Общие рекомендации

Студенты первого курса дневного отделения обязаны выполнить четыре типовых расчета: два в первом и два во втором семестре. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе. Каждый типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, чертежи и рисунки необходимо исполнить на миллиметровке, подклеить затем их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач необходимо делать достаточно подробные пояснения. Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

К типовому расчету даются краткие методические указания, принимая которые во внимание и пользуясь указанной литературой, студент может приступить к выполнению типового расчета, не дожидаясь, когда необходимый материал будет изложен на лекции.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ "КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ"

Методические указания

Типовой расчет содержит шесть заданий.

1. Выполнение первого задания требует знания канонических уравнений кривых второго порядка и уравнения прямой линии на плоскости.

Решим типовую задачу.

Задача 1. Фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. Эллипс проходит через точку $M(-2;1,5)$. Составить уравнение этого эллипса.

Решение. Обозначим через a_1 и b_1 полуоси данной гиперболы, через a и b - полуоси искомого эллипса. Имеем $a_1^2=9, b_1^2=4$, откуда $c_1^2=a_1^2+b_1^2=13$. Так как фокусы эллипса совпадают с фокусами данной гиперболы, то и для эллипса $c^2=c_1^2=13$. Уравнение эллипса ищем в виде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Так как точка $M(-2;1,5)$ принадлежит эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса и, кроме того, выполнено соотношение $a^2-b^2=13$. Таким образом, для определения a и b имеем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{(-2)^2}{a^2} + \dfrac{(1,5)^2}{b^2} = 1; \\ a^2 - b^2 = 13. \end{cases}$$

Обозначив $b^2 = t\,(t > 0)$ и $a^2 = 13 + t$,

получим $\dfrac{4}{13+t} + \dfrac{9}{4t} = 1, a^2 = 13 + t.$

Решая, находим $t = b^2 = 3, a^2 = 16$ (рис.1).

Ответ: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{3} = 1.$

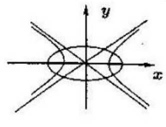

Рис.1

II. ***Во втором задании требуется привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка, выполнив последовательно поворот, а затем параллельный перенос координатных осей.***

Задача 2. Дано уравнение кривой второго порядка $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 52x - 64y + 164 = 0$. Выполнив поворот и параллельный перенос координатных осей, получить каноническое уравнение кривой и построить ее в исходной системе координат.

Решение. Выполняем поворот осей по формулам $x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$; $y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$. Подставим эти выражения для x и y в исходное уравнение и выделим коэффициент при $x_1 y_1$:

$$\begin{aligned} &5(x_1^2\cos^2\alpha - 2x_1y_1\cos\alpha\sin\alpha + y_1^2\sin^2\alpha) + 4(x_1^2\cos\alpha\sin\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)x_1y_1 - \\ &-y_1^2\sin\alpha\cos\alpha) + 8(x_1^2\sin^2\alpha + 2x_1y_1\sin\alpha\cos\alpha + y_1^2\cos^2\alpha) - \\ &-52(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha) - 64(x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha) + 164 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Приравняв нулю коэффициент при $x_1 y_1$, получаем:

$$-10\cos\alpha\sin\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 16\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

откуда $(tg\alpha)_1 = 2; (tg\alpha)_2 = -1/2$.

Зная $tg\alpha$, можно найти $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам тригонометрии:

$\sin\alpha = \pm\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}; \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$. Если угол поворота α условиться считать острым, то в этих формулах надо брать знак плюс, и для $tg\alpha$ надо взять также положительное решение. Выберем, например, угол поворота $\alpha : tg\alpha = 2$, найдем $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}; \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, подставим их в (1).

После вычисления коэффициентов получим уравнение:

$$9x_1^2 + 4y_1^2 - 36\sqrt{5}x_1 + 8\sqrt{5}y_1 + 164 = 0.$$

В полученном уравнении выделим полные квадраты двучленов $x_1 + x_0$ и $y_1 + y_0$:

$9(x_1 - 2\sqrt{5})^2 + 4(y_1 + \sqrt{5})^2 - 36 = 0.$

Выполнив параллельный перенос по формулам $x_1 - 2\sqrt{5} = X, y_1 + \sqrt{5} = Y$, получим в системе $XO'Y$ уравнение кривой $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$: это эллипс с полуосями 2 и 3 соответственно (рис.2).

