

Математическое моделирование логистических систем

Методические указания
к выполнению практических и самостоятельных работ

2023

Общие положения

На основе теории массового обслуживания решаются задачи, связанные с оптимизацией процессов обслуживания на железнодорожном и автомобильном транспорте, также является основой проектирования и анализа систем массового обслуживания. К системам массового обслуживания относятся: вагонные депо; кассы продажи пассажирских билетов; железнодорожные станции; информационные системы, погрузочно-разгрузочные пункты и т.д.

Данные методические указания содержат две практические работы, которые состоят из кратких теоретических сведений, примеров решения типовых задач, контрольных вопросов, в Приложении А представлены варианты заданий. После изучения теоретических основ обучающийся выполняет контрольные задания. Также приведены вопросы для самостоятельной работы.

В первой практической работе проводится исследование потоков требований в транспортных системах и определение показателей распределения случайной величины.

Во второй практической работе проводится моделирование систем массового обслуживания: с отказами, с неограниченной длиной очереди, с ограниченной длиной очереди.

Тема 1. Элементы теории математической статистики в исследованиях транспортных потоков и систем

Цель занятия: 1 Знакомство с потоками требований
2 Определение показателей распределения случайной величины

Краткие теоретические сведения

1 Понятие случайной величины

Случайной называется такая величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, заранее неизвестное. Различают случайные величины дискретные и непрерывные.

Дискретные величины могут принимать только определенные, отделенные друг от друга значения. Например, количество вагонов в отцепе может принимать только значения целых положительных чисел.

К дискретным можно отнести следующие величины:

- число вагонов в составах;
- число отцепов в составах;
- число вагонов какого-либо назначения, прибывающих на станцию за сутки;
- число поездов, прибывающих на станцию за какой-либо период времени;
- число автомашин, прибывающих на грузовой двор за какой-либо период T .

К непрерывным относят случайные величины, возможные значения которых непрерывно заполняют некоторый промежуток. Например, вес вагона может принять любое значение на участке от минимального до максимального значения. К непрерывным можно отнести следующие величины:

- интервалы между прибывающими поездами;
- вес поезда;
- время движения поезда по перегону;
- простой поезда на станции.

Случайная величина в результате опыта может принимать то или иное значение. Соотношение, устанавливающее зависимость между значениями случайной величины и соответствующими веро-

ятностями, называется законом распределения случайной величины, о которых поговорим ниже.

2 Потоки требований

Исследование транспортных процессов и систем базируется на математической статистике и теории массового обслуживания. В теории массового обслуживания для изучения процессов, протекающих в системе, необходимы данные о потоке требований. *Потоком требований (событий)* называется последовательность однородных требований, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; прибытие поездов на станцию; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ и т.п.

В транспортных системах наиболее часто встречаются следующие виды потоков:

1 Регулярный поток, в котором требования поступают с определенными строго выполняемыми интервалами (например, поток пригородных и пассажирских поездов при строгом выполнении графика движения и т.д.).

2 Простейший поток – поток, удовлетворяющий следующим условиям:

- отсутствие последствий, что означает независимость вероятностных характеристик потока от предыдущих событий, т.е. вероятность поступления k требований в промежуток $[t_1, t_2]$ зависит от числа, времени поступления и длительности обслуживания требований до момента t_1 ;

- стационарность, т.е. для любого числа k требований, поступивших за промежуток времени длиной Δt , вероятность поступления требований зависит только от величины промежутка и не зависит от его расположения на оси времени;

- ординарность, что означает практическую невозможность группового поступления требований. Поэтому поток требований можно назвать ординарным тогда, когда вероятность поступления двух или более требований за любой бесконечно малый промежуток времени Δt есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем Δt .

Число требований, поступающих за какой-либо период времени в этом потоке, имеет пуассоновское распределение, а интервалы между требованиями распределены по показательному закону.

Ведущая функция случайного потока $x \in (0, t)$ есть математическое ожидание числа требований в промежутке $[0, t)$. Функция $x \in (0, t)$ – неотрицательная, неубывающая и в практических задачах теории распределения информации непрерывна и принимает только конечные значения.

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящееся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = const$; для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Потоки требований различают по многим видам, но мы рассмотрим наиболее встречающиеся, а именно простейшие потоки и их модификации, потоки Пальма и потоки Эрланга.

Простейшие потоки. Вероятность поступления k требований за промежутки времени t в простейшем потоке определяется из выражения:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ (при } t > 0), \quad (2)$$

где $\lambda = 1/M[T]$ – величина, обратная среднему значению интервала T .

Математическое ожидание M , дисперсия D и среднеквадратическое отклонение σ промежутка T соответственно:

$$M = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda; \quad (3)$$

$$D = \int_0^{\infty} t^2 p(t) dt - M^2 = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2; \quad (4)$$

$$\sigma = \sqrt{D} = 1/\lambda. \quad (5)$$

Полученное совпадение величин M и σ характерно для показательного распределения. Это свойство на практике используют как критерий для первоначальной проверки соответствия гипотезы о показательном распределении полученным статистическим данным.

Пуассоновский поток с возможной нестационарностью – поток, обладающий свойствами ординарности, отсутствием последействия и имеющий в каждый момент времени t конечное мгновенное значение параметра $\lambda(t)$.

Мгновенная интенсивность нестационарного пуассоновского потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t+\Delta t)$, к длине Δt этого интервала, когда $\Delta t \rightarrow 0$. Среднее число событий, наступающих в интервале времени τ , следующем непосредственно за моментом t_0 :

$$\Delta(t_0, t_0 + \tau) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt. \quad (6)$$

Если поток событий стационарный:

$$\Delta(t_0, t_0 + \tau) = \Delta(\tau) = \lambda \tau. \quad (7)$$

Тогда вероятность наступления k требований для рассматриваемого вида потока примет следующий вид:

$$P_k(t_0, \tau) = \frac{(\Delta(t_0, \tau))^k}{k!} e^{-\Delta(t_0, \tau)}. \quad (8)$$

Стационарный, ординарный поток с возможным последствием – поток, имеющий конечное значение параметра и обладающий свойствами стационарности и ординарности является потоком с возможным последствием. Условная вероятность поступления не-

которого числа требований на заданном промежутке времени t такого потока вычисляется при предположении о предыстории потока (о поступлении требований до этого промежутка времени) и может отличаться от безусловной вероятности того же события.

Вероятность поступления требований k за данный промежуток времени t для потока с возможным последствием будет выглядеть следующим образом:

$$P_k(t) = \lambda \int_0^t (\varphi_{k-1}(x) - \varphi_k(x)) dx. \quad (9)$$

где $\varphi_k(t)$ – функции Пальма-Хинчина.

Функции $\varphi_k(t)$ представляют собой вероятность поступления k требований за время t при условии, что в начальный момент этого промежутка t поступает хотя бы одно (а в силу ординарности потока ровно одно) требование (это начальное требование не входит в число k требований за время t).

