Министерство науки и образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Санкт-Петербургский горный университет

Кафедра информатики и компьютерных технологий

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА: ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ, АППРОКСИМАЦИЯ

Методические указания к практическим занятиям

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2022

УДК 519.65
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА: ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ, АППРОКСИМАЦИЯ: Методические указания к практическим занятиям. Сост.: *В.Н. Кризский, О.В. Косарев, Г.Н. Журов*. СПб, 2022, 27 с.

Для таблично заданных функций рассмотрены элементы теории и алгоритмы вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа и аппроксимирующей функции, построенной по методу наименьших квадратов. Приведены задачи для самостоятельной работы.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 27.03.03 - Системный анализ и управление.

Научный редактор: доц. *А.Б. Маховиков*

Рецензент: к.т.н. К.В. Столяров

ВВЕДЕНИЕ

Дискретные измерения физических величин, производимые в различных задачах практики, приводят к функциональным зависимостям вида $y = f(x)$, заданным в виде таблицы значений функции одной независимой переменной (x_i, y_i), $i=0,1,2,\dots,N$. Здесь $N+1$ – число произведенных измерений. Явный вид функции f, как правило, явно неизвестен.

Для таблично-заданных функций возникают задачи:

1) *Восполнение* – определение значений функции *внутри* интервала $[A_x, B_x]$, где $A_x = min_{i=\overline{0,N}}\, x_i$, $B_x = max_{i=\overline{0,N}}\, x_i$ в промежутках между узлами измерений x_i;

2) *Прогноз* – вычисление значений (предсказание поведения функции) *за* пределами интервала измерений $[A_x, B_x]$, в ближней к границам интервала зоне.

Для решения задач восполнения и прогноза строят такую непрерывную функцию $F(x)$, которая в узлах x_i , $i=0,1,2,\dots,N$ будет мало отличаться от имеющихся измеренных значений y_i. Такая функция $F(x)$ называется аппроксимирующей, а процесс ее построения аппроксимацией. В более общем случае аппроксимация – это приближение (замена) одного объекта другим, близким ему по некоторому признаку объектом, но, возможно, более простым по построению. Так, например, сложная нелинейная кривая, может быть аппроксимирована (приближена, заменена) ломаной (кусочно-линейной функцией), сложная форма планеты Земля часто аппроксимируется (приближается, заменяется) шаром или эллипсоидом.

Частным видом аппроксимирующих функций $F(x)$ являются интерполирующие функции – такие функции, которые *точно (без погрешности)* проходят через заданную систему точек (x_i, y_i), $i=0,1,2,\dots,N$. Для таких функций должно выполняться условие интерполирования:

$$y_i = F(x_i), \quad i=0,1,2,\dots,N. \tag{1}$$

Часто интерполирующую функцию ищут в виде полинома $y = P_n(a_n, a_{n-1},\dots, a_2, a_1, a_0 , x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ заданной степени n , определяя коэффициенты $a_n, a_{n-1},\ldots, a_2, a_1, a_0$ из условия (1).

В общем случае, аппроксимирующую функцию $y = F(a_m, a_{m-1},\ldots, a_2, a_1, a_0, x)$, зависящую от коэффициентов $a_m, a_{n-1},\ldots, a_2, a_1, a_0$, выбирают из некоторого множества функций, которые «схожи» по своему поведению с графиком заданной. Достаточно универсальным методом определения коэффициентов $a_m, a_{m-1},\ldots, a_2, a_1, a_0$ выбранной функции $F(a_m, a_{m-1},\ldots, a_2, a_1, a_0, x)$ является метод наименьших квадратов (МНК), согласно которому коэффициенты определяются из условия минимальности суммы квадратов отклонений функции F в точках x_i от заданных значений y_i, т.е. как решение задачи:

$$\sum_{i=0}^{N}\left(y_i - F(a_m, a_{m-1},\ldots,a_2,a_1,a_0,x_i)\right)^2 \longrightarrow \min .$$

Методические указания описывают алгоритмы построения интерполяционного многочлена Лагранжа, а также аппроксимирующей функций методом наименьших квадратов. Сформулированные задачи для самостоятельного решения позволят обучающимся отработать навыки их построения.

Вариант 0 предназначен для преподавателя дисциплины. Он содержит задачу, которая может быть использована в качестве примера построения алгоритма и программы для консультирования студентов по данной теме. Кроме основного задания сформулированы задания повышенной трудности.

1. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Пусть дана таблица известных значений функции $y = f(x)$

x_0	x_1	x_2	…	x_N
y_0	y_1	y_2	…	y_N

Построим многочлен $y = P_N(x)$ степени N, проходящий через точки (x_i, y_i), $i=0,1,2,\ldots,N$.

Многочлен $P_N(x) = a_N \cdot x^N + a_{N-1} \cdot x^{N-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$ можно рассматривать как скалярное произведение $P_N(x) = \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\varphi}(x)$ неизвестного вектора **a** = $(a_N, a_{N-1}, \ldots, a_1, a_0)$ и известной вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi_N(x), \varphi_{N-1}(x), \ldots, \varphi_1(x), \varphi_0(x))$, где $\varphi_i(x) = x^i$, $i=0,1,2,\ldots,N$.

