АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ВВЕДЕНИЕ

Целью выполнения курсовой работы является развитие и закрепление навыков работы с табличным процессором Microsoft Excel, изучаемым в курсе информатики, и применение их для самостоятельного решения с помощью компьютера задач из предметной области, связанной с исследованиями.

Отчет представляется в виде записки. Порядок изложения материала следующий:

— задание;
— расчетные формулы;
— таблицы, выполненные средствами Microsoft Excel, с пояснениями;
— схема алгоритма;
— программа с необходимыми комментариями;
— результаты расчета;
— представление результатов в виде графиков;
— выводы;
— библиографический список.

Отчет должен начинаться с титульного листа, оформленного соответствующим образом.

ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Очень часто, особенно при анализе эмпирических данных возникает необходимость найти в явном виде функциональную зависимость между величинами x и y, которые получены в результате измерений.

При аналитическом исследовании взаимосвязи между двумя величинами x и y производят ряд наблюдений и в результате получается таблица значений :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n

Эта таблица обычно получается как итог каких-либо экспериментов, в которых x_i (независимая величина) задается экспериментатором, а y_i получается в результате опыта. Поэтому эти значения y_i будем называть эмпирическими или опытными значениями.

Между величинами x и y существует функциональная зависимость, но ее аналитический вид обычно неизвестен, поэтому возникает практически важная задача - найти эмпирическую формулу

$$y = f(x; a_1, a_2, \dots, a_m), \tag{1}$$

(где $a_1, a_2, \dots, a_m$ - параметры), значения которой при $x = x_i$ возможно мало отличались бы от опытных значений $y_i \ (i = 1,2,\dots,n)$.

Обычно указывают класс функций (например, множество линейных, степенных, показательных и т.п.) из которого выбирается функция $f(x)$, и далее определяются наилучшие значения параметров.

Если в эмпирическую формулу (1) подставить исходные x_i, то получим теоретические значения $y_i^{\text{т}} = f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)$, где $i = 1,2,\dots,n$.

Разности $y_i^{\text{т}} - y_i$ называются отклонениями и представляют собой расстояния по вертикали от точек M_i до графика эмпирической функции.

Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_m$ считаются те, для которых сумма квадратов отклонений найденной эмпирической функции от заданных значений функции

$$S(a_1, a_2, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i \right]^2 \tag{2}$$

будет минимальной.

Поясним геометрический смысл метода наименьших квадратов.

Каждая пара чисел (x_i, y_i) из исходной таблицы определяет точку M_i на плоскости XOY. Используя формулу (1) при различных значениях коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ можно построить ряд кривых, которые являются графиками функции (1). Задача состоит в определении коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ таким образом, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали от точек $M_i(x_i, y_i)$ до графика функции (1) была наименьшей (рис.1).

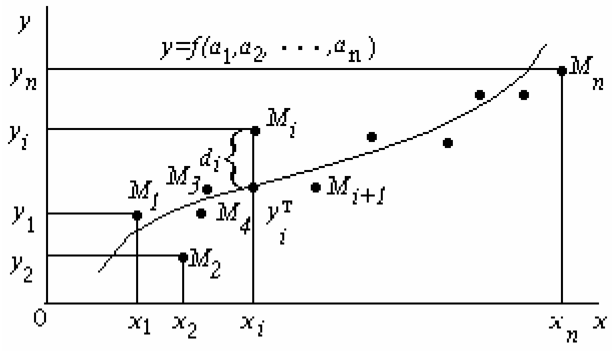

Рис.1

Построение эмпирической формулы состоит из двух этапов: выяснение общего вида этой формулы и определение ее наилучших параметров.

Если неизвестен характер зависимости между данными величинами x и y, то вид эмпирической зависимости является произвольным. Предпочтение отдается простым формулам, обладающим хорошей точностью. Удачный выбор эмпирической формулы в значительной мере зависит от знаний исследователя в предметной области, используя которые он может указать класс функций из теоретических соображений. Большое значение имеет изображение полученных данных в декартовых или в специальных системах координат (полулогарифмической, логарифмической и т.д.). По положению точек можно примерно угадать общий вид зависимости путем установления сходства между построенным графиком и образцами известных кривых.

Определение наилучших коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ входящих в эмпирическую формулу производят хорошо известными аналитическими методами.