Потоки Эрланга. Поток Эрланга n -го порядка называется поток событий, получающийся из простейшего потока сохранением в нем каждого n -го события.

Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга n -го порядка представляет собой сумму n независимых случайных величин $T_1, T_2, \dots, T_k$, имеющих показательное распределение с параметром λ :

$$T = \sum_{i=1}^n T_i. \quad (10)$$

Закон распределения случайной величины T называется законом Эрланга n -го порядка и имеет плотность:

$$f_n(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \quad (\text{при } t > 0). \quad (11)$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное

отклонение случайной величины T соответственно равны:

$$M_t = n / \lambda; \quad (12)$$

$$D_t = n / \lambda^2; \quad (13)$$

$$\sigma_t = \sqrt{n / \lambda}. \quad (14)$$

Для потоков Эрланга n -го порядка вероятность поступления k требований за промежуток времени t равняется:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{l=(n+1)(k-1)}^{(n+1)(k+1)} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \left(1 - \left| \frac{l}{n+1} - k \right| \right), \text{ при } k > 0 \quad (15)$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \left(1 - \frac{l}{n+1}\right), \text{ при } k=0 \quad (16)$$

Суммирование и разъединение простейших потоков. При объединении нескольких независимых простейших потоков образуется также простейший поток с параметром, равным сумме параметров исходных потоков. При разъединении поступающего простейшего потока с параметром λ на n направлений так, что каждое требование исходного потока с вероятностью p_i поступает на i -е направление, поток i -го направления также будет простейшим с параметром λp_i . Эти свойства простейшего потока широко используются на практике, поскольку значительно упрощают расчёты стационарного оборудования и информационных сетей.

Показательный закон распределения времени обслуживания. Время обслуживания характеризует пропускную способность каждого узла обслуживания, не связано с оценкой качества обслуживания и является случайной величиной. Это объясняется неидентичностью узлов обслуживания и различием в спросе на обслуживание отдельных требований. Например, поступающие на ремонт вагоны имеют неисправности самого различного характера, попадают в различные ремонтные бригады, поэтому время на обслуживание для различных вагонов не будет одинаковым.

Во многих задачах теории массового обслуживания закон рас-

пределения времени обслуживания предполагается показательным и описывается выражением:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu \cdot t}. \quad (17)$$

где μ – средняя скорость обслуживания требований, величина обратная среднему времени обслуживания.

Пример. Имеются данные об интервалах поступления автомобилей на базу строительных материалов. Интервалы поступления автомобилей даны в минутах. Требуется определить закон распределения случайной величины.

25 37 4 93 13 26 5 61 6 14 6 8 6 44 15 7 27 14
8 16 38 27 58 9 6 17 62 9 66 10 19 21 45 2 8 81
7 11 31 8 59 92 13 9 21 16 12 8 10 18 9 14 2 47
36 9 11 57 10 93 46 40 2 10 12 23 43 3 12 24 21 80
28 3 39 84 4 29 18 91 30 5 50 19 40 10 6 75 20 46

Решение. Полученный ряд значений случайной величины называется простым статистическим рядом.

Обработка статистического ряда выполняется в следующем порядке:

1 Все данные располагаются в порядке возрастания или убывания значения случайной величины. Например, исходные данные можно расположить в порядке возрастания. Полученный ряд называется вариационным. Он уже дает некоторое представление об изучаемой случайной величине. Составим вариационный ряд:

2 2 2 3 3 4 4 5 5 6 6 6 6 6 7 7 8 8
8 8 8 9 9 9 9 9 10 10 10 10 10 11 11 12 12 12
13 13 | 14 14 14 15 16 16 17 18 18 19 19 20 21 21 21 23
24 25 | 26 27 27 28 29 30 31 36 37 | 38 39 40 40 43 44 45
46 46 47 | 50 57 58 59 61 | 62 66 | 75 80 81 84 | 91 92 93 93 |

2 Данные вариационного ряда разбиваются на группы или классы. Эта операция, называемая табулированием или группировкой, выполняется для того, чтобы представить распределение в более компактной и наглядной форме. Величину интервала групп предлагается определять по следующей формуле:

$$\Delta = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3,32 \lg D}, \quad (18)$$

где $X_{\max}$ и $X_{\min}$ – соответственно максимальное и минимальное значения в вариационном ряду;

D – количество значений в вариационном ряду.

В данном примере: $X_{\max}=93$, $X_{\min}=2$, $D=90$.

$$\Delta = \frac{93 - 2}{1 + 3,32 \lg 90} = \frac{91}{7,488} = 12,153 \approx 12.$$

Выбранные значения интервалов групп в порядке возрастания выписываются в таблицу 1. Некоторые значения могут значительно отличаются от остальных в вариационном ряду, в этом случае они признаются ложными и вычеркиваются из рассмотрения. Границы интервалов групп показываются черточками на вариационном ряду. Если значение находится на границе i -го и $(i+1)$ -го интервалов, то значение учитывается в $(i+1)$ -ом интервале.

Необходимо отметить, что число групп (n) зависит от объема выборки, но для определения типа распределения случайной величины принимается обычно 10-12. В нашем случае число групп равняется восьми согласно, предлагаемой формуле (19). Однако возможно принимать величину интервала групп условно, в зависимости от плотности распределения.

3 По вариационному ряду подсчитывается число наблюдений в каждой группе m_i . Далее необходимо рассчитать среднее значение случайной величины в группе:

$$X_i = \frac{\sum_i X_i^y}{m_i}, \quad (19)$$

где X_i^y – y -ый элемент i -ой группы;

m_i – количество наблюдений в группе i .

Частота значений случайной величины в каждой группе определяется по формуле:

$$h_i = \frac{m_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_i}{D}. \quad (20)$$

Результаты показателей статистического распределения сводим в таблицу 1.

Таблица 1 — Расчет показателей статистического распределения

Размер группы	Среднее в группе, X_i	Кол-во наблюдений в группе, m_i	Частота появления события, h_i	$X_i \cdot h_i$	$(X_i - X_{cp.})^2 \cdot h_i$
2-14	7	38	0,422	2,956	164,977
14-26	19	18	0,2	3,800	12,065
26-38	30	9	0,1	3,000	1,045
38-50	43	10	0,111	4,778	29,279
50-62	57	5	0,056	3,167	50,780
62-74	64	2	0,022	1,422	30,807
74-86	80	4	0,044	3,556	125,945
86-98	92	4	0,044	4,089	189,126
		$\Sigma m_i = 90$	$\Sigma h_i = 1$	$\Sigma(X_i \cdot h_i) = 26,767 = X_{cp.}$	$\Sigma\{(X_i - X_{cp.})^2 \cdot h_i\} = D[X] = 604,023$

Числовые характеристики, определяемые по выборке, являются приближенными оценками соответствующих характеристик генеральной совокупности. Оценки любого параметра должны быть: состоятельными, т.е. при увеличении числа объектов D сходиться по вероятности к соответствующим параметрам генеральной совокупности, несмещенными, т.е. чтобы при оценке параметра по выборке не делалось систематической ошибки в сторону увеличения или уменьшения параметра, и эффективными, т.е. чтобы они имели наименьшую дисперсию.

