаемый из данных по таблице

$$G = \frac{S_{max}^2}{\sum_j S_j^2} = \frac{0,001051}{0,00460857} = 0,219$$

где  $S_{max}^2 = 0,001051$

Критическое значение критерия Кохрена по таблице  $G_t=0,3584$   
(при  $G_t = N_y - 1 = 4$  – число степеней свободы).

Для того, чтобы дисперсия была однородной, выбираем  $m=5$   
(кратность проведения опытов).

Т.к.  $G < G_t$ , то дисперсия получилась однородной.

#### 4. Коэффициенты уравнения регрессии для нормализованной системы координат

Оценки коэффициентов регрессии рассчитываются по формулам (7-9) приведенных в теории:

Для линейных коэффициентов:

$$\bar{\alpha}_1 = 0,1667 * (-1 * 3,022 + 1 * 5,1764 - 1 * 3,9216 + 1 * 7,1172 - 1 * 4,7056 + 1 * 9,135) = 1,630226$$

$$\bar{\alpha}_2 = 0,1667 * (-1 * 3,022 - 1 * 5,1764 + 1 * 3,9216 + 1 * 7,1172 - 1 * 6,3586 + 1 * 14,6774) = 1,803354$$

Для центрированных квадратичных переменных:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_3 = & 0,5 * ([1 - 0,666667] * 3,022 + [1 - 0,666667] * 5,1764 + \\ & + [1 - 0,666667] * 3,9216 + [1 - 0,666667] * 7,1172 + [1 - 0,666667] * \\ & 4,7056 + [1 - 0,666667] * 9,135 + [0 - 0,666667] * 6,3586 + [0 - \\ & - 0,666667] * 14,6774 + [0 - 0,666667] * 5,8616 = -3,45291 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_4 = & 0,5 * ([1 - 0,666667] * 3,022 + [1 - 0,666667] * 5,1764 + \\ & + [1 - 0,666667] * 3,9216 + [1 - 0,666667] * 7,1172 + [0 - 0,666667] * \\ & 4,7056 + [0 - 0,666667] * 9,135 + [1 - 0,666667] * 6,3586 + [1 - \\ & - 0,666667] * 14,6774 + [0 - 0,666667] * 5,8616 = 0,144792 \end{aligned}$$

Для парных взаимодействий:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_5 = & 0,25 * (1 * 3,022 - 1 * 5,1764 - 1 * 3,9216 + 1 * 7,1172) = \\ = & 0,2603 \end{aligned}$$

Оценка  $\hat{b}_0$  рассчитывается по формуле (16)

$$\hat{b}_0 = \frac{3,022+5,1764+3,9216+7,1172+4,7056+9,135+6,3586+14,6774+5,8616}{9} = 6,663933$$

Подставим рассчитанные коэффициенты в уравнение регрессии (см. формулу 4) и получим значение  $\tilde{Y}_i$  (для примера сделаем расчет для 1 строки):

$$\tilde{Y}_1 = 6,663933 + 1,630226 * (-1) + 1,803354 * (-1) + (-3,45291 * 0,33333 + 0,144792 * 0,33333 + 0,2603 * 1) = 2,387958$$

	Y <sub>i1</sub>	Y <sub>i2</sub>	Y <sub>i3</sub>	Y <sub>i4</sub>	Y <sub>i5</sub>	$\tilde{Y}$	S <sub>j</sub> <sup>2</sup>	$\tilde{Y}_l$
Y <sub>1j</sub>	3,004	3,031	3,035	3,039	3,001	3,022	0,000326	2,387958
Y <sub>2j</sub>	5,193	5,152	5,177	5,209	5,151	5,1764	0,000645	5,12781
Y <sub>3j</sub>	3,927	3,95	3,936	3,898	3,897	3,9216	0,000551	5,474066
Y <sub>4j</sub>	7,141	7,099	7,111	7,138	7,097	7,1172	0,000444	9,255118
Y <sub>5j</sub>	4,684	4,697	4,688	4,73	4,729	4,7056	0,000498	3,78622
Y <sub>6j</sub>	9,135	9,123	9,166	9,134	9,117	9,135	0,000358	7,046672
Y <sub>7j</sub>	6,371	6,403	6,343	6,339	6,337	6,3586	0,000805	7,210784
Y <sub>8j</sub>	14,672	14,68	14,695	14,668	14,672	14,6774	0,000116	10,81749
Y <sub>9j</sub>	5,828	5,847	5,842	5,905	5,886	5,8616	0,001051	8,869346