Для того, чтобы найти набор коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_m$, которые доставляют минимум функции S, определяемой формулой (2), используем необходимое условие экстремума функции нескольких переменных - равенство нулю частных производных. В результате получим нормальную систему для определения коэффициентов a_i $(i = 1,2,\ldots,m)$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0; \quad \ldots.. \quad ; \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, нахождение коэффициентов a_i сводится к решению системы (3).

Эта система упрощается, если эмпирическая формула (1) линейна относительно параметров a_i, тогда система (3) - будет линейной.

Конкретный вид системы (3) зависит от того, из какого класса эмпирических формул мы ищем зависимость (1). В случае линейной зависимости $y = a_1 + a_2 x$ система (3) примет вид:

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \quad , \\ a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \; y_i \quad . \end{cases} \tag{4}$$

Эта линейная система может быть решена любым известным методом (методом Гаусса, простых итераций, формулами Крамера).

В случае квадратичной зависимости $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$ система (3) примет вид:

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \quad , \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \quad . \end{cases} \tag{5}$$

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

В ряде случаев в качестве эмпирической формулы берут функцию в которую неопределенные коэффициенты входят нелинейно. При этом иногда задачу удается линеаризовать т.е. свести к линейной. К числу таких зависимостей относится экспоненциальная зависимость

$$y = a_1 \cdot e^{a_2 x}, \tag{6}$$

где a_1 и a_2 неопределенные коэффициенты.

Линеаризация достигается путем логарифмирования равенства (6), после чего получаем соотношение

$$\ln y = \ln a_1 + a_2 x \tag{7}$$

Обозначим $\ln y$ и $\ln a_1$ соответственно через t и c, тогда зависимость (6) может быть записана в виде $t = a_1 + a_2 x$, что позволяет применить формулы (4) с заменой a_1 на c и y_i на t_i .

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ

График восстановленной функциональной зависимости $y(x)$ по результатам измерений (x_i, y_i), $i = 1,2,\ldots,n$ называется кривой регрессии. Для проверки согласия построенной кривой регрессии с результатами эксперимента обычно вводят следующие числовые характеристики: коэффициент корреляции (линейная зависимость), корреляционное отношение и коэффициент детерминированности. При этом результаты обычно группируют и представляют в форме корреляционной таблицы. В каждой клетке этой таблицы приводятся численности n_{ij} тех пар (x, y), компоненты которых попадают в соответствующие интервалы группировки по каждой переменной. Предполагая длины интервалов группировки (по каждой переменной) равными между собой, выбирают центры x_i (соответственно y_i) этих интервалов и числа n_{ij} в качестве основы для расчетов.

Коэффициент корреляции является мерой линейной связи между зависимыми случайными величинами: он показывает, насколько хорошо в среднем может быть представлена одна из величин в виде линейной функции от другой.

Коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}}, \tag{8}$$

где $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, $\overline{x}$ и $\overline{y}$ — среднее арифметическое значение соответственно по x и y.

Коэффициент корреляции между случайными величинами по абсолютной величине не превосходит 1. Чем ближе $|\rho|$ к 1, тем теснее линейная связь между x и y.

В случае нелинейной корреляционнной связи условные средние значения располагаются около кривой линии. В этом случае в качестве характеристики силы связи рекомендуется использовать корреляционное отношение, интерпретация которого не зависит от вида исследуемой зависимости.

Корреляционное отношение вычисляется по формуле:

$$\eta^2_{y|x} = \frac{\frac{1}{n} \sum_i n_i \cdot (\overline{y_i} - \overline{y})^2}{\frac{1}{n} \sum_j n_j \cdot (y_j - \overline{y})^2}, \tag{9}$$

где $n_i = \sum_j n_{ij}$, $n_j = \sum_i n_{ij}$, а числитель характеризует рассеяние условных средних $\overline{y_i}$ около безусловного среднего $\overline{y}$.

Всегда $0 \le \eta^2_{y|x} \le 1$. Равенство $\eta^2_{y|x} = 0$ соответствует некоррелированным случайным величинам; $\eta^2_{y|x} = 1$ тогда и только тогда, когда имеется точная функциональная связь между y и x. В случае линейной зависимости y от x корреляционное отношение совпадает с квадратом коэффициента корреляции. Величина $\eta^2_{y|x} - \rho^2$ используется в качестве индикатора отклонения регрессии от линейной.

Корреляционное отношение является мерой корреляционной связи y с x в какой угодно форме, но не может дать представления о степени приближенности эмпирических данных к специальной форме. Чтобы выяснить насколько точно построенная кривая отражает эмпирические данные вводится еще одна характеристика — коэффициент детерминированности.