Всем этим требованиям удовлетворяет выборочное среднее, определяемое по формуле:

$$X_{cp} = \sum_i^n (X_i \times h_i). \quad (21)$$

Выборочная дисперсия определяется по формуле:

$$D[X] = \sum_i^n \{ (X_i - X_{cp})^2 \times h_i \} \quad (22)$$

Надежность и точность оценок определяется доверительным интервалом для выборочного среднего:

$$(X_{cp.} - \varepsilon) \leq M[X] \leq (X_{cp.} + \varepsilon), \quad (23)$$

где ε – величина отклонения, которая определяется по следующей формуле:

$$\varepsilon = u_\varepsilon \times \sqrt{\frac{D[X]}{D}}, \quad (24)$$

где u_ε – величина, определяемая для принятого уровня значимости P_Δ при числе наблюдений ≥ 20 по таблицам функции Лапласа, в нашем случае при $P_\Delta=0,05$, $u_\varepsilon=1,96$, тогда:

$$\varepsilon = 1,96 \times \sqrt{\frac{604,023}{90}} = 5,077 \text{ мин.}$$

Таким образом, доверительные границы равны:

$$(X_{cp.} \pm \varepsilon) = 26,767 \pm 5,077 \text{ мин.}$$

Интенсивность потока определяется по следующей формуле:

$$\lambda = 1 / X_{cp}. \quad (25)$$

$$\lambda = \frac{1}{26,767} = 0,037 \text{ мин.}^{-1}$$

Вероятность появления в одной точке:

$$p_{Ti} = \lambda \times e^{-\lambda X_i}. \quad (26)$$

Вероятность появления в группе:

$$P_i = p_{Ti} \times \Delta. \quad (27)$$

Число значений случайной величины в соответствующей группе по теоретическому распределению:

$$m_{Ti} = P_i \times D. \quad (28)$$

Согласование практического и теоретического распределения оцениваем по критерию Колмогорова. Для чего необходимо выполнить нижеприведенные вычисления. Значения статистической функции распределения:

$$F_{cm} = \sum_i h_i. \quad (29)$$

Значения теоретической функции распределения:

$$F_m = \sum_i P_i. \quad (30)$$

Для каждой группы определяется абсолютное значение разности и выбирается наибольшее R_m :

$$R = |F_{cm} - F_m|. \quad (31)$$

Расчеты по подбору теоретической кривой представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Подбор теоретической кривой

Раз- мер груп- пы	Сред- нее в груп- пе, X_i	p_{Ti}	P_i	Количество теоретиче- ских значе- ний в груп- пе, m_{Ti}	$F_{cm.}$	$F_m.$	$R = F_{cm} - F_T $
2-14	7	0,030	0,360	32	0,422	0,36	0,062
14-26	19	0,019	0,228	20	0,622	0,588	0,034
26-38	30	0,013	0,156	14	0,722	0,744	0,022
38-50	43	0,008	0,096	8	0,833	0,84	0,007
50-62	57	0,005	0,060	5	0,889	0,9	0,011
62-74	64	0,004	0,048	4	0,911	0,948	0,037
74-86	80	0,003	0,037	3	0,956	0,985	0,029
86-98	92	0,001	0,015	1	1	1	0
			$\Sigma P_i = 1$	$\Sigma m_{Ti} = 87$			

Значение критерия Колмогорова определяется по следующей формуле:

$$Z = R_m \times \sqrt{D}, \quad (32)$$

$$Z = 0,062 \times \sqrt{90} = 0,59.$$

По значению Z определяется вероятность P_z (таблица 3) того, что полученные отклонения вызваны случайными колебаниями величины выборки.

Таблица 3 – Зависимости P_z от Z для критерия Колмогорова

Z	P_z	Z	P_z	Z	P_z
0	1	0,7	0,711	1,4	0,04
0,1	1	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1	1	0,27	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2	0,001

Следует отметить, если $P_z \in [0,864;1]$, то можно говорить о хорошем согласовании теоретического распределения с выборочным, если $P_z \in [0,544;0,864)$ об удовлетворительном. В нашем случае $P_z = 0,864$, что говорит о хорошем согласовании теоретического распределения с выборочным.

4 Для наглядности эмпирическое распределение изображается в виде гистограммы, а теоретическое в виде кривой (рисунок 1).

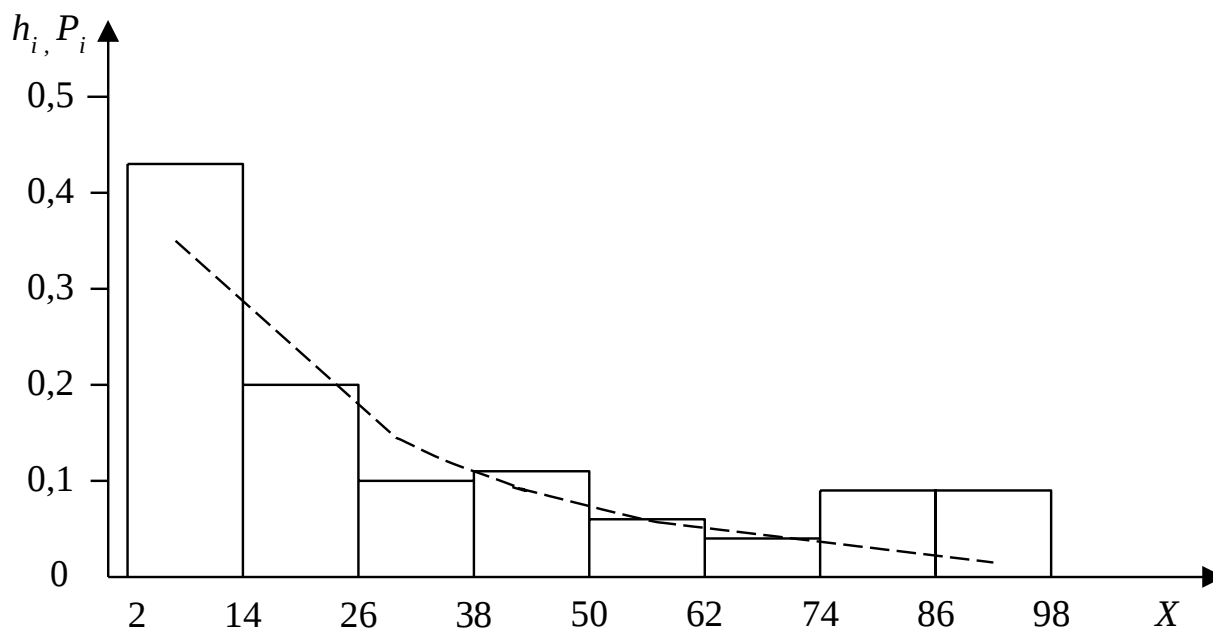


Рисунок 1 – Эмпирическое и теоретическое распределение случайной величины

Контрольные вопросы

- 1 Какие потоки наиболее часто встречаются в транспортных процессах?
- 2 По каким свойствам классифицируются случайные потоки?
- 3 Дать определение стационарности, ординарности и отсутствию последствия.
- 4 Назвать и дать определения числовым характеристикам случайных потоков.
- 5 По какому закону распределён промежуток между соседними требованиями в простейшем потоке?
- 6 По какому закону распределяется случайная величина, характеризующая количество требований простейшего потока, попавших в некоторый промежуток?

