

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I”

Кафедра «Высшая математика»

А.А. Костроминов

Задание
для контрольной работы
по дисциплине
«МАТЕМАТИКА» (Б1.О.7)

для специальности
23.05.05 «Системы обеспечения движения поездов»
по специализациям:
«Автоматика и телемеханика на железнодорожном транспорте»
«Телекоммуникационные системы и сети железнодорожного
транспорта»
«Электроснабжение железных дорог»
Форма обучения – очная, заочная

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3 – ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Санкт-Петербург 2020

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами чёрного или синего цвета, оставляя поля для замечаний рецензента.
2. В конце работы должна быть оставлена чистая страница для развернутой рецензии или исправлений.
3. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный шифр, название дисциплины, номер контрольной работы. Здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и адрес электронной почты студента.
4. Из предложенного задания студент должен выполнить задачи, у которых последняя цифра после номера задачи и точки совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Например, для студента имеющего шифр 12-АС-143, контрольная работа может содержать задачи № 1.03, 13.03, 19.03 и т. д.
5. Решения задач следует располагать в порядке возрастания номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
6. Приступая к выполнению контрольной работы, предварительно изучается соответствующий раздел теории. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. Решение задач следует приводить подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя по ходу решения свои действия. Обязательна нумерация страниц. Каждая задача должна начинаться с новой страницы.
7. Контрольная работа допускается к защите, если она содержит десять (и более) полностью и правильно решенных задач. Контрольная работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее десяти решенных задач.
8. Отсканированные копии или качественные цифровые фото (достаточный объём- 1Мб) рукописно выполненных контрольных работ с титульными листами высылаются электронной почтой по адресу проверяющего преподавателя (см. в СДО).
9. Контрольная работа должна поступить в университет для проверки не позднее, чем за 15 дней до экзамена.
10. Если рецензент установил, что работа выполнена несамостоятельно, студенту выдается новое индивидуальное задание.
11. Получив рецензию на контрольную работу, студент должен в этой же тетради на чистых страницах сделать работу над ошибками, руководствуясь замечаниями рецензента. Если контрольная работа не была зачтена, ее необходимо сдать на повторную проверку. Если работа допу-

щена к защите, то студент получает по электронной почте уведомление об этом, регистрационный номер и контрольные вопросы.

12. Студент может сдавать экзамен только при наличии у него всех контрольных работ, предусмотренных учебным планом, с выводом рецензента “допущен к экзамену” и при условии отсутствия задолженностей по математике за предыдущие семестры.
13. На экзамене студент, кроме ответов на теоретические вопросы, защищает свои контрольные работы, отвечая на вопросы и решая аналогичные задачи.
14. Студенты специализаций: АС, АТ, ЭС на втором курсе в первом семестре изучают теоретический материал модуля 5 и модуля 6 рабочей программы, выполняют и защищают контрольную работу № 3, и сдают экзамен.

Во втором семестре студенты изучают теоретический материал модуля 7 и модуля 8 рабочей программы, выполняют и защищают контрольную работу № 4, и сдают экзамен.

Контрольная работа № 3

Контрольная работа № 3 состоит из 12 задач. Контрольная работа допускается к защите, если она содержит шесть (и более) полностью и правильно решенных задач. Контрольная работа не проверяется и не рецензируется, если в ней содержится менее шести решенных задач.

Задача 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1.01. а) $a_n = \frac{1}{4n+1}$.

б) $a_n = \frac{3n-2}{2^n}$.

1.02. а) $a_n = \frac{2}{n^2}$.

б) $a_n = \frac{n^2+2}{3^n}$.

1.03. а) $a_n = \frac{1}{n-1}$.

б) $a_n = \frac{n+3}{4^n}$.

1.04. а) $a_n = \frac{n+1}{3n^2+2}$.

б) $a_n = \frac{1}{2^n}$.

1.05. а) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.

б) $a_n = \frac{2n}{(n^3+1)7^n}$.

$$1.06. \text{ a) } a_n = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{n^5}{n^2 + 3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

$$1.07. \text{ a) } a_n = \frac{n+1}{n+3}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{n \cdot 2^n}{n^2 + 5}.$$

$$1.08. \text{ a) } a_n = \frac{n+1}{3n+5}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{n^2 3^n}{n+2}.$$

$$1.09. \text{ a) } a_n = n.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{n^2 + 2}{3n - 1} 4^n.$$

$$1.10. \text{ a) } a_n = \frac{1}{n^3 - 1}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{n^4 + 2}{n^3} 5^n.$$