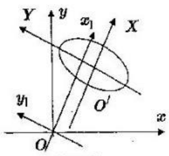

Рис. 2

III. ***Выполнение третьего задания предполагает знание уравнений прямой на плоскости и в пространстве и уравнений плоскости.***

Решим типовую задачу.

Задача 3. Провести плоскость через перпендикуляры из точки $A(5;2;-1)$ к плоскостям $2x - y + 3z + 23 = 0$ и $2x + 2y + z - 8 = 0$. Найти расстояние от основания первого перпендикуляра до второй плоскости.

Решение.

1. Обозначим через α_1 первую плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$, а через α_2 - вторую плоскость $2x + 2y + z - 8 = 0$. Очевидно, что в качестве нормального вектора $\overline{N}$ искомой плоскости можно взять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{2;-1;3\}$ и $\vec{n}_2 = \{2;2;1\}$ данных плоскостей α_1 и α_2:

$$\overrightarrow{N} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Теперь, используя уравнение плоскости, проходящей через данную точку $A(5;2;-1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{-7;4;6\}$, получаем $-7(x-5) + 4(y-2) + 6(z+1) = 0$ или $-7x + 4y + 6z + 33 = 0$.

2. Найдем проекцию P точки $A(5;2;-1)$ на плоскость α_1. Вектор $\vec{n}_1 = \{2;-1;3\}$ будет направляющим вектором перпендикуляра AP, то есть $\vec{s}_1 = \{2;-1;3\}$. Поэтому каноническое уравнение этого перпендикуляра имеет вид $\dfrac{(x-5)}{2} = \dfrac{(y-2)}{-1} = \dfrac{(z+1)}{3}$.

Приводим данные уравнения к параметрическому виду, приравнивая к t каждое из трех данных отношений: $x = 5 + 2t,\ y = 2 - t,\ z = -1 + 3t$.

Подставляя полученные значения x, y, z в уравнение плоскости α_1: $2x - y + 3z + 23 = 0$, получаем: $2(5+2t) - (2-t) + 3(-1+3t) + 23 = 0$, откуда находим значение параметра, соответствующее точке P пересечения прямой AP с данной плоскостью $\alpha_1 : t = -2$.

Находим координаты P: $x_0 = 5 + 2(-2) = 1$; $y_0 = 2 - (-2) = 4$; $z_0 = -1 + 3(-2) = -7$, то есть $P(1;4;-7)$.

3.Используя формулу расстояния от точки P до плоскости α_2, находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2\cdot 1 + 2\cdot 4 - 7 - 8|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 5/3.$$

Ответ: искомая плоскость $-7x + 4y + 6z + 33 = 0$, а расстояние от основания перпендикуляра AP на плоскость α_1 до плоскости α_2 равно 5/3.

Расчетные задания

I

1. Написать уравнение эллипса, проходящего через точку пересечения гиперболы $x^2 - y^2 = 2$ с прямой $x + y - 2 = 0$, если известно, что фокусы эллипса совпадают с фокусами гиперболы.

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ при условии, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}25$.

3. Написать уравнение такой окружности, чтобы ее диаметром оказался отрезок прямой $x + y = 4$, заключенный между осями координат.

4. Большая ось эллипса втрое больше его малой оси. Составить каноническое уравнение этого эллипса, если он проходит через точку $M\left(3, \sqrt{3}\right)$.

5. Дана гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку $M(4,6)$ и имеющего фокусы, которые совпадают с фокусами данной гиперболы.

6. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 8x$ с эллипсом, у которого правый фокус совпадает с фокусом этой параболы, большая полуось равна 4 и фокусы лежат на оси $0x$.

7. Фокусы гиперболы лежат в точках $F_1(-\sqrt{7},0)$ и $F_2(\sqrt{7},0)$. Гипербола проходит через точку $A(2,0)$. Найти уравнения ее асимптот.

8. Найти параметр p параболы $y^2 = 2px$, если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

9. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 4x$ с прямой, проходящей через фокус этой параболы параллельно ее директрисе.

10. Через правый фокус гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$ проведены прямые, параллельные ее асимптотам. Определить точки пересечения этих прямых с гиперболой.

11. Написать уравнение окружности, проходящей через начало координат, центр которой совпадает с фокусом параболы $y^2 = 8x$.