7 Какой поток образуется при объединении n простейших потоков?

Тема 2. Системы массового обслуживания

Цель занятия: 1 Знакомство с системами массового обслуживания

2 Исследование транспортных процессов и систем с помощью различных систем массового обслуживания

Краткие теоретические сведения

1 Общие положения теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания занимается изучением вопросов организации и обслуживания потока требований или заявок.

Система массового обслуживания (СМО) включает следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания), выходящий поток требований.

Требованием или заявкой называется объект, который необходимо обслужить: железнодорожные составы, проходящие через железнодорожный узел, покупатели, приобретающие билеты в кассах и т.д. Совокупность появляющихся требований называется потоком требований.

Устройства, удовлетворяющие запросу на обслуживание, называются обслуживающими устройствами или аппаратами.

Если время обслуживания велико, появляется очередь — множество требований, желающих быть обслуженными, но еще не обслуженных.

Работу СМО можно абстрактно представить следующим образом: генератор (источник) генерирует очередное требование, которое поступает в систему и либо становится в очередь на обслуживание, либо, если очереди нет, поступает в цех, где прибор начинает выполнять запрос на обслуживание.

Последовательность требований, входящих в СМО, называется входящим (входным) потоком, выходящие требования называются

выходящим (выходным) потоком.

Целью теории массового обслуживания является выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения наибольшей эффективности функционирования СМО. Для достижения этой цели ставятся задачи теории массового обслуживания, заключающиеся в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации.

Таким образом, задачи, решаемые теорией массового обслуживания, чрезвычайно разнообразны, поэтому их следует каким либо образом классифицировать, например, по общим признакам.

СМО подразделяется на три вида:

1 СМО без потерь. Под термином система без потерь (с полным ожиданием) понимают систему, в которой, если все приборы заняты, требование становится в очередь и не покидает ее до тех пор, пока не будет обслужено.

2 СМО с частичными потерями. Подобная система характеризуется тем, что требование либо не становится в очередь, если эта очередь превышает по длине некоторую величину (система с ограниченной длиной очереди), либо становится в очередь, но покидает ее, если время пребывания в ней превышает определенную величину (система с ограниченным временем пребывания), или, если время ожидания в очереди начала обслуживания превышает определенную величину (система с ограниченным временем ожидания начала обслуживания).

3 СМО без очередей (с потерями). Под этим термином понимают систему, в которой требование покидает систему, если все обслуживающие устройства (приборы) заняты. В такой системе очереди не может быть.

Так, весьма важной характеристикой является дисциплина обслуживания, под которой понимают порядок выбора требований из очереди. В соответствии с этим системы подразделяются на четыре вида:

- СМО с типом дисциплины «первый пришел – первый обслуживается» – дисциплина «живой очереди»;
- СМО с типом дисциплины «последний пришел – первый обслуживается»;

- СМО с типом дисциплины выбора требований случайным способом (не упорядоченная очередь);
- СМО с типом дисциплины выбора требований в соответствии с присвоенными приоритетами.

Все СМО делятся на одноканальные и многоканальные системы. Под термином канал понимают обслуживающее устройство, пропускающее через себя требование. СМО, содержащее один канал обслуживания, называется одноканальной, а содержащее более одного канала – многоканальной. Многоканальные СМО классифицируются на полнодоступные и неполнодоступные.

Все СМО можно разделить на системы с бесконечным числом требований – разомкнутые (например, запросы на телефонные переговоры, на обслуживание покупателей, автомашины на бензозаправках и т.д.) и с конечным числом требований в системе – замкнутые (группа ремонта станков в цехе: число станков известно).

Интенсивность обслуживания прибором может быть постоянной или зависеть от длины очереди, приоритетов или каких-либо других факторов.

Также СМО различают по характеру входного потока и по характеру обслуживающих устройств.

По характеру входной поток требований разделяется на детерминированный и стохастический.

Детерминированный входной поток может быть двух видов. В первом случае требования поступают через равные промежутки времени. Другим видом детерминированного потока является поток, в котором требования поступают по известной программе – расписанию, когда моменты поступления новых требований известны заранее.

Стохастический поток требований подразделяется на два вида: поток с произвольными стохастическими свойствами и совершенно случайный или пуассоновский поток требований.

Входной поток называется совершенно случайным или простейшим, если для него характерно следующее:

- продолжительность интервалов между поступлениями требований статистически независима;
- продолжительность интервалов описывается одной и той же плотностью распределения;
- вероятность поступления требований на достаточно малом

интервале Δt зависит только лишь от величины Δt (это свойство называется стационарностью или однородностью прихода) и не зависит от размеров Δt на числовой оси;

– вероятность поступления требований на интервале Δt не зависит от предыстории процесса – отсутствие последствия;

– характер потока требований таков, что в любой момент времени может поступить только одно требование – ординарность.

Введем в рассмотрение параметр ρ – коэффициент загрузки системы, который определяется из следующего выражения:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu \times N} = \frac{\lambda \times t_{об.}}{N} < 1, \quad (33)$$

где $t_{об.}$ – время обслуживания;

N – число каналов.

Следует отметить, что условие устойчивости системы выполняется, если коэффициент загрузки системы меньше единицы. Ниже рассмотрим СМО, которые часто встречаются в транспортных процессах.

СМО с отказами – система, в которой приходящие для обслуживания требования, в случае занятости всех каналов обслуживания, сразу ее покидают.

Вероятность того, что в системе находятся k требований:

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^k}{k!} \times P_0, \quad (34)$$

где $k=1, 2, \dots, N$;

N – общее число каналов.

Вероятность того, что все каналы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N \times \rho)^k}{k!} \right]^{-1}. \quad (35)$$

Вероятность того, что в системе все каналы заняты:

$$P_N = \frac{(N \times \rho)^N}{N!} \times P_0. \quad (36)$$

Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$N_0 = \sum_{k=0}^{N-1} (N-k) \times P_k. \quad (37)$$

Коэффициент простоя каналов:

$$K_{np} = N_0 / N. \quad (38)$$

Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$N_3 = N - N_0 = N \times \rho \times (1 - P_N). \quad (39)$$

Для данного класса СМО решаются задачи выбора оптимального количества аппаратов, подбора параметров обслуживающего комплекса, расчета пропускной способности системы и т.п.