Задача 2. Определить, абсолютно или условно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$2.01. \text{ a) } a_n = (-1)^n \cdot n.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{n^2 + 2n + 2}.$$

$$2.02. \text{ a) } a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n^2 + 5)}{n^3 + 3n}.$$

$$2.03. \text{ a) } a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(5n^2 + 4)}{3(n+2)^3}.$$

$$2.04. \text{ a) } a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(3n^4 + n^2)}{n^5 + n + 1}.$$

$$2.05. \text{ a) } a_n = (-1)^n 3^n.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(5n+6)}{(2n+1)^2}.$$

$$2.06. \text{ a) } a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(9n^2 + 4)}{6n^3 + 5n - 2}.$$

$$2.07. \text{ a) } a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(6n^3 - 5)}{2n^5 + 3n^3 + n}.$$

$$2.08. \text{ a) } a_n = (-1)^n \frac{1}{n^4}.$$

$$\text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(7n+2)}{4n^3 + 5n^2 + 3}.$$

$$2.09. \text{ a) } a_n = (-1)^n \frac{1}{10^n}. \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n^2 + 3)}{4n^5 + 29}.$$

$$2.10. \text{ a) } a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}. \quad \text{б) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}(3n + 2)}{2n^5 + 9}.$$

Задача 3. Решить задачу Коши.

$$3.01. \text{ a) } y' = \frac{5}{2x+3}, \quad y(-1) = 1.$$

$$\text{б) } y'' = 3x^2 - x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$3.02. \text{ a) } y' = \frac{10}{1+x^2}, \quad y(0) = 1.$$

$$\text{б) } y'' = \sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$3.03. \text{ a) } y' = \frac{11}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 1.$$

$$\text{б) } y'' = 2x - 5, \quad y(1) = 7, \quad y'(1) = 3.$$

$$3.04. \text{ a) } y' = 3e^x + 1, \quad y(0) = 1.$$

$$\text{б) } y'' = \frac{x}{6} + \sin x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

$$3.05. \text{ a) } y' = \frac{11}{x-4}, \quad y(5) = 1.$$

$$\text{б) } y'' = x^3 + 2x - 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$3.06. \text{ a) } y' = \frac{5}{\cos^2 2x}, \quad y(0) = 3.$$

$$\text{б) } y'' = \cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$3.07. \text{ a) } (x+1)dx + ydy = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$\text{б) } y'' = 2x^2 - 3x + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$3.08. \text{ a) } (x^2 + 3)dx + dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$\text{б) } y'' = 6x + x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

$$3.09. \text{ a) } \frac{dx}{x} - 2dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

$$\text{б) } y'' = \sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

3.10. а) $3x^3 dx = 2x^2 dy$, $y(1) = 2$.
 б) $y'' = 7x + 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Задача 4. Составить таблицу численного решения методом Эйлера дифференциального уравнения $dy/dx=f(x,y)$ при начальном условии $y(x_0)=y_0$ на отрезке $[a,b]$ с шагом h . По полученным данным построить интегральную кривую.

Задачи	$f(x,y)$	$[a,b]$	x_0	y_0	h
4.01.	$(1/y-2y)/(4x+2)$	$[2,4]$	2	1	0.2
4.02.	$(3/y-y)/(2x+3)$	$[2,3]$	2	2	0.1
4.03.	$(1/y-3y)/(6x+4)$	$[3,5]$	3	2	0.2
4.04.	$(2/y-2y)/(4x+5)$	$[1,2]$	1	3	0.1
4.05.	$(6/y-y)/(2x+6)$	$[1,3]$	1	6	0.2
4.06.	$(2/y-3y)/(6x+7)$	$[2,3]$	2	4	0.1
4.07.	$(1/y-2y)/(4x+1)$	$[2,4]$	2	2	0.2
4.08.	$(2/y-y)/(2x+2)$	$[2,3]$	2	1	0.1
4.09.	$(1/y-3y)/(6x+2)$	$[3,5]$	3	1	0.2
4.10.	$(2/y-2y)/(4x+4)$	$[1,2]$	1	2	0.1

Задача 5. Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений.

5.01.

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

б) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

в) $y'' + y = 0$.

5.02.

а) $y'' - 5y' - 6y = 0$,

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$,

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

5.03.

а) $y'' + y' - 6y = 0$,

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

в) $y'' + 4y = 0$.

5.04.

а) $y'' - 8y' + 25y = 0$,

б) $y'' + 5y' + 6y = 0$,

в) $y'' - 2y' + y = 0$.

5.05.

а) $y'' + 3y' = 0$,

б) $y'' - 8y' + 16y = 0$,

в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

5.06.

а) $y'' - 5y = 0$,

б) $y'' - 14y' + 49y = 0$,

в) $y'' + 9y = 0$

5.07.

а) $y'' + 5y' - 6y = 0$,

б) $y'' + 12y' + 36y = 0$,

в) $y'' + 4y' + 8y = 0$.

5.08.

а) $y'' + 5y' + 4y = 0$,

б) $y'' + 22y' + 121y = 0$,

в) $y'' + 16y = 0$.