12. Оси гиперболы совпадают с осями координат. Гипербола проходит через точки пересечения параболы $x^2 = 2y$ с прямой $x - 2y + 6 = 0$. Составить уравнение этой гиперболы.

13. Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса

совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6.

14. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3,-1)$, и ее действительная ось лежит на оси $0x$, а центр - в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2+y^2=10$.

15. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а осью симметрии является ось $0x$, если известно, что расстояние от ее фокуса до центра окружности $x^2+y^2-10x-8y+25=0$ равно 5.

16. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2-y^2=8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2=12x$ с гиперболой $8x^2-y^2=8$.

17. Вычислить расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ до ее асимптоты. Найти эксцентриситет этой гиперболы.

18. Найти точки пересечения параболы $y^2=x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси $0x$ и радиус, равный 5.

19.Составить уравнение эллипса, если его фокусы совпадают с фокусами гиперболы $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$, а эксцентриситет эллипса равен 3/5.

20. Окружность имеет центр в левой вершине гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ и радиус, равный вещественной полуоси этой гиперболы. Найти точки пересечения этой окружности с асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$.

21. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon=3/2$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$.

22. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x+y=4$, вырезанной параболой $y^2=2x$.

23. Найти расстояние от фокуса параболы $y=\frac{1}{8}x^2$ до прямой $3x+4y+2=0$.

24. Написать уравнение окружности, проходящей через точки $M(3,0)$ и $N(-1,2)$, если известно, что ее центр лежит на прямой $x-y+2=0$.

25. Вычислить расстояние от центра окружности $x^2+y^2=10x$ до асимптот гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$.

26. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8.

27. В эллипс $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

28. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5,0)$ и $B(1,4)$, если центр ее лежит на прямой $x+y=3$.

29. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 0,8, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы.

30. Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\left(\sqrt{40},2\right)$ и имеющей асимптоты $y=\pm\frac{1}{3}x$.

II

Выполнив последовательно преобразования координат: поворот, а затем параллельный перенос координатных осей, преобразовать к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить ее в исходной системе координат, а также найти параметры кривой.

1. $3x^2-4xy+4=0$
2. $13x^2-10xy+13y^2+18\sqrt{2}x-54=0$
3. $x^2+2xy+y^2-2x-2y-4=0$
4. $x^2+4xy+y^2+6x+6y-6=0$
5. $3x^2+10xy+3y^2-24\sqrt{2}x-24\sqrt{2}y+64=0$
6. $x^2+xy+y^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-1=0$
7. $2xy-4x-2y+3=0$
8. $4xy+3y^2-4y-36=0$
9. $5x^2+4xy+8y^2-36=0$
10. $x^2-2xy+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-4=0$
11. $3x^2+6xy+3y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-20=0$
12. $4x^2+24xy+11y^2-24x-2y-19=0$
13. $4x^2-8xy+4y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4=0$
14. $4xy+3y^2-4x-6y-33=0$
15. $3x^2-4xy+3y^2+6x-4y-2=0$
16. $13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2+48\sqrt{3}x-48y+144=0$

17. $x^2-2xy+y^2-2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+8=0$
18. $5x^2+8xy+5y^2-20x-16y+11=0$
19. $3x^2+10xy+3y^2+2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y+6=0$
20. $5x^2+8xy+5y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4=0$
21. $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-10x-2\sqrt{3}y-7=0$
22. $5x^2+6xy+5y^2-8\sqrt{2}x-8\sqrt{2}y=0$
23. $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x-6y-9=0$
24. $7x^2-48xy-7y^2+40x-30y-75=0$
25. $5x^2+8xy+5y^2-8x-10y-4=0$
26. $18x^2+48xy+32y^2-20x+15y-100=0$
27. $5x^2+8xy+5y^2-20x-16y+11=0$
28. $5x^2+8xy+5y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y-4=0$
29. $4x^2+8xy+4y^2-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+4=0$
30. $x^2+3xy-3y^2+7x-14=0$

III

1.Составить уравнения проекции прямой

$$\begin{cases}5x-4y-2z=2\\ x+2z-2=0\end{cases}$$

на плоскость $2x-y+z=1$.

2.Вычислить расстояние между двумя прямыми: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$ и $\begin{cases}2x-y=2\\ y+2z=-2\end{cases}$, предварительно убедившись в их параллельности.

3. Проверить, лежат ли в одной плоскости прямые: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $x=3t+7,\ y=2t+2,\ z=-2t+1$. Если "да", то составить уравнение этой плоскости.