СМО с ограниченной длиной очереди – система, в которой требование, поступающее на обслуживание, покидает систему, если заняты все каналы обслуживания, и в накопителе заняты все места, т.е. в системе находится $s=N+m$ требований.

Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^N \frac{(N \times \rho)^k}{k!} + \frac{N^N \times \rho^{N+1} \times (1 - \rho^m)}{N! \times (1 - \rho)} \right]^{-1}. \quad (40)$$

Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число не превосходит числа обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^k}{k!} \times P_0, \text{ при } (1 \leq k \leq N). \quad (41)$$

Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число превосходит число обслуживающих аппаратов:

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^k}{N! \times N^{k-N}} \times P_0, \text{ при } (N \leq k \leq s). \quad (42)$$

Вероятность отказа в обслуживании определяется из выражения:

$$P_s = \frac{(N \times \rho)^s}{N! \times N^{s-N}} \times P_0. \quad (43)$$

Средняя длина очереди:

$$L = \frac{N^N \times \rho^{N+1} \times (1 - (m+1) \times \rho^m + m \times \rho^{m+1})}{N! \times (1 - \rho)^2} \times P_0. \quad (44)$$

Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$N_0 = N \times (1 - \rho) + \frac{N^{N+1} \times \rho^{s+1}}{N!} \times P_0. \quad (45)$$

СМО с неограниченной длиной очереди (с ожиданием) аналогична системе с ограниченной длиной очереди при условии, что граница очереди отодвигается в бесконечность.

Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число не превосходит число обслуживающих аппаратов, находят по формуле:

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^k}{k!} \times P_0, \text{ при } (1 \leq k \leq N). \quad (46)$$

Вероятность того, что в системе находится k требований, в случае, когда их число больше числа обслуживающих аппаратов находят по формуле:

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^k}{N! \times N^{k-N}} \times P_0, \text{ , при } (k \geq N). \quad (47)$$

Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^N \frac{(N \times \rho)^k}{k!} + \frac{N^N \times \rho^{N+1}}{N! \times (1 - \rho)} \right]^{-1}. \quad (48)$$

Вероятность занятости всех каналов обслуживания:

$$P_N = \sum_{k=N}^{\infty} P_k = \frac{(N \times \rho)^N}{N! \times (1 - \rho)} \times P_0. \quad (49)$$

Средняя длина очереди:

$$L_q = \frac{\rho}{(1 - \rho)} \times P_N. \quad (50)$$

Среднее число требований в системе:

$$L_s = L_q + N \times \rho = \frac{N^N \times \rho^{N+1}}{N! \times (1 - \rho)^2} \times P_0 + N \times \rho. \quad (51)$$

Среднее время пребывания в очереди:

$$W_q = \frac{P_N}{\mu \times N \times (1 - \rho)} = \frac{L_q}{\lambda}. \quad (52)$$

Среднее время пребывания в системе:

$$W_s = W_q + t_{об} = \frac{L_s}{\lambda}. \quad (53)$$

Среднее число свободных от обслуживания каналов:

$$N_0 = \sum_{k=1}^N \frac{k}{(N-k)!} \times (N \times \rho)^k \times P_0. \quad (54)$$

Для данного класса СМО решаются задачи выбора оптимального числа аппаратов, определения размеров очереди и соответствующих складских площадей, расчета пропускной способности системы и т.п.

В СМО с ограниченным временем ожидания время ожидания в очереди каждого требования ограничено случайной величиной $t_{ож}$, среднее значение которого $\overline{t_{ож}}$. Величина, обратная среднему времени ожидания, означает среднее количество требований, покидающих очередь в единицу времени, вызванное появлением в очереди одного требования:

$$\nu = 1/\overline{t_{ож}}. \quad (55)$$

Формулы для определения вероятностей состояний такой системы имеют вид:

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^k}{k!} \times P_0, \text{ при } k \leq N. \quad (56)$$

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^N}{N!} \times \frac{(N \times \rho)^l}{\prod_{i=1}^l (N + i \times \beta)} \times P_0, \text{ при } i \in [N + 1, N + l], \quad (57)$$

где $\beta = v / \mu$.

Вероятность того, что все каналы свободны, определяется по формуле:

$$P_0 = \left[\sum_{k=1}^N \frac{(N \times \rho)^k}{k!} + \frac{(N \times \rho)^N}{N!} \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(N \times \rho)^l}{\prod_{i=1}^l (N + i \times \beta)} \right]^{-1}. \quad (58)$$

Средняя длина очереди:

$$L_q = \frac{(N \times \rho)^N}{N!} \times P_0 \times \sum_{l=1}^{\infty} l \times \frac{(N \times \rho)^l}{\prod_{i=1}^l (N + i \times \beta)}. \quad (59)$$

Вероятность отказа:

$$P = \frac{\beta}{N \times \rho} \times L. \quad (60)$$

Среднее число занятых каналов обслуживания:

$$N_l = \sum_k^N k \times P_k + N \times \sum_{l=1}^{\infty} P_{N+l}. \quad (61)$$

Пример 1. На грузовой фронт, оборудованный вагоноопрокидывателем, под выгрузку поступает пуассоновский поток групп ваго-

нов (из $m=14$ вагонов) с интенсивностью $\lambda=1,9$ гр./ч. Среднее время выгрузки одной группы $t_{об.}=0,35$ ч. Стоимость вагонно-часа $c=1,2$ у.е./ваг.-ч.

Определить: 1) Среднее время ожидания группой выгрузки, если время выгрузки распределяется по экспоненциальному закону распределения; 2) Затраты, связанные с пребыванием вагонов на грузовом фронте в течение суток.

Решение. Данная СМО является одноканальной. Коэффициент загрузки системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \times t_{об.};$$

$$\rho = 1,9 \times 0,35 = 0,665 < 1.$$

Среднее время ожидания в очереди выгрузки определяем по формуле (52), которая после преобразования примет следующий вид:

$$W_q = \frac{\rho}{1 - \rho} \times t_{об.};$$

$$W_q = \frac{0,665}{1 - 0,665} \times 0,35 = 0,695 \text{ ч.}$$

Простой на грузовом фронте за сутки:

$$W_s = (W_q + t_{об.}) \times \lambda \times m \times 24;$$

$$W_s = (0,695 + 0,35) \times 1,9 \times 14 \times 24 = 666,985 \text{ ваг.} - \text{ч./сут.}$$

Стоимость простоя:

$$C = c \times W_s;$$

$$C = 1,2 \times 666,985 = 800,382 \text{ у.е./сут.}$$

Ответ: 1) Среднее время ожидания выгрузки равно 0,695 ч.; 2) Стоимость простоя равна 800,382 у.е./сутки.