Чтобы построить интерполяционный многочлен $P_N(x)$ следует определить $N+1$ штук неизвестных коэффициентов $a_N, a_{N-1}, \ldots, a_1, a_0$, которые можно найти из $N+1$ условий интерполирования $P_N(x_i)=y_i$, $i=0,1,2,\ldots,N$.

Выпишем условия интерполирования подробнее, варьируя индекс i:

$$i=0: \quad P_N\left(x_0\right) = a_N x_0^N + a_{N-1}x_0^{N-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0;$$

$$i=1: \quad P_N\left(x_1\right) = a_N x_1^N + a_{N-1}x_1^{N-1} + \ldots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1;$$

$$\ldots$$

$$i=N: \quad P_N\left(x_N\right) = a_N x_N^N + a_{N-1}x_N^{N-1} + \ldots + a_2 x_N^2 + a_1 x_N + a_0 = y_N.$$

Получилась система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_N, a_{N-1}, \ldots, a_1, a_0$ вида

$$\begin{pmatrix} x_0^N & x_0^{N-1} & \cdots & x_0^1 & 1 \\ x_1^N & x_1^{N-1} & \cdots & x_1^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-1}^N & x_{N-1}^{N-1} & \cdots & x_{N-1}^1 & 1 \\ x_N^N & x_N^{N-1} & \cdots & x_N^1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_N \\ a_{N-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Если среди узлов $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N$ нет повторяющихся (кратных), то матрица системы не вырождена. Определитель матрицы – определитель Вандермонда[1] – не равен нулю, и система однозначно разрешима. Следовательно, коэффициенты интерполяционного многочлена могут быть найдены, как её решение. Таким образом, интерполяционный многочлен по заданной сетке значений функции, без кратных узлов, может быть построен, причем построен *единственным образом*. Это означает, что все различные способы построе-

[1] *Александр Теофил Вандермонд (1735-1796) — французский математик.*

ния интерполяционного многочлена для фиксированной таблицы значений функции без кратных узлов ведут к построению одного и того же многочлена. Интерполяционный многочлен в этом случае может иметь лишь различные формы (Лагранжа, Ньютона и др.), алгоритмы построения которых обладают различной эффективностью в зависимости от типа решаемой задачи.

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Французский математик Ж. Лагранж[2] предложил искать интерполяционный многочлен следующим способом – он предложил взять в качестве коэффициентов многочлена $a_N, a_{N-1},\ldots, a_1, a_0$ заданные известные нам значения функции, т.е. положил, что $a_i = y_i$, $i=0, 1, \ldots, N$. А компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi_N(x), \varphi_{N-1}(x),\ldots, \varphi_1(x), \varphi_0(x))$ – считать неизвестными многочленами степени не выше N. Тогда искомый многочлен будет иметь вид:

$$P_N\left(x\right) = \sum_{k=0}^{N} y_k \cdot \varphi_k(x) .$$

Рассмотрим произвольное k-е условие интерполирования $P_N\left(x_k\right) = y_k$:

$$y_N\varphi_N(x_k) + y_{N-1}\varphi_{N-1}(x_k) + \ldots + y_k\varphi_k(x_k) + \ldots + y_1\varphi_1(x_k) + a_0\varphi_0(x_k) = y_k .$$

Условие будет выполняться, если при слагаемом с y_k в левой части равенства коэффициентная функция $\varphi_k(x_k)$ будет принимать значение, равное единице, а в остальных слагаемых функции $\varphi_j(x_k),\ j = 0,1,\ldots,N,\ j \neq k$ будут равны нулю. Для каждой функции $\varphi_k(x)$, $k = 0,1,\ldots,N$ эти условия имеют вид:

$$\varphi_k(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases},\quad i = 0,1,\ldots,N.$$

---

[2] *Жозе́ф Луи́ Лагра́нж* (1736-1813) — французский математик, астроном, механик.

Это значит, что многочлен N-ой степени $\varphi_k(x)$ имеет N нулей, т.е. в N узлах обращается в ноль и в одной точке равен единице. Но тогда по теореме Виета[3], которая связывает нули многочлена с его коэффициентами (теорема знакома школьникам для квадратичных многочленов), имеем

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \cdot (x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_N),$$

где λ_k – числовой коэффициент. Этот коэффициент определяется из условия интерполяции при $x = x_k$:

$$P_N\left(x_k\right) = y_N\varphi_N(x_k) + y_{N-1}\varphi_{N-1}(x_k) + \ldots + y_k\varphi_k(x_k) + \ldots + y_1\varphi_1(x_k) + a_0\varphi_0(x_k) = y_k$$

или

$$y_k\varphi_k(x_k) = y_k \cdot \lambda_k \cdot (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k - x_N) = y_k .$$

Откуда $\lambda_k = \dfrac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k - x_N)}$ и, следовательно вид многочлена $\varphi_k(x)$ определен:

$$\varphi_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_N)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k - x_N)} .$$

Многочлен $\varphi_k(x)$ можно записать как произведение дробей

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0,\, j\neq k}^{N} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} .$$

Таким образом, интерполяционный многочлен в форме Лагранжа имеет вид

$$L_N\left(x\right) = \sum_{k=0}^{N} y_k \prod_{j=0,\, j\neq k}^{N} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} . \qquad (3)$$

Здесь нами использовано часто употребимое обозначение многочлена Лагранжа, подчеркивающее фамилию его создателя (*Lagrange*) – $L_N\left(x\right)$.