4. Найти расстояние от точки $M(1,2,-2)$ до плоскости, проходящей через две прямые $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+4}{1}$ и $x=2t, y=5+2t, z=-5+t$.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$x=0, y+z=1$

и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом 6ед^3.

6. Убедившись, что прямые параллельны, найти расстояние между ними: $x=t+5,\ y=2t-1,\ z=3t-2$ и $\begin{cases}x+y-z=3\\ x-2y+z=-11\end{cases}$.

7. Принадлежат ли две прямые

$$\begin{cases}2x+y-2z=4\\ x-2y+z=-5\end{cases},\quad \begin{cases}x=t\\ y=2t+2\\ z=3t-1\end{cases}$$

одной плоскости? Если "да",то написать уравнение этой плоскости.

8. Через две точки $A(2,3,-1)$ и $B(1,1,1)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $2x+4y-3z=3$.

9. Найти проекцию точки $M(3,4,-5)$ на прямую $\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{8-z}{4}$.

10. Проверить, лежат ли прямые

$$\begin{cases}8x+y-8z=0\\ y-4z=4\end{cases},\quad \begin{cases}x=t-11\\ y=8t+16\\ z=2t-19\end{cases}$$

в одной плоскости? Если "да", то составить уравнение этой плоскости.

11. Даны вершины треугольника $A(3,6,2)$, $B(-1,3,2)$, $C(9,6,-6)$. Найти канонические уравнения его биссектрисы, проведенной из угла A. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости треугольника ABC и содержащей указанную биссектрису.

12. Убедившись, что данная плоскость $x+y-3z=10$ параллельна плоскости, проходящей через три точки $A(5,4,3)$, $B(1,2,1)$, $C(3,6,3)$, найти расстояние между ними.

13. Составить уравнение проекции прямой $x=-t+4,\ y=t-3,\ z=3t-1$ на плоскость $2x+4y-3z=-1$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases}3x+y-3z=-19\\ 2y-3z=-26\end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $4x-3y+5z=46$.

15. Даны вершины треугольника: $A(3,0,1)$, $B(1,3,-2)$, $C(7,-1,-2)$. Найти параметрические уравнения медианы, проведенной из вершины А. Написать уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC и содержащей указанную медиану.

16. Доказать, что данная плоскость $3x-2y+z=8$ параллельна плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{1}$ и точку $M(1,-1,-1)$. Найти расстояние между этими плоскостями.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$ и отсекающей от координатных плоскостей пирамиду объемом $V=4$ ед^3.

18. Найти проекцию точки $M(-2,1,0)$ на плоскость, проходящую через три точки: $A(1,0,-1)$, $B(3,1,-2)$, $C(2,4,-5)$.

19. Доказать перпендикулярность прямых:

$$l_1:\begin{cases} x+y-3z-1=0 \\ 2x-y-9z-2=0 \end{cases},\quad l_2:\begin{cases} 2x+y+2z+5=0 \\ 2x-2y-z+2=0 \end{cases}.$$

Написать уравнение плоскости, содержащей l_1 и перпендикулярной к l_2.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2,-3,1)$ и отсекающей от координатных осей равные отрезки. Написать канонические уравнения перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

22. Найти расстояние от точки $N(-3,4,-5)$ до плоскости, содержащей в себе прямую $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{-2}$ и точку $M\ (1,2,0)$.

23. Найти уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{3}$ и $\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{3}$.

24. Проверить, являются ли две прямые $\frac{x+1}{2}=\frac{y+5}{-3}=\frac{x-1}{5}$ и $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{-1}$ скрещивающимися. Если "да", то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые.

25. Найти проекцию точки $M\ (-3,1,2)$ на прямую

$$\begin{cases} 2x+4y-2z=1 \\ x-3y+z=2. \end{cases}$$

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x+8y-4z=5 \\ x-8y+3z=5 \end{cases}$$

перпендикулярно к плоскости $x+5y-z=1$.

27. Составить уравнения проекции прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ на плоскость $x+4y=8$.

28. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x=1+t$, $y=-1+2t$, $z=2+4t$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

29. Найти проекцию точки $M\ (1,2,0)$ на прямую $x=2t-1$, $y=t-4$, $z=-3t+1$.