Пример 2. На грузовой фронт, оборудованный N погрузочными механизмами, под погрузку поступает пуассоновский поток автомобилей с интенсивностью $\lambda=4$ авт./ч. Среднее время погрузки одного автомобиля $t_{об.}=20$ мин. = 0,33 ч. Стоимость 1 авт.-ч. – $c_{авт.}=15$ у.е./авт.-ч. Стоимость простоя погрузочного механизма $c_{пр.}=30$ у.е./ч.

Определить рациональное число задействованных погрузочных механизмов, если $N \in [1;5]$.

Решение. Данная СМО является многоканальной с неограниченной очередью (с ожиданием).

Коэффициент загрузки системы определяется по формуле (33):

$$N_1=1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu \times N_1} = \frac{4}{3 \times 1} = 1,33,$$

$$\text{где } \mu = \frac{1}{t_{об.}} = \frac{1}{0,33} = 3 \text{ авт./ч.}$$

$$N_2=2 \Rightarrow \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu \times N_2} = \frac{4}{3 \times 2} = \frac{2}{3};$$

$$N_3=3 \Rightarrow \rho_3 = \frac{\lambda}{\mu \times N_3} = \frac{4}{3 \times 3} = \frac{4}{9};$$

$$N_4=4 \Rightarrow \rho_4 = \frac{\lambda}{\mu \times N_4} = \frac{4}{3 \times 4} = \frac{1}{3};$$

$$N_5=5 \Rightarrow \rho_5 = \frac{\lambda}{\mu \times N_5} = \frac{4}{3 \times 5} = \frac{4}{15}.$$

Таким образом, $\rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5 < 1$.

Вероятность того, что все погрузочные механизмы свободны, определяется по формуле (48):

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^N \frac{(N \times \rho)^k}{k!} + \frac{N^N \times \rho^{N+1}}{N! \times (1 - \rho)} \right]^{-1};$$

$$P_0^2 = \left[1 + \frac{(4/3)^1}{1!} + \frac{(4/3)^2}{2!} + \frac{2^2 \times (2/3)^3}{2! \times (1 - 2/3)} \right]^{-1} = 0,2.$$

Вероятность занятости всех каналов обслуживания определяется по формуле (49):

$$P_N = \sum_{k=N}^{\infty} P_k = \frac{(N \times \rho)^N}{N! \times (1 - \rho)} \times P_0;$$

$$P_N^2 = \frac{(4/3)^2}{2! \times (1 - 2/3)} \times 0,2 = 0,533.$$

Среднее время ожидания начала погрузки каждым автомобилем определяется согласно формуле (52):

$$W_q = \frac{P_N}{\mu \times N \times (1 - \rho)};$$

$$W_q^2 = \frac{0,533}{3 \times 2 \times (1 - 2/3)} = 0,266 \text{ ч.}$$

Средняя длина очереди, которая определяется по формуле (50):

$$L_q = \frac{\rho}{(1 - \rho)} \times P_N;$$

$$L_q^2 = \frac{2/3}{(1 - 2/3)} \times 0,533 = 1,07 \text{ авт.}$$

Расчет стоимости простоя грузового механизма за сутки:

$$C_{ГР} = P_0 \times N \times c_{ГР} \times 24;$$

$$C_{ГР}^2 = 0,2 \times 2 \times 30 \times 24 = 288 \text{ у.е./сут.}$$

Результаты расчетов сводим в таблицу 4.

Таблица 4 – Результаты расчетов

Расчетная величина	Число погрузочных механизмов			
	2	3	4	5
P_0	0,2	0,254	0,262	0,263
P_N	0,533	0,181	0,052	0,013
$W_q, ч.$	0,266	0,036	0,007	0
$L_q, авт.$	1,07	0,14	0,03	0
$C_{ГР.}, у.е./сут.$	288	548,64	754,56	946,8
$C_{АВТ.}, у.е./сут.$	102,46	1,81	0	0
$C_{ГР.} + C_{АВТ.}, у.е./сут.$	390,46	550,45	754,56	946,8

Расчет стоимости простоя автомобиля в ожидании грузовой операции за сутки:

$$C_{АВТ.} = W_q \times L_q \times c_{АВТ.} \times 24;$$

$$C_{АВТ.}^2 = 0,266 \times 1,07 \times 15 \times 24 = 102,46 \text{ у.е./сут.}$$

Общая стоимость простоя определяется по формуле:

$$C^N = C_{ГР.}^N + C_{АВТ.}^N.$$

Из таблицы 4 следует, что минимум затрат достигается при $N = 2 \text{ мех.}$

Ответ: Рациональное число задействованных погрузочных механизмов равно 2.

Пример 3. Появление автомобилей на АЗС станции описывается пуассоновским законом распределения. Клиенты АЗС подразделяются на два вида: одни, застав все колонки занятыми, становятся в очередь и ожидают; другие не могут ждать, если все колонки уже заняты обслуживанием, уезжают. Пусть клиенты составляют поток интенсивностью $\lambda = 10 \text{ авт./ч.}$ Среднее время обслуживания каждой машины $t_{об.} = 15 \text{ мин.}$ На автозаправочной станции работают $N = 3 \text{ колонки.}$ Требуется оценить работу АЗС:

- а. при условии, что клиенты, застав колонки занятыми, уезжают;
- б. при условии, что клиенты застав все колонки занятыми ожидают обслуживания, если есть колонки без очереди, иначе уезжают.

Решение.

а. Данная СМО является многоканальной с отказами.

Коэффициент загрузки системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu \times N};$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu \times N} = \frac{10}{4 \times 3} = 0,833;$$

где $\mu = \frac{1}{t_{об.}} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ авт./ч.}$

Вероятность состояния, при котором все колонки свободны, определяется по формуле (35):

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N \times \rho)^k}{k!} \right]^{-1};$$

$$P_0 = \left[\frac{(3 \times 0,833)^0}{0!} + \frac{(3 \times 0,833)^1}{1!} + \frac{(3 \times 0,833)^2}{2!} \right]^{-1} = 0,151.$$

Вероятность того, что в системе находятся k требований, определяется по формуле (34):

$$P_k = \frac{(N \times \rho)^k}{k!} \times P_0;$$

$$P_1 = \frac{(3 \times 0,833)^1}{1!} \times 0,151 = 0,377;$$

$$P_2 = \frac{(3 \times 0,833)^2}{2!} \times 0,151 = 0,472.$$

Вероятность того, что в системе все каналы заняты, определяется по формуле (36):

$$P_N = \frac{(N \times \rho)^N}{N!} \times P_0;$$

$$P_N = \frac{(3 \times 0,833)^3}{3!} \times 0,151 = 0,393.$$

Среднее число свободных от обслуживания колонок, определяется по формуле (37):

$$N_0 = \sum_{k=0}^{N-1} (N - k) \times P_k;$$

$$N_0 = 3 \times 0,151 + (3 - 1) \times 0,377 + (3 - 2) \times 0,472 \approx 1,7 \text{ кол.}$$

Коэффициент простоя каналов, определяется по формуле (38):

$$K_{np} = N_0 / N;$$

$$K_{np} = \frac{1,7}{3} = 0,57.$$

Среднее число занятых обслуживанием каналов, определяется по формуле (39):

$$N_z = N - N_0;$$

$$N_z = 3 - 1,7 = 1,3 \text{ кол.}$$

б. Данная СМО является многоканальной с ограниченной длиной очереди.