---

[3] *Франсуá Виéт* (1540-1603) — французский математик

Формула Лагранжа дает явный аналитический вид интерполяционного многочлена. Алгоритмически вычисление значения многочлена Лагранжа степени N в заданной точке x реализуется двойным циклом (см. рисунок 1). Внешний цикл – цикл суммирования, внутренний – вычисление произведения в формуле (3).

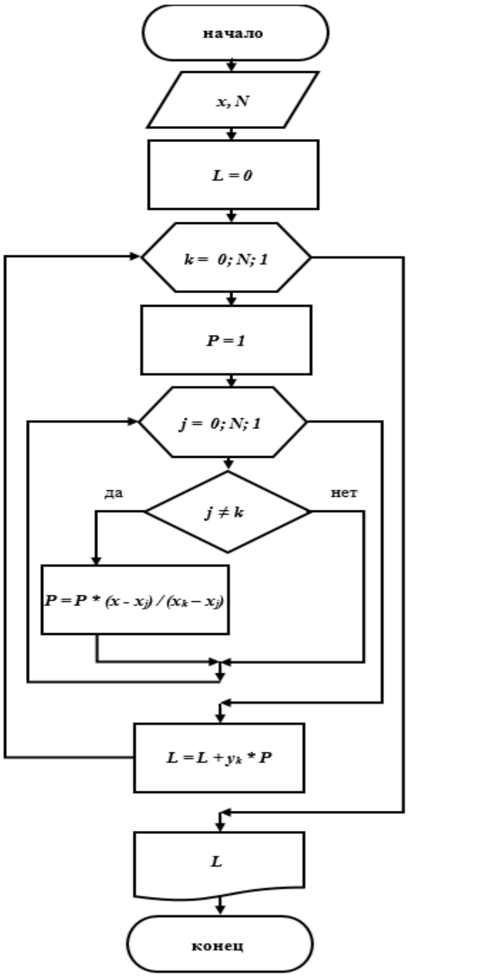

Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа

2. АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Первые работы, посвященные методу наименьших квадратов (МНК) для аналитического описания набора дискретных данных принадлежат К. Гауссу[4] и А. Лежандру[5]. Основной идеей метода является определение коэффициентов, входящих в описание аппроксимирующей функции $F(a_m, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0, x)$ из условия минимальности суммы квадратов отклонений функции F в узлах x_i от заданных табличных числовых значений y_i, т.е. как решение задачи:

$$S(a_m, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0) = \sum_{i=0}^{N} \left(y_i - F(a_m, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0, x_i) \right)^2 \longrightarrow \min , \quad (4)$$

где искомых коэффициентов ($m+1$), как правило, меньше, чем число узлов ($N+1$). Задача (4) – это задача на поиск экстремума функции, которая решается стандартным, известным в высшей математике алгоритмом:

1) следует найти частные производные функции $\dfrac{\partial S(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0)}{\partial a_j}$, $j = 0, 1, \ldots, m$ и приравнять их к нулю;
2) решить полученную систему уравнений

$$\frac{\partial S(a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0)}{\partial a_j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \qquad (5)$$

определив из неё $m+1$ неизвестный коэффициент $a_m, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$.

Поиск решения в общем случае системы скалярных нелинейных уравнений (5) может оказаться проблематичным. Для нахождения корней нелинейной системы (5) могут быть использованы такие численные методы, как метод простых итераций, метод Ньютона, метод наискорейшего спуска и др.

---

[4] *Иога́нн Карл Фри́дрих Га́усс (1777-1855) –немецкий математик, механик, физик, астроном.*
[5] *Адрие́н Мари́ Лежа́ндр (1752-1833) – французский математик.*

Для линейной относительно искомых коэффициентов функции $F(a_m, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0, x)$ система (5) будет системой линейных алгебраических уравнений, решить которую можно значительно проще, чем нелинейную. Это можно осуществить любым из хорошо зарекомендовавших себя на практике известных методов линейной алгебры (Крамера[6], Гаусса, LU-разложений и т.п.).

Иногда нелинейная функция $F(a_m, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0, x)$ допускает преобразования, приводящие к линейной системе вида (5). В этом случае осуществляют процесс «линеаризации».

Продемонстрируем последовательность алгоритма «линеаризации» на примере функции вида $y = F(a, b, c, d, x) = x^{\alpha} \cdot f(a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d)$. Здесь $\alpha \neq 0$ – заданный известный параметр, а неизвестные коэффициенты a_3, a_2, a_1, a_0 обозначены, соответственно как a, b, c, d ($a_3 = a,\ a_2 = b,\ a_1 = c,\ a_0 = d$).

По условию задачи (4), при всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ N,$ близкими должны быть значения:

$$
\begin{array}{rcll}
y_i & \approx & F(a, b, c, d, x_i) & \Rightarrow \\
y_i & \approx & x_i^{\alpha} \cdot f(a \cdot x_i^3 + b \cdot x_i^2 + c \cdot x_i + d) & \Rightarrow \\
y_i \cdot x_i^{-\alpha} & \approx & f(a \cdot x_i^3 + b \cdot x_i^2 + c \cdot x_i + d) & \Rightarrow \\
f^{(-1)}(y_i \cdot x_i^{-\alpha}) & \approx & a \cdot x_i^3 + b \cdot x_i^2 + c \cdot x_i + d. & (6)
\end{array}
$$

Здесь $f^{(-1)}$ – обозначение обратной функции к функции f. Правая часть выражения (6), содержащая неизвестные искомые коэффициенты $a, b, c, d,$ стала относительно них линейной.