Ошибка дисперсий ошибок наблюдений рассчитывается по формуле

(19):

$$S^2 = \frac{S_R}{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^N (\tilde{Y}_i * \hat{Y}_i)^2}{N-k-1}$$

$$S^2 = \frac{(3,022*2,387958)^2 + (5,151*5,12781)^2 + (3,897*5,474066)^2 + (7,097*9,255118)^2 + (4,729*3,78622)^2 + (9,117*7,04667)^2 + (6,337*7,21078)^2 + (14,672*10,81749)^2 + (5,886*8,869346)^2}{9-5-1}$$

$$= \frac{39970,66}{3} = 13323,55$$

Оценка  $\hat{\alpha}_0$  в соответствии с формулой (6) имеем:

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{b}_0 - \beta \sum_{i=1}^n \hat{\alpha}_{n+1}$$

$$\hat{\alpha}_0 = 6,663933 - 0,666667 * (1,630226 + 1,803354 - 3,45291 + 0,144792 + 0,2603) = 6,046758$$

## 5. Оценка значимости коэффициентов регрессии

Дисперсия воспроизводимости рассчитывается по формуле (18):

$$S_i^2 = \begin{cases} S^2 c_0, & i=0 \\ S^2 c_1, & i=1, \dots, n \\ S^2 c_2, & i=n+1, \dots, 2n \\ S^2 c_3, & i=2n+1, \dots, k \end{cases}$$

$$S_1^2 = 13323,55 * 0,1111 = 1480,247$$

$$S_2^2 = 13323,55 * 0,1667 = 2221,036$$

$$S_3^2 = 13323,55 * 0,5 = 6661,776$$

$$S_4^2 = 13323,55 * 0,25 = 3330,888$$

## **6. Проверка адекватности модели с помощью критерия Фишера**

Остаточная дисперсия:

$$S_{\text{ост}}^2 = \frac{\sum(Y_{i4} - Y_{i5})^2}{N - L} = 0,00179$$

где L – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии

$$F = \frac{S_R^2}{S^2} = \frac{39970,66}{13323,55} = 3; F_t = 6,39 \text{ (по таблице при уровне значимости } 0,05\text{)}.$$

Так как расчётное значение  $F=3$  меньше табличного  $F=8,79$  то модель считается адекватной.

### ***Выводы по работе***

Были рассмотрены теоретические сведения о планах второго порядка, ЦКП и ОЦКП. Была составлена матрица ОЦКП, найдены значения функции отклика  $Y$ , вычислены коэффициенты уравнения регрессии, проведена проверка адекватности модели по критериям Кохрена, Стьюдента, Фишера. Полученная модель адекватна.

### ***Содержание и оформление отчета***

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Задание.
4. Расчетная часть.
5. Вывод.

6. Ответы на контрольные вопросы.
7. Выводы по лабораторной работе.

### *Контрольные вопросы*

1. Почему в планах второго порядка возрастает минимально необходимое количество точек в спектре плана? Как определяется число членов квадратичной модели?
2. В каких случаях используют квадратичную модель объекта?
3. Дайте определение ЦКП.
4. Цель натурализации уравнения регрессии.
5. Определение ОЦКП. Каким образом для ОЦКП выбирается числовое значение  $\alpha$  (звездного плеча).

### *Литература*

1. ГОСТ 24026-80. Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения.
2. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий [Текст]/ Ю.П.Адлер, Е.В.Маркова, Ю.В.Грановский.– М.Наука,1976– 280с.
3. Володарский, Е.Т. Планирование и организация измерительного эксперимента [Текст] / Б.Н. Малиновский, Ю.М. Туз. – К. Высш.шк.,1987.