Для его описания рассмотрим следующие величины. $S_{\text{полн}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2$ - полная сумма квадратов, где $\overline{y}$ среднее значение y_i .

Можно доказать следующее равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{\text{т}})^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i^{\text{т}} - \overline{y})^2$.

Первое слагаемое равно $S_{\text{ост}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{\text{т}})^2$ и называется остаточной суммой квадратов. Оно характеризует отклонение экспериментальных данных от теоретических.

Второе слагаемое равно $S_{\text{регр}} = \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i^{\text{т}} - \overline{y})^2$ и называется регрессионной суммой квадратов и оно характеризует разброс данных.

Очевидно, что справедливо следующее равенство $S_{\text{полн}} = S_{\text{ост}} + S_{\text{регр}}$.

Коэффициент детерминированности определяется по формуле: $$r^2 = 1 - \frac{S_{\text{ост}}}{S_{\text{полн}}} . \qquad (10)$$

Чем меньше остаточная сумма квадратов по сравнению с общей суммой квадратов, тем больше значение коэффициента детерминированности r^2, который показывает, насколько хорошо уравнение, полученное с помощью регрессионного анализа, объясняет взаимосвязи между переменными. Если он равен 1, то имеет место полная корреляция с моделью, т.е. нет различия между фактическим и оценочным значениями y. В противоположном случае, если коэффициент детерминированности равен 0, то уравнение регрессии неудачно для предсказания значений y

Коэффициент детерминированности всегда не превосходит корреляционное отношение. В случае когда выполняется равенство $r^2 = \eta^2_{y|x}$ то можно считать, что построенная эмпирическая формула наиболее точно отражает эмпирические данные.

ПРИМЕР

Функция $y = f(x)$ задана таблицей 1:

Таблица 1.

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0,0	1,19	2,04	23,87	3,91	44,76	7,31	153,65	8,74	206,45
0,6	11,54	2,34	29,76	4,09	58,11	7,65	169,91	9,06	215,98
0,9	16,75	2,73	32,85	5,89	122,76	7,89	174,55	9,54	230,68
1,4	19,01	3,33	38,03	6,55	133,54	8,19	200,25	9,91	236,67
1,8	20,06	3,71	40,97	6,98	148,57	8,32	202,14	10,0	249,17

Требуется выяснить - какая из функций - линейная, квадратичная или экспоненциальная наилучшим образом аппроксимирует функцию заданную таблицей 1.

Решение.

Поскольку в данном примере каждая пара значений (x_i, y_i) встречается один раз, то корреляционная таблица примет вид единичной матрицы. Значит условные средние $\overline{y_i}$ совпадают со значениями

y_i. Отсюда следует, что корреляционное отношение $\eta^2_{y|x}$ равно 1 и следовательно между y и x существует функциональная зависимость.

Для проведения расчетов данные целесообразно расположить в виде таблицы 2, используя средства табличного процессора Microsoft Excel.

Таблица 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	0	1.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.00
2	0.6	11.54	0.36	6.92	0.22	0.13	4.15	2.45	1.47
3	0.9	16.75	0.81	15.08	0.73	0.66	13.57	2.82	2.54
4	1.4	19.01	1.96	26.61	2.74	3.84	37.26	2.94	4.12
5	1.8	20.06	3.24	36.11	5.83	10.50	64.99	3.00	5.40
6	2.04	23.87	4.16	48.69	8.49	17.32	99.34	3.17	6.47
7	2.34	29.76	5.48	69.64	12.81	29.98	162.95	3.39	7.94
8	2.73	32.85	7.45	89.68	20.35	55.55	244.83	3.49	9.53
9	3.33	38.03	11.09	126.64	36.93	122.96	421.71	3.64	12.12
10	3.71	40.97	13.76	152.00	51.06	189.45	563.92	3.71	13.77
11	3.91	44.76	15.29	175.01	59.78	233.73	684.30	3.80	14.86
12	4.09	58.11	16.73	237.67	68.42	279.83	972.07	4.06	16.61
13	5.89	122.76	34.69	723.06	204.34	1203.54	4258.80	4.81	28.33
14	6.55	133.54	42.90	874.69	281.01	1840.62	5729.20	4.89	32.06
15	6.98	148.57	48.72	1037.02	340.07	2373.68	7238.39	5.00	34.91
16	7.31	153.65	53.44	1123.18	390.62	2855.42	8210.46	5.03	36.80
17	7.65	169.91	58.52	1299.81	447.70	3424.88	9943.56	5.14	39.28
18	7.89	174.55	62.25	1377.20	491.17	3875.32	10866.10	5.16	40.73
19	8.19	200.25	67.08	1640.05	549.35	4499.20	13431.99	5.30	43.40
20	8.32	202.14	69.22	1681.80	575.93	4791.74	13992.62	5.31	44.17
21	8.74	206.45	76.39	1804.37	667.63	5835.07	15770.22	5.33	46.58
22	9.06	215.98	82.08	1956.78	743.68	6737.72	17728.42	5.38	48.70
23	9.54	230.68	91.01	2200.69	868.25	8283.11	20994.56	5.44	51.91
24	9.91	236.67	98.21	2345.40	973.24	9644.83	23242.91	5.47	54.17
25	10	249.17	100.00	2491.70	1000.00	10000.00	24917.00	5.52	55.18
26	132.88	2781.22	964.84	21539.80	7800.34	66309.08	179593.30	104.43	651.08
	с		у		м		м		ы
	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	x_i^3	x_i^4	$x_i^2 \cdot y_i$	$\ln(y_i)$	$x_i \ln(y_i)$