Сформируем $\tilde{S}(a, b, c, d)$ – сумму (вида (4)) квадратов разностей выражений из строки (6) по всем узлам таблично заданной функции и будем искать наименьшее значение этой суммы:

---

[6] *Габриэ́ль Кра́мер (1704–1752) — швейцарский математик.*

$$\tilde{S}(a,b,c,d)=\sum_{i=0}^{N}\Big(f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})-(a\cdot x_i^3+b\cdot x_i^2+c\cdot x_i+d)\Big)^2 \longrightarrow \min .$$

Система (5) для $\tilde{S}(a,b,c,d)$ будет иметь вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\tilde{S}(a,b,c,d)}{\partial a}=2\sum\limits_{i=0}^{N}\Big(f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})-(a\cdot x_i^3+b\cdot x_i^2+c\cdot x_i+d)\Big)\cdot(-x_i^3)=0\\ \dfrac{\partial\tilde{S}(a,b,c,d)}{\partial b}=2\sum\limits_{i=0}^{N}\Big(f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})-(a\cdot x_i^3+b\cdot x_i^2+c\cdot x_i+d)\Big)\cdot(-x_i^2)=0\\ \dfrac{\partial\tilde{S}(a,b,c,d)}{\partial c}=2\sum\limits_{i=0}^{N}\Big(f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})-(a\cdot x_i^3+b\cdot x_i^2+c\cdot x_i+d)\Big)\cdot(-x_i)=0\\ \dfrac{\partial\tilde{S}(a,b,c,d)}{\partial d}=2\sum\limits_{i=0}^{N}\Big(f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})-(a\cdot x_i^3+b\cdot x_i^2+c\cdot x_i+d)\Big)\cdot(-1)=0\end{cases}$$

Или, после элементарных преобразований, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}a\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^6+b\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^5+c\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^4+d\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3=\sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\cdot x_i^3\\ a\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^5+b\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^4+c\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3+d\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^2=\sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\cdot x_i^2\\ a\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^4+b\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3+c\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^2+d\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^1=\sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\cdot x_i^1\\ a\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3+b\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^2+c\cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^1+d\cdot(N+1)=\sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\end{cases}.$$

Запишем эту систему в матричном виде ***Av***=***B***:

$$\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^6 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^5 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^4 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3\\ \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^5 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^4 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3 & \cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^2\\ \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^4 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3 & \cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^1\\ \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^3 & \cdot\sum\limits_{i=0}^{N}x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{N}x_i^1 & (N+1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\cdot x_i^3\\ \sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\cdot x_i^2\\ \sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\cdot x_i^1\\ \sum\limits_{i=0}^{N}f^{(-1)}(y_i\cdot x_i^{-\alpha})\end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из системы (7) находятся коэффициенты a,b,c и d аппроксимирующей функции $F(a, b, c, d, x)$. Алгоритм вычислений показан на рисунке 2.

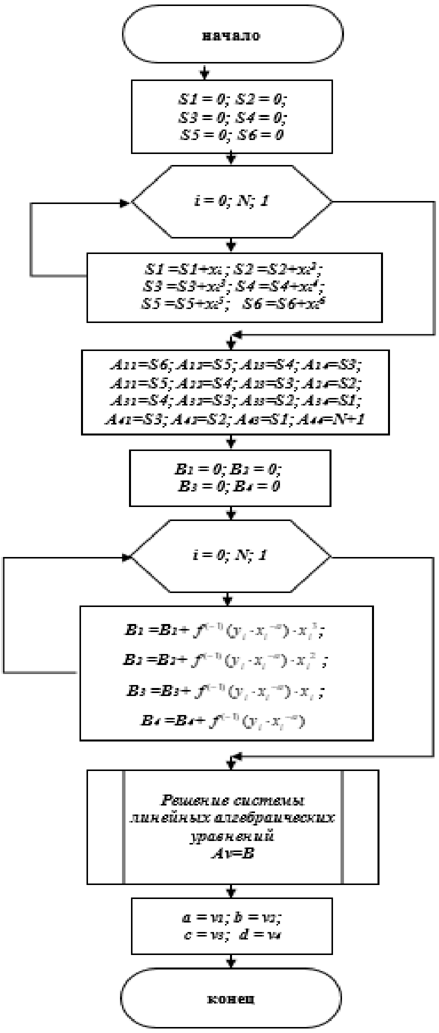

Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма вычисления коэффициентов a,b,c,d аппроксимирующей функции

$$y = x^{\alpha} \cdot f(a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d)$$

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Данные вариантов:

1) Таблица значений данных измерений $(x_i, y_i), i = \overline{0,N}$ на отрезке $[A_x, B_x]$, где $A_x = min_{i=\overline{0,N}}\, x_i$, $B_x = max_{i=\overline{0,N}}\, x_i$.
2) Точка $X^* \in [A_x, B_x]$.
3) Аппроксимирующая функции вида $y = F(x) = x^\alpha \cdot f(a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d), \alpha = \pm 1$.
4) Степень m многочлена Лагранжа.