5.09.

а) $y'' - 5y' + 4y = 0$,

б) $y'' - 26y' + 169y = 0$,

в) $y'' - 4y' + 8y = 0$.

5.10.

а) $y'' - 100y = 0$,

б) $y'' + 14y' + 49y = 0$,

в) $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Задача 6. Найти общее решение дифференциальных уравнений.

6.01. а) $(2y+1)\sin^2x dy + 5y dx = 0$;

б) $y' \sin x + y \cos x = 2x$.

6.02. а) $(x+2)\cos^2(2y) dx + 3x dy = 0$;

б) $xy' - 2y = x^4 \cos x$.

6.03. а) $3y dx - (y+3)\operatorname{tg}(2x) dy = 0$;

б) $y'x - y = x^3 e^x$.

6.04. а) $2x dy - (2x+1)\operatorname{tg}(3y) dx = 0$;

б) $xy' + x^2 = 3y$.

6.05. а) $(5y-2)\operatorname{tg}(7x) dy - 2y dx = 0$;

б) $xy' - y = 5x^2 \cos(3x)$.

6.06. а) $(2x^2-5)\operatorname{ctg}(4y) dx + 3x dy = 0$;

б) $x dy = (2x \ln x - y) dx$.

6.07. а) $-3y dx + (y^2-3y)\cos^2(6x) dy = 0$;

б) $(x \ln x - y) dx + x dy = 0$.

6.08. а) $(y^2-3)e^x dy - 5y dx = 0$;

б) $xy' - y = 2 \ln x$.

6.09. а) $-5x dy + (x^2-x)\sin^2(3y) dx = 0$;

б) $y' - y = 4x e^x$.

6.10. а) $2x dy + (x^2-4)e^y dx = 0$;

б) $xy' - 3y = x^5 \sin(2x)$.

Задача 7. Решить задачу Коши.

7.01. а) $y' = (2x+3)/(4y+5)$, $y(0)=1$;

б) $(y-2x+3)dx + (x-y+3)dy = 0$, $y(1)=2$.

7.02. а) $y' = (3x+4)/(2y+5)$, $y(0)=2$;

б) $(4x+2y+3)dx + (2x+2y+2)dy = 0$, $y(1)=1$.

7.03. а) $y' = (4x+3)/(3y+1)$, $y(0)=1$;

б) $(2y-3x+1)dx + (2x-y+2)dy = 0$, $y(1)=0$.

7.04. а) $y'(2y+3) = 2x+5$, $y(0)=1$;

б) $(x-2y+3)dx + (3y-2x+4)dy = 0$, $y(1)=2$.

- 7.05. а) $y'(7y-2)=2x+3$, $y(0)=2$;
 б) $(x+4y+3)dx+(4x-y+2)dy=0$, $y(1)=1$.
- 7.06. а) $y'=(2x-3)/(2y+8)$, $y(1)=1$;
 б) $(3y-2x-2)dx+(3x-3y+2)dy=0$, $y(0)=2$.
- 7.07. а) $y'=(6x+5)/(4y+3)$, $y(1)=2$;
 б) $(3x-2y+3)dx+(4y-2x-1)dy=0$, $y(0)=1$.
- 7.08. а) $y'=(4x-1)/(2y+5)$, $y(1)=0$;
 б) $(4y-3x+2)dx+(4x-3y+2)dy=0$, $y(0)=2$.
- 7.09. а) $y'(3y-7)=x+4$, $y(1)=1$;
 б) $(4x-y+6)dx+(3-x-2y)dy=0$, $y(0)=1$.
- 7.10. а) $y'(y-2)=5x+3$, $y(1)=2$;
 б) $(2y-2x+3)dx+(2x-y+5)dy=0$, $y(0)=2$.

Задача 8. Найти общие решения дифференциальных уравнений.

- 8.01. а) $y''=y'/x$, б) $y''+4y=1/\sin(2x)$.
 8.02. а) $xy''+1=y'$, б) $y''+9y=1/\cos(3x)$.
 8.03. а) $2y'+xy''=0$, б) $y''-6y'+9y=e^{3x}/x$.
 8.04. а) $xy''+y'=4x$, б) $y''+16y=\cos 4x/\sin^2 4x$.
 8.05. а) $(1+x^2)y''+2xy'=0$, б) $y''-2y'+y=e^x/x$.
 8.06. а) $xy''+x+y'=0$, б) $y''+y=1/\sin^3 x$.
 8.07. а) $y''-y'/x=x^3$, б) $y''+y=1/\cos^2 x$.
 8.08. а) $yy''=(y')^2$, б) $y''-2y'+y=e^x/(9+x^2)$.
 8.09. а) $x^3y''+x^2y'=1$, б) $y''-4y'+4y=e^{2x}/x^3$.
 8.10. а) $xy''-y'=2x^2$, б) $y''+y=1/\cos^3 x$.