Вероятность того, что все обслуживающие каналы свободны, определяется по формуле (40):

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^N \frac{(N \times \rho)^k}{k!} + \frac{N^N \times \rho^{N+1} \times (1 - \rho^m)}{N! \times (1 - \rho)} \right]^{-1};$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{(3 \times 0,833)^1}{1!} + \frac{(3 \times 0,833)^2}{2!} + \frac{(3 \times 0,833)^3}{3!} + \frac{3^3 \times 0,833^4 \times (1 - 0,833^3)}{3! \times (1 - 0,833)} \right]^{-1} = 0,068.$$

Вероятность отказа в обслуживании определяется из выражения, определяется по формуле (43):

$$P_s = \frac{(N \times \rho)^s}{N! \times N^{s-N}} \times P_0;$$

$$P_s = \frac{(3 \times 0,833)^6}{3! \times 3^{6-3}} \times 0,068 = 0,102.$$

Средняя длина очереди, определяется по формуле (44):

$$L = \frac{N^N \times \rho^{N+1} \times (1 - (m+1) \times \rho^m + m \times \rho^{m+1})}{N! \times (1 - \rho)^2} \times P_0;$$

$$L = \frac{3^3 \times 0,833^4 \times (1 - (3+1) \times 0,833^3 + 3 \times 0,833^4)}{3! \times (1 - 0,833)^2} \times 0,068 = 0,69 \text{ авт.}$$

Среднее число свободных от обслуживания каналов, определяется по формуле (45):

$$N_0 = N \times (1 - \rho) + \frac{N^{N+1} \times \rho^{s+1}}{N!} \times P_0;$$

$$N_0 = 3 \times (1 - 0,833) + \frac{3^{3+1} \times 0,833^{6+1}}{3!} \times 0,068 = 0,76 \text{ кол.}$$

Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$N_z = 3 - 0,76 = 2,24 \text{ кол.}$$

Контрольные вопросы

- 1 Из каких элементов состоит СМО?
- 2 Как классифицируется СМО по дисциплине обслуживания?
- 3 Дать определение одноканальной и многоканальной СМО.
- 4 Дать понятие загрузки системы.
- 5 СМО с отказами.
- 6 СМО с ограниченной длиной очереди.
- 7 СМО с неограниченной длиной очереди.
- 8 СМО с ограниченным временем ожидания.

Самостоятельная работа

К самостоятельной работе обучающихся относится подготовка к лекциям, практическим занятиям, изучение дополнительных материалов, прохождение тестирований и выполнение индивидуальных домашних заданий, а также подготовка к промежуточной аттестации.

Темы самостоятельной работы:

- 1 Порядок построения и решения моделей.
- 2 Программные продукты для моделирования транспортных процессов и систем.
- 3 Применение математических методов для моделирования транспортных процессов (постановка задач, алгоритмы, выбор метода).
- 4 Количественный и качественный анализ.
- 5 Определение показателей распределения случайной величины: обработка статистических и хронометражных данных, группировка и табличное представление данных, получение статистических распределений и их характеристик, принятие и проверка гипотезы о законе распределения случайной величины.
- 6 Хронометрирование.
- 7 Этапы обработки статистических данных по транспортно-грузовой системе.

- 8 Использование компьютерных пакетов программ для статистического моделирования.
- 9 Примеры транспортно-грузовых систем.
- 10 Конкретизация методов исследования транспортно-грузовых систем.
- 11 Имитационное моделирование транспортных систем.
- 12 Оценка работы системы массового обслуживания: а) многоканальной с отказами; б) многоканальной с ограниченной длиной очереди.
- 13 Моделирование систем массового обслуживания при помощи компьютерных пакетов имитационного моделирования.
- 14 Примеры систем массового обслуживания в транспортных процессах.
- 15 Особенности моделирования систем массового обслуживания (характерные особенности объектов, сбор информации, принятие решений).
- 16 Марковские процессы.
- 17 Основные свойства сети: оценки, связи, критический путь
- 18 Диаграмма Ганта.
- 19 Оптимизация сетевых моделей.
- 20 Использование компьютерных пакетов для задач сетевого планирования.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горев А. Э. Теория транспортных процессов и систем [Электронный ресурс] : учебник для академического бакалавриата / А. Э. Горев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2018. – 217 с. – Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/88B96B21-9E16-4C43-A9C5-91AB9ACE894A (дата обращения 19.02.2018).
2. Минько Р. Н. Технология транспортных процессов [Электронный ресурс] : учебное пособие / Р. Н. Минько, А. И. Шапошников. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2016. – 120 с. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=448313> (дата обращения 19.02.2018).
3. Моделирование систем и процессов : учебник для академического бакалавриата / В. Н. Волкова [и др.] ; под ред. В. Н. Волковой,

В. Н. Козлова. – Москва : Издательство Юрайт, 2018. – 450 с. – Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/E7D370B9-3C64-4A0F-AF1B-F6BD0EEEBCD0 (дата обращения 19.02.2018).

4. Моделирование процессов и систем [Электронный ресурс] : учебник и практикум для академического бакалавриата / под ред. Е. В. Стельмашонок. – Москва: Издательство Юрайт, 2018. – 289 с. – Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/68D5E3CE-5293-4F66-9C33-1F6CF0A2D5F2 (дата обращения 19.02.2018).

5. Моделирование систем и процессов. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие для академического бакалавриата / В. Н. Волкова [и др.] ; под ред. В. Н. Волковой. – Москва : Издательство Юрайт, 2018. – 295 с. – Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/3DF77B78-AF0B-48EE-9781-D60364281651 (дата обращения 19.02.2018).

6. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов / Н. Ш. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Кремера. – Москва : Банки и биржи, 1997. – 407 с.

Приложение А
Практическая работа № 1
Задача

Имеются данные об интервалах поступления автомобилей на базу строительных материалов. Интервалы поступления автомобилей даны в минутах. Требуется определить закон распределения случайной величины.