3.1 Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

Задание. Разработать VBA-программу, вычисляющую значение интерполяционного многочлена Лагранжа $L_m(x)$ заданной степени m в точке X^*, используя *m+1* штук ближайших к X^* узлов таблицы исходных данных измерений $(x_i, y_i), i = \overline{0,N}$.

Задание (*). В задании, приведенном выше, числовые значения точки X^* ($A_x < X^* < B_x$) и степени *m (0 < m < N)* могут варьироваться и вводятся в программу с клавиатуры. Выбор ближайших узлов к X^* осуществляется программно. Вычисления многочлена Лагранжа реализуется процедурой.

Задание (**). Разработать VBA-программу, вычисляющую значение интерполяционного многочлена Ньютона[7] (1-я формула) $P_m(x)$ заданной степени m в точке X^*, используя отсортированный по возрастанию расстояний от точки X^* *m+1* ближайших узлов таблицы исходных данных измерений $(x_i, y_i), i = \overline{0,N}$. (Формулы и алгоритм построения многочлена Ньютона изучить самостоятельно.)

---

[7] *Исаа́к Нью́то́н (1642–1727) — английский физик, математик, механик и астроном.*

3.2 Метод наименьших квадратов

Задание.

1) Для аппроксимирующей функции $y = F(x)$ осуществить преобразование линеаризации и аналитически получить методом наименьших квадратов формулы для коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений.
2) *Разработать* VBA-программу, вычисляющую:
   a. значения коэффициентов a, b, c, d методом Крамера;
   b. значения аппроксимирующей функции $F(x)$ в узлах $x_i, i = \overline{0, N}$ и в точке X^*.

Задание (*). В задании выше числовые значения точки X^* ($A_x < X^* < B_x$) могут варьироваться и водятся в программу с клавиатуры. Вычисления коэффициентов a, b, c, d и значений функции $F(x)$ реализуется процедурами.

Вариант 0

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	5,888	6,285	6,730	6,861	7,464	8,245	8,860	10,356	10,378	10,474
y_i	0,721	0,380	-0,322	-0,434	-0,410	-0,415	-0,413	-0,409	-0,493	-0,485

i	10	11	12	13	14	15	16
x_i	10,655	10,892	12,558	13,371	13,558	13,788	13,962
y_i	-0,385	-0,379	-0,415	-0,449	-0,403	-0,437	-0,431

2) X*= 7.5 3) $F(x) = \frac{\sqrt[3]{b \cdot x^2 + c \cdot x + d}}{x}$ 4) $m = 4$

Вариант 1

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0,302	0,401	0,520	0,644	0,870	1,806	2,969	3,218	4,434	5,257
y_i	0,155	0,594	2,087	13,120	2,206	1,224	0,835	0,844	0,666	0,655

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	5,258	6,320	6,700	7,213	7,943	8,087	8,986	11,673	11,716
y_i	0,551	0,514	0,440	0,459	0,397	0,380	0,364	0,316	0,338

2) X*= 2.5 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x}}$ 4) $m = 5$

Вариант 2

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	3,094	4,182	4,467	5,160	5,984	6,069	6,437	6,771	6,860	7,034
y_i	0,302	0,331	0,276	0,256	0,265	0,228	0,218	0,188	0,200	0,193

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	7,052	7,123	7,577	7,691	7,803	7,986	8,468	8,592	11,010	11,943
y_i	0,163	0,176	0,188	0,183	0,162	0,174	0,139	0,152	0,163	0,146

2) X*= 9.5 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^3 + c \cdot x + d}}$ 4) m = 5

Вариант 3

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0,960	1,007	1,306	1,638	2,068	2,388	2,443	3,124	4,153	4,368
y_i	0,213	0,222	0,252	0,259	0,241	0,223	0,279	0,235	0,241	0,304

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	5,090	5,991	6,502	7,003	7,059	7,966	8,030	8,132
y_i	0,324	0,336	0,349	0,330	0,380	0,327	0,345	0,407

2) X*= 2.7 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + d}}$ 4) m = 4

Вариант 4

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,583	2,667	3,312	3,748	4,151	4,271	4,337	4,428	4,663	5,283
y_i	0,600	0,757	0,771	0,780	0,714	0,789	0,648	0,649	0,794	0,722

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	5,854	6,697	6,855	7,132	8,221	8,527	9,115	9,143	9,147
y_i	0,650	0,650	0,722	0,722	0,722	0,721	0,721	0,649	0,793

2) X*= 5.5 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt{b \cdot x^2 + c \cdot x + d}}$ 4) m = 5

Вариант 5

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	0,304	0,585	1,063	1,337	2,144	2,454	3,801	3,939	5,387	5,416
y_i	0,167	1,188	2,890	4,763	8,164	10,531	14,016	17,792	23,947	23,264

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	7,214	7,374	7,378	7,489	7,564	7,849	8,951	9,307	9,606	9,762
y_i	33,843	33,732	36,583	43,123	40,156	49,199	38,543	41,541	23,812	33,843

2) X*= 8.1 3) $F(x) = x \cdot \sqrt{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x}$ 4) m = 6

Вариант 6

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,008	2,308	3,413	4,002	4,018	5,022	5,112	5,366	5,403	5,506
y_i	2,415	4,921	6,581	8,145	10,723	16,727	20,849	23,183	30,713	29,871

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	6,488	6,806	6,952	7,195	8,347	9,159	9,473	9,872
y_i	45,420	47,181	66,053	68,314	84,964	86,846	106,863	118,983