Поясним как таблица 2 составляется.

Шаг 1. В ячейки A1:A25 заносим значения x_i.

Шаг 2. В ячейки B1:B25 заносим значения y_i.

Шаг 3. В ячейку C1 вводим формулу =A1^2.

Шаг 4. В ячейки C2:C25 эта формула копируется.

Шаг 5. В ячейку D1 вводим формулу =A1*B1.

Шаг 6. В ячейки D2:D25 эта формула копируется.

Шаг 7. В ячейку F1 вводим формулу =A1^4.

Шаг 8. В ячейки F2:F25 эта формула копируется.

Шаг 9. В ячейку G1 вводим формулу =A1^2*B1.

Шаг 10. В ячейки G2:G25 эта формула копируется.

Шаг 11. В ячейку H1 вводим формулу =LN(B1).

Шаг 12. В ячейки H2:H25 эта формула копируется.

Шаг 13. В ячейку I1 вводим формулу =A1*LN(B1).

Шаг 14. В ячейки I2:I25 эта формула копируется.

Последующие шаги делаем с помощью автосуммирования $\sum$.

Шаг 15. В ячейку A26 вводим формулу =СУММ(A1:A25).

Шаг 16. В ячейку B26 вводим формулу =СУММ(B1:B25).

Шаг 17. В ячейку C26 вводим формулу =СУММ(C1:C25).

Шаг 18. В ячейку D26 вводим формулу =СУММ(D1:D25).

Шаг 19. В ячейку E26 вводим формулу =СУММ(E1:E25).
Шаг 20. В ячейку F26 вводим формулу =СУММ(F1:F25).
Шаг 21. В ячейку G26 вводим формулу =СУММ(G1:G25).
Шаг 22. В ячейку H26 вводим формулу =СУММ(H1:H25).
Шаг 23. В ячейку I26 вводим формулу =СУММ(I1:I25).

Аппроксимируем функцию $y = f(x)$ линейной функцией $y = a_1 + a_2 x$. Для определения коэффициентов a_1 и a_2 воспользуемся системой (4). Используя итоговые суммы таблицы 2, расположенные в ячейках A26, B26, C26 и D26, запишем систему (4) в виде

$$\begin{cases} 25 \cdot a_1 + 132.88 \cdot a_2 = 2781.22 \\ 132.88 \cdot a_1 + 964.84 \cdot a_2 = 21539.80 \end{cases} \tag{11}$$

решив которую, получим $a_1 = -27.6553$ и $a_2 = 26.1334$.

Таким образом, линейная аппроксимация имеет вид

$$y = -27.6553 + 26.1334 \cdot x \ . \tag{12}$$

Решение системы (11) проводили, пользуясь средствами Microsoft Excel. Результаты представлены в таблице 3.

Таблица 3.

	A	B	C	D	E
28	25	132.88	2781.22		
29	132.88	964.84	21539.80		
30					
31	Обратная матрица				
32	0.1493	-0.02056		a1=	-27.6553
33	-0.021	0.00387		a2=	26.1334

В таблице 3 в ячейках A32:B33 записана формула {=МОБР(A28:B29)}.
В ячейках E32:E33 записана формула {=МУМНОЖ(A32:B33,C28:C29)}.