30. Проверить, будут ли прямые

$$x=t-1,\ y=-t+3,\ z=4t-5 \text{ и } \begin{cases} 2x-3y+z=5 \\ x+y-5z=4 \end{cases}$$

скрещивающимися. Если "да", то составить уравнения двух параллельных плоскостей, проходящих через указанные прямые.

Изобразить тело, ограниченное данными поверхностями. Указать тип поверхностей, ограничивающих тело.

1. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$
   b) $y = x^2 + z^2$, $y = 4$
2. a) $z = x^2 + y^2$, $z = 4$
   b) $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$, $y = 0$
3. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 4$
   b) $x^2 + z^2 = 4$ $(0 \le y \le 4)$, $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$, $y = 4$
4. a) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2 - y$, $z = 0$
   b) $y^2 = x^2 + z^2$, $y = -2$, $y = 4$
5. a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = y$ $(z \le y)$
   b) $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 4$
6. a) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = -2$, $z = 4$
   b) $x^2 + z^2 = 4$, $y = \sqrt{4 - x^2 - z^2}$, $y = -4$
7. a) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = -2\sqrt{x^2 + y^2} + 4$
   b) $y = x^2 + z^2 - 4$, $y = 0$
8. a) $z = x^2 + y^2 - 4$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
   b) $x^2 + z^2 = 4$, $z = 6 - y$, $y = 0$
9. a) $x^2 + y^2 = 4$, $z - y = 4$, $z = 0$
   b) $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = 4 - x^2 - y^2$
10. a) $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$
    b) $x^2 + z^2 = 1$, $z = 1 - y$, $y = 0$
11. a) $x^2 + y^2 = 4$, $z = y + 2$, $z = 0$
    b) $y = -2\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = -4 - \sqrt{4 - x^2 - z^2}$
12. a) $z = x^2 + y^2$, $z = 8 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$
    b) $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = -\sqrt{4 - x^2 - z^2}$
13. a) $x^2 + y^2 - z = 0$, $z = 2 - y$
    b) $x^2 + z^2 = 4$, $z + y = 4$, $y = 0$
14. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$
    b) $x^2 + z^2 = 4$, $y = x^2 + z^2 - 4$, $y = 3$
15. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$
    b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = \pm 4$
16. a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6 - x^2 - y^2$
    b) $x^2 + z^2 = 4$, $z = 2 + y$, $y = 2 - z$
17. a) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = x^2 + y^2 - 4$, $y = 0$ $(y \le 0)$
    b) $x^2 + z^2 = 4$, $y = 2 - \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = -4$
18. a) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = 0$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
"ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ"

Методические указания

Типовой расчет содержит пять заданий.

I. ***При выполнении первого задания следует провести полное исследование предложенной функции, а затем построить ее график.*** Исследование функции рекомендуется проводить по такой схеме:

1.Определить область существования функции.
2.Выяснить,является ли данная функция четной или нечетной.
3.Найти точки, подозрительные на экстремум, и выяснить их характер с помощью первой или второй производной. Вычислить экстремумы.
4.Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, а также точки перегиба.
5.Найти асимптоты (наклонные, вертикальные и горизонтальные).
6.Найти точки пересечения графика функции с координатными осями и вычислить значение функции в нескольких контрольных точках.
7.Построить график функции.

Задача 1. Исследовать функцию $y=\dfrac{2x^3}{x^2-4}$. Построить ее график.

Решение.

1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точек $x=\pm 2$.

2. Функция нечетная, поэтому достаточно исследовать функцию только для $x\geq 0$. Ее график симметричен относительно начала координат.

3. Первая производная $y'=\dfrac{2x^2\left(x^2-12\right)}{(x^2-4)^2}$ на промежутке $[0,+\infty)$ обращается в нуль только для $x_1=0$ и $x_2=2\sqrt{3}\approx 3.46$. В точке x_1 первая производная не меняет своего знака, то есть экстремума в точке x_1 функция не имеет. В точке x_2 производная меняет знак с минуса на плюс, то есть в точке x_2 функция имеет минимум, $y_{\min}=y(2\sqrt{3})=6\sqrt{3}$. Острых экстремумов нет, так как знаменатель производной равен нулю только в тех точках, где функция не определена.

4. Вторая производная $y''=\dfrac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$ обращается в нуль только в точке $x=0$, которая является точкой перегиба. При $0\leq x\leq 2$ $y''<0$, то есть

выпуклость графика вверх, а при $2<x<\infty$ $y''>0$, то есть выпуклость графика вниз.