2) X*= 4.5 3) $F(x) = x \cdot \sqrt{a \cdot x^3 + c \cdot x + d}$ 4) m = 4

Вариант 7

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1,683	1,936	2,416	2,531	3,074	3,268	3,846	4,004	5,416	5,586
y_i	1,326	3,250	5,588	7,003	12,223	13,603	17,849	27,833	34,719	42,512

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	6,086	7,034	7,052	7,123	7,577	7,691	7,831	7,986	8,468
y_i	49,878	71,688	75,872	96,308	100,241	113,963	115,872	159,079	145,441

2) X*= 5.7 3) $F(x) = x \cdot \sqrt{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + d}$ 4) m = 5

Вариант 8

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	4,909	5,709	6,237	6,881	7,071	7,239	7,287	7,522	7,771	9,069
y_i	7,071	11,056	15,209	23,578	26,044	27,715	32,147	44,925	41,555	51,720

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	9,183	10,088	10,605	10,675	10,737	10,881	11,119	11,563	11,72	11,788
y_i	57,144	76,699	76,192	82,894	98,817	87,311	93,986	112,087	131,984	115,312

2) X*= 8.4 3) $F(x) = x \cdot \sqrt{b \cdot x^2 + c \cdot x + d}$ 4) m = 6

Вариант 9

1)

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	4,714	4,921	5,433	6,181	6,531	8,369	8,403	8,652	9,012	9,294
y_i	0,033	0,027	0,028	0,024	0,021	0,018	0,013	0,012	0,010	0,010

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	10,238	10,514	11,71	11,881	11,997	12,004	12,158	12,414
y_i	0,009	0,007	0,007	0,006	0,006	0,005	0,005	0,009

2) X*= 7.1 3) $F(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x}}$ 4) m = 4

Вариант 10

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,223	2,493	2,678	2,694	2,699	3,037	3,399	3,887	4,478	4,662
y_i	0,264	0,228	0,150	0,123	0,124	0,085	0,088	0,061	0,064	0,045

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	4,832	5,193	5,599	6,026	6,055	6,341	6,364	7,311	7,533
y_i	0,039	0,038	0,030	0,030	0,024	0,024	0,018	0,018	0,016

2) X*= 4.1 3) $F(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{a \cdot x^3 + c \cdot x + d}}$ 4) m = 5

Вариант 11

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1,465	4,577	4,992	5,400	6,165	6,203	6,788	7,449	9,191	9,305
y_i	0,260	0,175	0,130	0,094	0,064	0,054	0,039	0,035	0,024	0,022

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	11,435	11,717	12,993	13,104	13,193	14,186	15,132	15,185	15,342	15,779
y_i	0,014	0,015	0,013	0,010	0,010	0,008	0,007	0,007	0,006	0,006

2) X*= 10.7 3) $F(x) = \frac{1}{x\cdot\ \sqrt{a\cdot x^3+b\cdot x^2+d}}$ 4) m = 6

Вариант 12

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	8,782	8,975	10,402	11,101	11,257	13,120	13,274	13,465	13,504	14,086
y_i	0,126	0,098	0,058	0,045	0,044	0,033	0,031	0,022	0,019	0,020

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	14,182	15,741	15,947	15,968	16,572	17,237	17,454	20,170
y_i	0,014	0,014	0,012	0,011	0,011	0,008	0,008	0,008

2) X*= 9.5 3) $F(x) = \frac{1}{x\cdot\ \sqrt{b\cdot x^2+c\cdot x+d}}$ 4) m = 4

Вариант 13

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	10,592	10,791	11,047	12,573	13,317	13,352	13,621	13,626	13,683	13,887
y_i	1,335	1,692	1,432	1,805	1,688	1,907	1,778	1,820	2,047	2,090

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	14,368	15,281	15,774	16,230	16,282	17,448	17,612	17,632	17,786
y_i	1,976	2,214	1,844	1,875	2,117	2,150	2,401	1,993	2,021

2) X*= 12.1 3) $F(x) = \frac{\sqrt{a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x}}{x}$ 4) m = 5

Вариант 14

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,211	3,409	3,738	3,892	4,579	4,711	4,864	5,199	6,369	6,647
y_i	4,353	4,008	5,007	5,112	4,741	4,349	5,414	5,510	4,586	5,180

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	6,896	7,034	7,453	8,212	8,373	8,429	8,489	8,943	9,336	9,343
y_i	4,809	4,882	6,053	5,022	5,657	6,305	6,387	5,292	5,357	4,809

2) X*= 6.0 3) $F(x) = \frac{\sqrt{a\cdot x^3+c\cdot x+d}}{x}$ 4) m = 6

Вариант 15

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	3,438	3,609	3,861	4,213	4,365	4,947	5,089	5,863	6,279	6,395
y_i	2,719	2,661	3,123	3,309	3,485	3,654	3,121	3,609	3,370	3,875

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	8,039	8,279	8,421	9,013	9,418	9,921	10,129	11,445
y_i	4,125	4,669	4,796	4,921	5,042	4,691	4,317	5,390

2) X*= 7.4 3) $F(x) = \frac{\sqrt{a\cdot x^3+b\cdot x^2+d}}{x}$ 4) m = 4

Вариант 16

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	4,513	4,815	5,151	6,454	6,494	7,716	7,974	9,514	9,638	9,897
y_i	2,478	2,100	1,983	2,084	1,644	1,951	1,904	1,696	1,834	1,643