Далее аппроксимируем функцию $y = f(x)$ квадратичной функцией $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Для определения коэффициентов a_1, a_2 и a_3 воспользуемся системой (5). Используя итоговые суммы таблицы 2, расположенные в ячейках A26, B26, C26, D26, E26, F26 и G26 запишем систему (5) в виде

$$\begin{cases} 25 \cdot a_1 + 132.88 \cdot a_2 + 964.84 \cdot a_3 = 2781.22 \\ 132.88 \cdot a_1 + 964.84 \cdot a_2 + 7800.34 \cdot a_3 = 21539.80 \\ 964.84 \cdot a_1 + 7800.34 \cdot a_2 + 66309.0 \cdot a_3 = 179593.30 \end{cases} \tag{13}$$

решив которую, получим $a_1 = -0.48776$, $a_2 = 8.94529$ и $a_3 = 1.66324$.

Таким образом, квадратичная аппроксимация имеет вид

$$y = -0.48776 + 8.94529 \cdot x + 1.66324 \cdot x^2 \ . \tag{14}$$

Решение системы (13) проводили, пользуясь средствами Microsoft Excel. Результаты представлены в таблице 4.

Таблица 4.

	A	B	C	D	E	F
36	25	132.88	964.84	2781.22		
37	132.88	964.84	7800.34	21539.80		
38	964.84	7800.34	66309.08	179593.30		
39						
40	Обратная матрица					
41	0.3321	-0.13622	0.01119		a1=	-0.48776
42	-0.136	0.07705	-0.00708		a2=	8.94529
43	0.0112	-0.00708	0.00069		a3=	1.66324

В таблице 4 в ячейках A41:C43 записана формула {=МОБР(A36:C38)}.
В ячейках F41:F43 записана формула {=МУМНОЖ(A41:C43,D36:D38)}.

Теперь аппроксимируем функцию $y = f(x)$ экспоненциальной функцией $y = a_1 \cdot e^{a_2 x}$. Для определения коэффициентов a_1 и a_2 прологарифмируем значения y_i и используя итоговые суммы таблицы 2, расположенные в ячейках A26, C26, H26 и I26 получим систему

$$\begin{cases} 25 \cdot c + 132.88 \cdot a_2 = 104.43 \\ 132.88 \cdot c + 964.84 \cdot a_2 = 651.08, \end{cases} \tag{15}$$

где $c = \ln(a_1)$.

Решив систему (10) найдем $c = 2.20383$, $a_2 = 0.37128$.

После потенцирования получим $a_1 = 9.05965$.

Таким образом, экспоненциальная аппроксимация имеет вид

$$y = 9.05965 \cdot e^{0.37128 \cdot x} \quad . \tag{16}$$

Решение системы (15) проводили, пользуясь средствами Microsoft Excel. Результаты представлены в таблице 5.

Таблица 5.

	A	B	C	D	E
46	25	132.88	104.43		
47	132.88	964.84	651.08		
48					
49	Обратная матрица			c=	2.20383
50	0.1493	-0.02056		a2=	0.37128
51	-0.021	0.00387		a1=	9.05965

В таблице 5 в ячейках A50:B51 записана формула {=МОБР(A46:B47)}.

В ячейках E49:E50 записана формула {=МУМНОЖ(A50:B51,C46:C47)}.

В ячейке E51 записана формула =EXP(E49).

Вычислим среднее арифметическое $\bar{x}$ и $\bar{y}$ по формулам:

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i \; ; \quad \bar{y} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} y_i \; .$$

Результаты расчета $\bar{x}$ и $\bar{y}$ средствами Microsoft Excel представлены в таблице 6.

Таблица 6.

	A	B
54	Xср.=	5.3152
55	Yср.=	111.249

В ячейке B54 записана формула =A26/25.

В ячейке B55 записана формула =B26/25.

Для того, чтобы рассчитать коэффициент корреляции и коэффициент детерминированности данные целесообразно расположить в виде таблицы 7, которая является продолжением таблицы 2.

Таблица 7.