5. Так как при $x\to 2$ $|y(x)|\to\infty$, то прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой.

Ищем уравнение $y=k\cdot x+b$ наклонной асимптоты :

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{(x^2-4)}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3}{x^2-4}-2x\right]=0.$$

График функции имеет правую наклонную асимптоту $y=2x$. Напоминаем, что график функции симметричен относительно начала координат, так как функция нечетная.

6. Точки пересечения графика с осями координат: $x=0$, $y=0$ (рис.5).

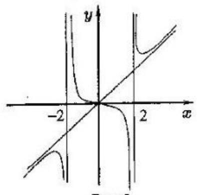

Рис. 5

II. ***Второе задание: решить задачу на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции одной переменной на отрезке $[a,b]$.***

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее(наименьшее).

Задача 2. Найти такой цилиндр, который бы имел наибольший объем при данной полной поверхности S.

Решение. Пусть радиус основания цилиндра равен x, а высота равна h.Тогда $S=2\pi x^2+2\pi xh$,то есть $h=\dfrac{S-2\pi x^2}{2\pi x}$. Следовательно, объем цилиндра $V=V(x)=S_{осн}h=\pi x^2h=\pi x^2\dfrac{S-2\pi x^2}{2\pi x}=\dfrac{S}{2}x-\pi x^3$. Задача сводится к исследованию функции $V(x)$ на наибольшее значение на отрезке $\left[0;\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}\right]$. Найдем значение функции на концах отрезка:

$V(0)=V(\sqrt{\frac{S}{2\pi}})=0$. Так как объем – величина неотрицательная, то, очевидно, функция достигает максимума внутри интервала. Найдем $\frac{dV}{dx}=\frac{S}{2}-3\pi x^2$ и приравняем ее нулю, откуда $x=\pm\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. Так как $x>0$, то нас интересует только $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$. В точке $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ объем имеет наибольшее значение, причем $h=\frac{S-2\pi S/6\pi}{2\pi\sqrt{S/6\pi}}=2x$, то есть осевое сечение цилиндра – квадрат.

Ответ: $x=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$; $h=2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Расчетные задания

I

Исследовать функцию и построить ее график.

1. а) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$, б) $y=2arctgx+x$.

2. а) $y=2+(x^2(2-x))^{1/3}$, б) $y=\frac{1}{2}xe^{1/x}$.

3. а) $y=\frac{x^3}{x^2-3}$, б) $y=x\ arctgx$.

4. а) $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, б) $y=x+e^{-x}$.

5. а) $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, б) $y=2x-e^{2x}$.

6. а) $y=\frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$, б) $y=5(x+1)+e^{-5x}$.

7. а) $y=\frac{x^3}{1+x^2}$, б) $y=(x+6)e^{1/x}$.

8. а) $y=\dfrac{x^2}{1-2x}$, б) $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

9. а) $y=2x^{5/3}-5x^{2/3}+1$, б) $y=e^{1/x}-x$.

10. а) $y=\left(x^3-2x^2\right)^{1/3}$, б) $y=\dfrac{e^x+1}{x+1}$.

11. а) $y=5+3(x-3)^{2/3}$, б) $y=x^3e^{-4x}$.

12. а) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, б) $y=3\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

13. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$, б) $y=x^2e^{1/x}$.

14. а) $y=\dfrac{3x^3}{3x^2+4x+4}$, б) $y=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$.

15. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, б) $y=xe^{-x}$.

16. а) $y=\dfrac{x^2+5}{x+2}$, б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

17. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$, б) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

18. а) $y=\dfrac{2}{3}x+(x+2)^{2/3}$, б) $y=\dfrac{3}{x}\ln\dfrac{x}{3}$.

19. а) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$, б) $y=3xe^{x}$.

20. а) $y=x-\dfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}$, б) $y=x^3e^{x}$.

21. а) $y=\left(x+1\right)^3x^{2/3}$, б) $y=\ln\left(x^2-2x+2\right)$.

22. а) $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$, б) $y=2x+e^{-2x}$.

23. а) $y=\dfrac{\left(x+1\right)^3}{\left(x-1\right)^2}$; б) $y=\left(x+2\right)e^{1/x}$.

24. а) $y=\left(x^3-3x\right)^{1/3}$, б) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

25. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$, б) $y=5x-e^{5x}$.