Вариант 1					Вариант 6				
3,004	3,031	3,035	3,039	3,001	4,292	4,285	4,333	4,304	4,277
5,193	5,152	5,177	5,209	5,151	8,385	8,390	8,404	8,421	8,390
3,927	3,950	3,936	3,898	3,897	5,881	5,886	5,847	5,900	5,909
7,141	7,099	7,111	7,138	7,097	13,349	13,332	13,357	13,342	13,356
4,684	4,697	4,688	4,730	4,729	7,389	7,368	7,439	7,419	7,442
9,135	9,123	9,166	9,134	9,117	20,252	20,271	20,271	20,258	20,310
6,371	6,403	6,343	6,339	6,337	11,282	11,269	11,293	11,249	11,254
14,672	14,680	14,695	14,668	14,672	66,571	66,613	66,562	66,585	66,620
5,828	5,847	5,842	5,905	5,886	7,379	7,415	7,415	7,368	7,368
Вариант 2					Вариант 7				
3,651	3,605	3,653	3,592	3,627	4,307	4,284	4,284	4,316	4,286
6,547	6,514	6,535	6,562	6,581	8,387	8,396	8,430	8,389	8,404
4,761	4,793	4,816	4,792	4,801	5,832	5,873	5,856	5,843	5,862
9,515	9,566	9,534	9,552	9,528	13,329	13,304	13,328	13,340	13,312
5,828	5,847	5,842	5,905	5,886	7,379	7,415	7,415	7,368	7,368
13,041	13,081	13,051	13,089	13,063	20,255	20,278	20,304	20,279	20,261
8,364	8,371	8,338	8,365	8,366	11,226	11,238	11,271	11,234	11,273
25,575	25,563	25,611	25,578	25,534	66,599	66,605	66,588	66,595	66,562
5,081	5,148	5,123	5,092	5,073	13,040	13,011	13,045	13,061	13,036
Вариант 3					Вариант 8				
2,124	2,150	2,139	2,140	2,157	3,583	3,605	3,623	3,623	3,587
3,382	3,394	3,368	3,374	3,372	6,555	6,564	6,523	6,559	6,511
2,705	2,652	2,655	2,674	2,713	4,795	4,790	4,776	4,798	4,744
4,307	4,242	4,276	4,317	4,255	9,504	9,530	9,524	9,557	9,530
3,107	3,089	3,096	3,119	3,137	5,855	5,839	5,827	5,881	5,863
5,081	5,148	5,123	5,092	5,073	13,040	13,011	13,045	13,061	13,036
3,948	3,901	3,914	3,951	3,919	8,328	8,301	8,303	8,319	8,310
6,873	6,920	6,932	6,858	6,869	25,586	25,544	25,578	25,562	25,556
6,718	6,752	6,760	6,709	6,743	4,701	4,682	4,690	4,718	4,719
Вариант 4					Вариант 9				
2,588	2,597	2,542	2,537	2,539	3,054	3,032	3,024	3,046	3,019
4,191	4,165	4,152	4,129	4,138	5,147	5,170	5,178	5,190	5,177
3,201	3,231	3,202	3,199	3,248	3,926	3,895	3,937	3,931	3,915
5,509	5,453	5,448	5,511	5,445	7,117	7,121	7,101	7,130	7,091
3,793	3,830	3,850	3,789	3,852	4,701	4,682	4,690	4,718	4,719
6,718	6,752	6,760	6,709	6,743	9,150	9,159	9,115	9,162	9,156
4,963	4,966	5,001	4,952	5,007	6,390	6,383	6,384	6,378	6,378
9,738	9,753	9,702	9,746	9,737	14,677	14,670	14,718	14,690	14,693
7,094	7,126	7,149	7,102	7,158	6,721	6,714	6,741	6,704	6,722
Вариант 5					Вариант 10				
3,072	3,028	3,080	3,049	3,069	2,549	2,537	2,563	2,564	2,569
5,193	5,159	5,163	5,220	5,168	4,118	4,164	4,155	4,126	4,151
3,932	3,955	3,893	3,915	3,939	3,236	3,220	3,202	3,212	3,207
7,094	7,126	7,149	7,102	7,158	5,445	5,485	5,449	5,472	5,455
4,740	4,704	4,668	4,698	4,724	3,825	3,812	3,790	3,782	3,781
9,163	9,167	9,160	9,133	9,191	6,721	6,714	6,741	6,704	6,722
6,336	6,396	6,369	6,405	6,357	4,951	4,989	4,955	4,941	4,981
14,676	14,668	14,725	14,722	14,741	9,735	9,693	9,705	9,711	9,726
8,385	8,390	8,404	8,421	8,390	3,950	3,932	3,908	3,935	3,901