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	10,025	10,456	10,957	11,749	12,143	12,689	14,288	15,251	15,361
y_i	1,764	1,747	1,732	1,406	1,706	1,695	1,379	1,372	1,668

2) X*= 8.3 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x}}$ 4) m = 5

Вариант 17

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	5,063	5,102	5,158	6,342	6,383	6,998	7,303	7,732	7,746	8,634
y_i	-0,733	-0,811	-0,890	-0,726	-0,885	-0,884	-0,722	-0,801	-0,881	-0,720

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	9,309	10,574	10,904	11,043	11,309	11,696	11,968	12,373	12,433	12,473
y_i	-0,719	-0,878	-0,878	-0,877	-0,797	-0,877	-0,877	-0,717	-0,796	-0,796

2) X*= 9.1 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{a \cdot x^3 + c \cdot x + d}}$ 4) m = 6

Вариант 18

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2,109	2,393	5,007	5,223	5,645	7,017	7,883	8,393	8,492	8,953
y_i	1,134	-2,947	-1,507	-1,186	-1,234	-1,187	-1,156	-1,134	-1,229	-0,994

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	9,327	9,486	10,254	10,589	11,768	11,811	12,493	13,790
y_i	-1,195	-1,187	-0,966	-0,961	-0,957	-1,060	-1,056	-1,053

2) X*= 6.6 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + d}}$ 4) m = 4

Вариант 19

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	14,328	14,399	14,502	14,976	15,506	16,538	16,944	16,950	17,312	17,404
y_i	-1,265	-1,418	-1,573	-1,442	-1,453	-1,611	-1,476	-1,636	-1,648	-1,358

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	17,619	18,355	18,421	18,739	19,013	20,406	20,462	20,521	20,634
y_i	-1,683	-1,695	-1,551	-1,561	-1,571	-1,581	-1,750	-1,760	-1,771

2) X*= 18.1 3) $F(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{b \cdot x^2 + c \cdot x + d}}$ 4) m = 5

Вариант 20

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	20,524	22,602	22,997	23,103	23,288	25,948	26,784	27,156	27,211	27,778
y_i	294,55	279,29	319,42	270,86	310,91	320,14	295,66	302,29	342,08	312,20

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	27,853	28,798	29,680	29,712	31,381	31,673	34,782	35,466	35,617	35,683
y_i	386,34	384,95	345,66	371,18	356,26	332,75	294,75	222,82	158,57	310,58

2) X*= 28.1 3) $F(x) = x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x}$ 4) m = 6

Вариант 21

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1,206	1,705	1,862	2,307	2,382	2,526	3,126	3,402	3,489	3,502
y_i	1,216	1,886	2,222	2,448	3,190	3,606	4,326	4,114	3,639	3,410

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	3,753	3,947	4,003	4,183	4,205	4,880	5,273	5,288
y_i	-5,779	-6,329	-9,598	-10,428	-13,392	-15,382	-15,864	-16,038

2) X*= 5.0 3) $F(x) = x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x^3 + c \cdot x + d}$ 4) m = 4

Вариант 22

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	7,808	8,181	8,454	8,473	8,559	9,302	9,842	10,594	11,048	11,727
y_i	14,699	18,961	17,705	19,228	17,591	11,902	-14,049	-20,585	-28,946	-31,263

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	13,154	14,022	14,611	15,422	15,692	15,830	16,247	16,545	16,781
y_i	-46,360	-57,594	-64,387	-71,399	-64,345	-78,303	-76,807	-101,87	-90,112

2) X*= 11.0 3) $F(x) = x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + d}$ 4) m = 5

Вариант 23

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	5,003	5,117	5,639	5,721	5,857	6,139	6,533	7,784	7,893	8,137
y_i	13,564	13,763	12,310	11,487	9,347	6,300	12,787	14,940	21,965	20,854

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	8,278	8,403	8,521	9,601	9,971	10,343	11,271	11,303	12,356	12,854
y_i	26,507	35,869	35,801	35,136	38,100	50,254	44,189	47,319	61,733	53,758

2) X*= 11.2 3) $F(x) = x \cdot \sqrt[3]{b \cdot x^2 + c \cdot x + d}$ 4) m = 6

Вариант 24

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	21,056	21,144	22,441	22,725	23,253	23,468	24,739	25,058	25,298	25,829
y_i	0,0215	0,0185	0,0222	0,0254	0,0381	-0,0365	-0,0239	-0,0175	-0,0152	-0,0166

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	26,204	26,601	26,806	27,039	27,942	28,704	28,713	28,748
y_i	-0,0113	-0,0105	-0,0098	-0,0092	-0,0106	-0,0101	-0,0087	-0,0083

2) X*= 24.1 3) $F(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x}}$ 4) m = 4

Вариант 25

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	7,214	7,803	7,806	7,988	8,464	8,694	8,838	8,996	9,062	9,194
y_i	0,0924	0,1326	-0,1036	-0,0712	-0,0581	-0,0502	-0,0544	-0,0447	-0,0408	-0,0376

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	9,463	9,585	9,666	9,718	9,826	10,150	10,191	10,679	10,955
y_i	-0,0325	-0,0335	-0,0315	-0,0270	-0,0255	-0,0242	-0,0253	-0,0197	-0,0187