26. а) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$, б) $y=(x+2)e^{1/x}$.

27. а) $y=(x^2(6-x))^{1/3}$, б) $y=x+2arctgx$.

28. а) $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$, б) $y=x-2arctgx$.

29. а) $y=\dfrac{2x}{\left(x-1\right)^2}$, б) $y=x^{2/3}e^{-x}$.

30. а) $y=\dfrac{\left(x-1\right)^2}{x^2+1}$, б) $y=-3x-7arctgx$.

II

1. Изготовить из жести ведро без крышки данного объема цилиндрической формы. Каковы должны быть высота цилиндра и радиус основания, чтобы на изготовление ведра ушло наименьшее количество материала ?

2. Прямоугольник вписан в эллипс с осями $2a$ и $2b$. Каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы его площадь была бы наибольшей?

3. Сопротивление балки прямоугольного поперечного сечения продольному сжатию пропорционально площади этого сечения. Определить размеры балки, вырезанной из круглого бревна с диаметром a так, чтобы ее сопротивление сжатию было наибольшим.

4. Найти радиус основания и высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

5. На странице книги печатный текст должен занимать S см^2.Верхние и нижние поля должны быть по a см., левое и правое - по b см. Каковы должны быть размеры страницы для того, чтобы ее площадь была наименьшей?

6. Найти радиус основания и высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

7. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом . Периметр окна равен a. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

8. Найти основание и высоту равнобочной трапеции, которая при данной площади S имеет наименьший периметр. Угол при большем основании трапеции равен α.

9. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер ушло наименьшее количество полотна?

10. Какова должна быть сторона основания правильной треугольной призмы данного объема V, чтобы полная поверхность призмы была бы наименьшей?

11. Из полосы жести шириной 30 см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого имеет форму равнобочной трапеции. Дно желоба должно иметь ширину 10 см. Каков должен быть угол, образуемый стенками желоба с дном, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

12. На верхнее основание прямого кругового цилиндра поставлен прямой конус с таким же основанием. Высота конуса равна радиусу основания. Сумма площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса равна 625 см^2. Когда объем тела, составленного цилиндром и конусом, будет максимальной?

13. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиуса R, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какова должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем?

14. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема.

15. Из круга вырезан сектор с центральным углом α. Из оставшейся части круга свернута воронка. При каком значении угла α вместимость воронки будет наибольшей?

16. Какова должна быть высота равнобедренного треугольника, вписанного в окружность диаметра a, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

17. Резервуар, открытый сверху имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его лужение пошло наименьшее количество материала, если он должен вместить 108 литров воды?

18. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема(плоскости оснований цилиндра и конуса должны совпадать).

19. Из квадратного листа жести площадью 30 см^2 требуется сделать открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

20. На отрезке AB длины d, соединяющем два источника света A(a свечей) и B(b свечей), найти точку M наименьшей освещенности (освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника).

21. Из полосы жести шириной 11см требуется сделать открытый сверху желоб, поперечное сечение которого должно иметь форму равнобочной трапеции. Дно желоба имеет ширину 7см. Какова должна быть ширина желоба наверху, чтобы он вмещал наибольшее количество воды?

22. Найти отношение радиуса основания цилиндра к его высоте, при котором при данном объеме V цилиндр имеет наименьшую полную поверхность.

23. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах(радиус R и высота H)это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если его объем $V = 45\pi$ дм^3?

24. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

25. На оси $0y$ найти точку, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом, если $A(2;0)$ и $B(8;0)$.

26. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 10 см и углом 30^0 вписан прямоугольник, основание которого расположено на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

27. В прямоугольной системе координат через точку $M(1;2)$ проведена прямая с отрицательным угловым коэффициентом, которая вместе с Осями координат образует треугольник. Каковы должны быть отрезки, отсекаемые прямой на осях координат, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

28. На эллипсе $2x^2 + y^2 = 18$ даны две точки $A(1;4)$ и $B(3;0)$. Найти на данном эллипсе третью точку C такую, чтобы площадь треугольника ABC была бы наибольшей.

29. Из круглого брезна диаметром a вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b, а высота h. При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность пропорциональна bh^2?

30. Требуется вырыть яму конической формы(воронку) с образующей, равной a м. При какой глубине объем воронки будет наибольшим?