Вариант 11					Вариант 16				
2,164	2,165	2,145	2,150	2,163	8,346	8,241	8,242	8,247	8,244
3,347	3,338	3,322	3,318	3,358	12,352	12,398	12,478	12,318	12,308
2,639	2,658	2,651	2,648	2,670	10,205	10,080	10,088	10,179	10,137
4,281	4,251	4,296	4,276	4,269	15,282	15,299	15,269	15,304	15,286
3,086	3,084	3,081	3,122	3,068	11,551	11,514	11,569	11,657	11,584
5,082	5,128	5,117	5,106	5,078	17,731	17,736	17,781	17,709	17,863
3,950	3,932	3,908	3,935	3,901	14,306	14,165	14,262	14,254	14,173
6,855	6,870	6,875	6,872	6,907	22,574	22,715	22,599	22,579	22,569
2,788	2,823	2,815	2,777	2,773	10,008	9,906	9,798	10,097	10,073
Вариант 12					Вариант 17				
1,983	1,951	1,969	1,981	1,935	8,439	7,904	8,440	8,473	7,916
3,004	3,024	2,984	2,983	3,007	10,523	10,650	10,778	10,273	10,631
2,435	2,415	2,428	2,394	2,438	9,401	9,168	9,534	9,249	9,306
3,767	3,794	3,784	3,783	3,803	12,016	11,721	12,006	11,744	11,798
2,788	2,823	2,815	2,777	2,773	10,008	9,906	9,798	10,097	10,073
4,491	4,467	4,492	4,473	4,460	13,110	12,540	12,915	13,047	13,016
3,485	3,510	3,515	3,524	3,475	11,395	11,397	11,313	11,461	11,254
5,883	5,879	5,863	5,870	5,877	14,120	14,376	14,486	14,175	13,952
5,083	5,076	5,136	5,098	5,140	19,269	19,440	19,031	18,838	19,042
Вариант 13					Вариант 18				
2,132	2,114	2,160	2,146	2,120	7,939	7,903	7,980	7,619	7,750
3,373	3,324	3,377	3,327	3,385	12,365	12,356	12,004	12,037	12,409
2,708	2,645	2,657	2,645	2,657	9,792	9,514	10,072	9,910	9,676
4,277	4,254	4,311	4,288	4,265	15,647	15,711	15,912	15,556	15,911
3,075	3,074	3,090	3,099	3,096	11,327	11,583	11,094	11,421	11,074
5,083	5,076	5,136	5,098	5,140	19,269	19,440	19,031	18,838	19,042
3,978	3,928	3,905	3,948	3,904	14,245	14,808	14,494	14,786	14,449
6,898	6,908	6,887	6,940	6,904	26,177	26,630	26,707	26,237	26,481
3,781	3,808	3,820	3,814	3,842	6,612	6,613	6,563	6,598	6,575
Вариант 14					Вариант 19				
2,567	2,587	2,585	2,527	2,583	3,759	3,709	3,745	3,768	3,740
4,148	4,183	4,155	4,144	4,169	4,828	4,801	4,845	4,845	4,845
3,234	3,259	3,216	3,240	3,200	4,243	4,253	4,242	4,300	4,275
5,458	5,485	5,490	5,513	5,469	5,476	5,432	5,414	5,446	5,482
3,781	3,808	3,820	3,814	3,842	4,661	4,678	4,677	4,610	4,658
6,713	6,722	6,750	6,751	6,700	5,864	5,887	5,867	5,861	5,890
4,998	4,949	4,950	4,947	4,968	5,217	5,236	5,236	5,268	5,215
9,758	9,689	9,701	9,711	9,686	6,612	6,613	6,563	6,598	6,575
9,178	9,194	9,157	9,159	9,121	4,125	4,147	4,105	4,153	4,152
Вариант 15					Вариант 20				
3,073	3,033	3,062	3,065	3,029	2,872	2,904	2,841	2,888	2,896
5,191	5,186	5,221	5,156	5,198	3,540	3,561	3,517	3,517	3,510
3,884	3,932	3,929	3,914	3,899	3,213	3,183	3,223	3,199	3,229
7,152	7,165	7,179	7,100	7,143	3,863	3,870	3,884	3,864	3,904
4,743	4,740	4,683	4,675	4,699	3,444	3,452	3,439	3,428	3,424
9,178	9,194	9,157	9,159	9,121	4,125	4,147	4,105	4,153	4,152
6,404	6,370	6,341	6,340	6,393	3,810	3,779	3,755	3,803	3,759
14,701	14,690	14,734	14,754	14,674	4,532	4,477	4,472	4,505	4,513
10,205	10,080	10,088	10,179	10,137	2,093	1,849	2,345	2,476	2,130