№ вар.	Интервалы поступления автомобилей																		
1	34	7	16	2	62	25	43	17	52	54	2	4	26	11	2	21	24	2	
2	35	18	11	8	27	5	9	55	28	19	44	7	12	20	2	51	33	78	
3	21	11	2	31	2	4	41	51	1	8	12	2	22	32	71	2	81	91	
4	2	33	23	4	13	76	10	2	42	2	12	24	53	77	2	15	52	23	
5	11	5	36	53	6	8	56	3	12	34	29	45	11	6	44	9	15	9	
6	3	30	37	9	46	21	5	38	13	7	63	82	14	8	50	7	4	15	
7	39	16	7	40	47	5	22	17	54	92	3	100	23	10	5	4	12	25	
8	20	58	2	57	3	15	48	4	6	18	24	6	49	1	25	9	9	19	
9	11	26	31	49	55	5	12	27	6	20	64	48	7	73	4	14	8	79	
10	32	9	8	12	2	13	51	3	47	14	28	4	25	15	16	5	2	26	
11	16	3	6	33	41	7	17	30	8	34	56	8	9	7	26	83	2	3	
12	4	35	59	5	60	18	12	6	42	19	65	7	21	30	8	20	74	22	
13	36	9	11	57	10	93	46	40	2	10	12	23	43	3	12	24	21	80	
14	25	37	4	93	13	26	5	61	6	14	6	8	6	44	15	7	27	14	
15	8	16	38	27	58	9	6	17	62	9	66	10	19	21	45	2	8	81	
16	28	3	39	84	4	29	18	91	30	5	50	19	40	10	6	75	20	46	
17	7	11	31	8	59	92	13	9	21	16	12	8	10	18	9	14	2	47	
18	32	22	2	13	3	45	12	6	4	67	14	16	23	25	5	48	15	4	
19	16	6	24	33	7	60	51	17	10	14	64	8	25	18	49	12	11	9	
20	22	9	10	19	26	2	34	4	3	14	20	63	4	50	23	76	5	28	
21	6	27	11	7	35	51	28	8	41	51	36	9	85	12	94	10	9	82	
22	13	2	37	42	14	3	8	90	5	4	29	68	5	30	13	15	6	22	
23	4	38	7	43	16	44	8	9	22	17	9	52	7	4	10	12	21	2	
24	3	18	23	4	39	44	19	5	24	2	5	6	65	20	14	7	77	29	
25	21	8	11	43	9	40	15	45	10	53	12	25	2	69	26	3	3	14	
26	4	31	86	5	14	13	60	6	27	32	46	28	7	14	4	8	9	15	
27	29	16	9	33	30	10	54	17	14	2	23	47	3	10	12	4	6	9	
28	21	34	95	6	18	6	22	12	9	19	9	71	70	48	20	24	78	30	
29	5	23	11	6	35	24	55	7	16	8	12	9	8	10	13	49	9	15	
30	36	10	75	13	10	2	14	25	3	66	11	4	9	15	11	5	50	83	

Практическая работа № 2

Задача 1

На грузовой фронт, оборудованный вагоноопрокидывателем, под выгрузку поступает пуассоновский поток групп вагонов (из m вагонов) с интенсивностью λ . Среднее время выгрузки одной группы $t_{об.}$. Стоимость вагонно-часа $c=1,2$ у.е./ваг.-ч.

Определить: 1) Среднее время ожидания группы выгрузки, если время выгрузки распределяется по экспоненциальному закону распределения; 2) Затраты, связанные с пребыванием вагонов на грузовом фронте в течение суток.

№ вар.	m , ваг.	λ , гр./ч.	$t_{об.}$, ч	№ вар.	m , ваг.	λ , гр./ч.	$t_{об.}$, ч	№ вар.	m , ваг.	λ , гр./ч.	$t_{об.}$, ч
1	16	1,0	0,4	11	17	1,4	0,5	21	18	0,7	0,7
2	19	0,9	0,35	12	16	1,9	0,3	22	21	1,0	0,6
3	12	1,2	0,6	13	23	0,3	1,3	23	16	1,4	0,4
4	13	0,7	0,4	14	11	1,4	0,3	24	23	0,8	0,9
5	13	1,4	0,45	15	13	1,4	0,5	25	22	0,6	0,6
6	22	1,9	0,5	16	10	0,5	0,9	26	20	1,1	0,5
7	24	0,5	1,2	17	20	1,0	0,8	27	11	1,1	0,7
8	21	1,8	0,8	18	13	0,8	0,9	28	20	1,4	0,4
9	10	0,8	1,1	19	13	1,2	0,8	29	16	1,5	0,5
10	18	2,0	0,45	20	22	1,1	0,4	30	25	1,8	0,3

Задача 2

На грузовой фронт, оборудованный N погрузочными механизмами, под погрузку поступает пуассоновский поток автомобилей с интенсивностью λ . Среднее время погрузки одного автомобиля $t_{об.}$. Стоимость 1 автом.-ч. – $c_{авт.}=15$ у.е./автом.-ч. Стоимость простоя погрузочного механизма $c_{гр.}=30$ у.е./ч. Определить рациональное число задействованных погрузочных механизмов, если $N \in [1;5]$.

№ вар.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, ч	№ вар.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, ч	№ вар.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, ч
1	11	0,18	11	16	0,12	21	15	0,16
2	8	0,23	12	12	0,15	22	10	0,17
3	9	0,26	13	8	0,24	23	11	0,10
4	7	0,20	14	7	0,15	24	14	0,16

Продолжение таблицы

№ вар.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, ч	№ вар.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, ч	№ вар.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, ч
5	16	0,16	15	15	0,12	25	15	0,17
6	13	0,15	16	14	0,13	26	12	0,16
7	14	0,14	17	13	0,11	27	14	0,10
8	13	0,11	18	13	0,16	28	13	0,09
9	13	0,12	19	17	0,10	29	12	0,11
10	7	0,21	20	8	0,22	30	11	0,12

Задача 3

Появление автомобилей на АЗС станции описывается пуассоновским законом распределения. Клиенты АЗС подразделяются на два вида: одни, застав все колонки занятыми, становятся в очередь и ожидают; другие не могут ждать, если все колонки уже заняты обслуживанием, уезжают. Пусть клиенты составляют поток интенсивностью λ . Среднее время обслуживания каждой машины $t_{об.}$. На автозаправочной станции работают N . Требуется оценить работу АЗС: а) при условии, что клиенты, застав колонки занятыми, уезжают; б) при условии, что клиенты застав все колонки занятыми ожидают обслуживания, если есть колонки без очереди, иначе уезжают.

№ вар.	N , кол.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, мин.	№ вар.	N , кол.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, мин.	№ вар.	N , кол.	λ , авт./ч.	$t_{об.}$, мин.
1	3	11	14	11	4	12	14	21	3	10	15
2	3	12	12	12	3	11	12	22	4	12	15
3	3	15	10	13	3	9	16	23	3	8	17
4	3	13	12	14	3	10	16	24	3	10	15
5	3	9	17	15	3	13	11	25	4	11	16
6	3	12	13	16	3	9	15	26	3	13	10
7	3	10	17	17	3	12	14	27	3	13	12
8	3	12	13	18	3	10	13	28	3	14	10
9	3	11	13	19	3	10	14	29	3	14	11
10	3	14	12	20	3	12	11	30	4	15	12