Задача 9. Решить задачу Коши.

- 9.01. а) $y''+4y'+4y=4x^2+4x+6$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
 б) $y''-5y'+6y=-e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
- 9.02. а) $y''+2y'+5y=5x^2+2x+7$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.
 б) $y''-y'=e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

- 9.03. а) $y''+y'=2x+3$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''-6y'+8y=3e^x$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 9.04. а) $y''-y'=-2x+1$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''-4y'+3y=-3e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 9.05. а) $y''-2y'=-4x$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''-2y'+y=-e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 9.06. а) $y''+2y'=4x+4$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''+4y'+4y=9e^x$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 9.07. а) $y''-3y'=-6x-1$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''-6y'+9y=4e^x$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 9.08. а) $y''-5y'+6y=6x^2-5x+8$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''-2y'=2e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 9.09. а) $y''+2y'+y=4x^2+2x+3$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''+2y'=-e^{-2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.
- 9.10. а) $y''+6y'+9y=9x^2+6x+11$, $y(0)=1, y'(0)=0$.
 б) $y''+3y'+2y=-e^{2x}$, $y(0)=0, y'(0)=0$.

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- 10.01. $y''-2y'=(x+1)e^{2x}+2xe^{3x}$. 10.02. $y''+y=x\sin x$.
 10.03. $y''+4y=\sin^2 x$. 10.04. $y''+4y'+4y=x^2e^{2x}$.
 10.05. $y''+2y'+5y=x\cos 2x$. 10.06. $y''-5y'+4y=3x^2e^{4x}$.
 10.07. $y''+9y=x\cos 3x$. 10.08. $y''+6y'+9y=x^2e^{-3x}$.
 10.09. $y''+2y'-3y=xe^{-3x}+4xe^{2x}$. 10.10. $y''+2y'-3y=x^2e^{-3x}+xe^{3x}$.

Задача 11.

11.01. Локомотив уменьшил скорость с 10 м/с до 5 м/с за 60 с. Полагая силу торможения пропорциональной квадрату скорости движения локомотива, определить время, необходимое для достижения скорости 2 м/с.

11.02. Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его количеству. Определить, какая часть вещества останется через 200 лет, если период полураспада составляет 1600 лет.

11.03. Заряженный конденсатор теряет заряд по причине несовершенства изоляции со скоростью пропорциональной наличному заряду. Определить время, через которое конденсатор разрядится на 75%, если на 50% он разряжается за 3 ч.

11.04. В сосуде 100 л водного раствора соли. В сосуд втекает чистая вода со скоростью 5 л/мин, а смесь вытекает с той же скоростью, причем перемешивание обеспечивает равномерную концентрацию раствора. В начальный момент в растворе содержалось 10 кг соли. Сколько соли будет содержаться в сосуде через 20 мин после начала процесса?

11.05. Через щель в дне цилиндрического резервуара вытекает жидкость. В течение первых суток вытекло 20% жидкости. Определить время, через которое из резервуара вытечет половина всей жидкости, если скорость истечения пропорциональна уровню жидкости в резервуаре.

11.06. Подогреватель, имея начальную температуру 100°C , охлаждается в среде с температурой 20°C . Скорость охлаждения пропорциональна разности температур подогревателя и окружающей среды. Через какое время подогреватель охладится до 30°C , если за 20 мин его температура снизилась до 60°C ?

11.07. Моторная лодка двигалась в спокойной воде со скоростью 12 км/ч. Через 10 с после выключения мотора скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости движения лодки. Найти скорость лодки через одну минуту после остановки мотора.

11.08. Пуля, двигаясь со скоростью 400 м/с, ударяется о достаточно толстую стену и начинает углубляться в нее. При этом сила сопротивления стены придает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату ее скорости с коэффициентом пропорциональности 7 м^{-1} . Найти скорость пули через 0.001 с после вхождения ее в стену.

11.09. Конденсатор колебательного контура, состоящего из индуктивности L , емкости C и сопротивления R , заряжен до напряжения U_0 . Как меняется напряжение U на конденсаторе в процессе его разрядки?

11.10. Материальная точка движется под действием постоянной силы, сообщающей точке ускорение a . Сопротивление окружающей среды пропорционально скорости движения точки. С какой скоростью будет двигаться точка через 20 мин, если в начальный момент она находилась в покое?

Задача 12. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$12.01. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$12.02. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$$

$$12.03. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + y \end{cases}$$

$$12.04. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y \end{cases}$$

$$12.05. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

$$12.06. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$$

$$12.07. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases}$$

$$12.08. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$

$$12.09. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 3y \end{cases}$$

$$12.10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$$