2) X*= 10.1 3) $F(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x^3 + c \cdot x + d}}$ 4) m = 5

Вариант 26

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1,071	1,687	1,973	2,363	2,733	2,905	3,038	3,345	3,987	4,029
y_i	0,4705	0,7556	0,2912	0,1691	0,1333	0,1013	0,0728	0,0650	0,0490	0,0372

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	4,211	4,334	4,576	4,777	5,045	5,204	5,506	5,546	5,796	6,204
y_i	0,0337	0,0295	0,0236	0,0231	0,0169	0,0169	0,0138	0,0153	0,0127	0,0105

2) X*= 2.5 3) $F(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + d}}$ 4) m = 6

Вариант 27

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	3,802	4,111	4,956	5,106	5,875	6,757	6,923	7,029	7,602	7,661
y_i	0,129	0,092	0,083	0,085	0,089	0,072	0,075	0,099	-0,143	-0,072

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	8,078	8,531	9,489	9,519	9,894	10,362	10,936	11,576
y_i	-0,049	-0,038	-0,030	-0,032	-0,029	-0,026	-0,021	-0,020

2) X*= 6.3 3) $F(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{b \cdot x^2 + c \cdot x + d}}$ 4) m = 4

Вариант 28

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	4,215	4,233	4,825	5,768	5,861	5,898	5,909	5,941	6,014	6,717
y_i	-1,4702	-1,1958	-1,4542	-1,3163	-1,1802	-1,1764	-1,3034	-1,4302	-1,1676	-1,1653

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	6,913	6,978	7,241	7,394	7,463	7,586	7,859	8,030	8,381
y_i	-1,2904	-1,2886	-1,1582	-1,2854	-1,1556	-1,1545	-1,2816	-1,2805	-1,2796

2) X*= 6.4 3) $F(x) = \frac{\sqrt[3]{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x}}{x}$ 4) m = 5

Вариант 29

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	3,086	3,289	3,682	4,289	4,393	6,235	6,485	6,688	8,961	10,309
y_i	1,3232	1,3176	1,3665	1,2526	1,2659	1,5574	1,4220	1,4262	1,4293	1,5748

i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i	10,933	11,127	11,197	12,811	13,415	15,373	16,708	17,151	17,502	17,675
y_i	1,2913	1,5794	1,2930	1,2936	1,2942	1,2946	1,2950	1,5831	1,4395	1,4398

2) X*= 5.8 3) $F(x) = \frac{\sqrt[3]{a \cdot x^3 + c \cdot x + d}}{x}$ 4) m = 6

Вариант 30

1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	7,264	7,450	7,496	7,529	7,716	7,806	8,116	8,798	8,965	9,028
y_i	-1,310	-1,601	-1,601	-1,601	-1,601	-1,310	-1,455	-1,601	-1,601	-1,310

i	10	11	12	13	14	15	16	17
x_i	9,201	9,260	9,326	9,457	9,846	10,202	10,422	10,804
y_i	-1,309	-1,600	-1,455	-1,309	-1,309	-1,600	-1,309	-1,599

2) X*= 9.6 3) $F(x) = \frac{\sqrt[3]{a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + d}}{x}$ 4) m = 4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи для самостоятельной работы следует выполнять по принципу «от простого – к сложному», постепенно дополняя алгоритм и программу необходимыми действиями следующего шага, детализируя, уточняя сделанное, продвигаясь тем самым к цели. На каждом этапе разработки программы тестируйте ее на простых примерах с известными Вам ответами, добиваясь правильного выполнения.

СПИСОК КОНТРОЛЬНЫХ ВОПРОСОВ

1. Что такое аппроксимация?
2. Какой процесс называется интерполяцией?
3. Как обосновывается единственность построения интерполяционного многочлена по заданной сетке узлов в отсутствии кратных?
4. В каком виде предложил искать интерполяционный многочлен Лагранж?
5. Какова расчетная формула интерполяционного многочлена Лагранжа?
6. Какова идея метода наименьших квадратов?
7. Для чего необходима процедура «линеаризации» искомой функции в методе наименьших квадратов?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пантина, И. В. Вычислительная математика [Электронный ресурс] : учебник / И. В. Пантина, А. В. Синчуков. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: МФПУ Синергия, 2012. - 176 с.
2. Численные методы. Практикум : учеб. пособие / А.В. Пантелеев, И.А. Кудрявцева. — М.: ИНФРА-М, 2017. - 512 с.
3. Численные методы в математическом моделировании: Уч. пос./ Н.П. Савенкова и др. - 2 изд., исп. и доп. - М.: АРГАМАК-МЕДИА: ИНФРА-М, 2014. - 176 с.
4. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование : учеб. пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. — М. : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2017. - 336 с.
5. Зализняк, В. Е. Теория и практика по вычислительной математике [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В. Е. Зализняк, Г. И. Щепановская. - Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2012. - 174 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кризский Владимир Николаевич
Косарев Олег Валерьевич
Журов Геннадий Николаевич

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА:
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ, АППРОКСИМАЦИЯ

Методические указания
к практическим занятиям

Компьютерная верстка Кризский В.Н.

Подписано в печать
Формат 60х84 1/16 Печать ризография. Гарнитура «Таймс».
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ № .

г. Санкт-Петербург