	A	B	J	K	L	M	N	O
1	0.00	1.19	584.98	28.25	12112.94	832.05	2.81	61.93
2	0.60	11.54	470.15	22.23	9941.84	552.97	36.75	0.05
3	0.90	16.75	417.23	19.49	8930.02	436.19	61.46	16.78
4	1.40	19.01	361.13	15.33	8508.00	101.58	13.80	14.25
5	1.80	20.06	320.55	12.36	8315.40	0.46	0.89	5.69
6	2.04	23.87	286.18	10.73	7635.05	3.19	0.66	20.68
7	2.34	29.76	242.45	8.85	6640.42	13.96	0.04	66.61
8	2.73	32.85	202.68	6.68	6146.37	117.48	12.10	62.19
9	3.33	38.03	145.35	3.94	5360.99	455.35	94.35	46.74
10	3.71	40.97	112.81	2.58	4939.11	802.56	213.81	25.50
11	3.91	44.76	93.43	1.97	4420.76	886.03	229.71	36.86

12	4.09	58.11	65.11	1.50	2823.73	446.06	33.77	280.47
13	5.89	122.76	6.62	0.33	132.51	12.32	165.35	1769.37
14	6.55	133.54	27.53	1.52	496.90	99.57	16.64	926.35
15	6.98	148.57	62.13	2.77	1392.87	38.26	31.20	762.78
16	7.31	153.65	84.58	3.98	1797.86	94.67	0.02	286.72
17	7.65	169.91	136.96	5.45	3441.14	5.55	21.43	218.97
18	7.89	174.55	162.99	6.63	4007.04	15.90	0.85	24.81
19	8.19	200.25	255.86	8.26	7921.21	192.46	253.21	114.53
20	8.32	202.14	273.11	9.03	8261.21	152.91	170.82	10.36
21	8.74	206.45	326.05	11.73	9063.27	32.49	2.91	678.11
22	9.06	215.98	392.20	14.02	10968.62	47.16	1.21	2101.37
23	9.54	230.68	504.57	17.85	14263.81	81.41	30.74	6759.74
24	9.91	236.67	576.29	21.11	15730.48	28.55	220.03	14958.36
25	10.00	249.17	646.13	21.95	19022.26	239.99	37.44	14884.58
26	132.88	2781.22	6757.06	258.56	182273.83	5689.10	1651.99	44133.80
	С	у	м	м	ы	Остаточные суммы		
	X	Y	(X-Xcp)(Y-Ycp)	(X-Xcp)^2	(Y-Ycp)^2	линейн.	квадр.	экспон.

Поясним как таблица 7 составляется.

Ячейки A1:A26 и B1:B26 уже заполнены (см. табл. 2).

Далее делаем следующие шаги.

Шаг 1. В ячейку J1 вводим формулу =(A1-$B$54)*(B1-$B$55).

Шаг 2. В ячейки J2:J25 эта формула копируется.

Шаг 3. В ячейку K1 вводим формулу =(A1-$B$54)^2.

Шаг 4. В ячейки K2:K25 эта формула копируется.

Шаг 5. В ячейку L1 вводим формулу =(B1-$B$55)^2.

Шаг 6. В ячейки L2:L25 эта формула копируется.

Шаг 7. В ячейку M1 вводим формулу =($E$32+$E$33*A1-B1)^2.

Шаг 8. В ячейки M2:M25 эта формула копируется.

Шаг 9. В ячейку N1 вводим формулу

=($F$41+$F$42*A1+$F$43*A1^2-B1)^2.

Шаг 10. В ячейки N2:N25 эта формула копируется.

Шаг 11. В ячейку O1 вводим формулу

=($E$51*EXP($E$50*A1)-B1)^2.

Шаг 12. В ячейки O2:O25 эта формула копируется.

Последующие шаги делаем с помощью автосуммирования $\sum$.

Шаг 13. В ячейку J26 вводим формулу =СУММ(J1:J25).

Шаг 14. В ячейку K26 вводим формулу =СУММ(K1:K25).

Шаг 15. В ячейку L26 вводим формулу =СУММ(L1:L25).

Шаг 16. В ячейку M26 вводим формулу =СУММ(M1:M25).

Шаг 17. В ячейку N26 вводим формулу =СУММ(N1:N25).

Шаг 18. В ячейку O26 вводим формулу =СУММ(O1:O25).

Теперь проведем расчеты коэффициента корреляции по формуле (8) (только для линейной аппроксимации) и коэффициента детерминированности по формуле (10). Результаты расчетов средствами Microsoft Excel представлены в таблице 8.

Таблица 8.

	A	B
57	Коэффициент корреляции	0.98427
58	Коэффициент детерминированности	
59	(линейная аппроксимация)	0.96879
60	Коэффициент детерминированности	
61	(квадратичная аппроксимация)	0.99094
62	Коэффициент детерминированности	
63	(экспоненциальная аппроксимация)	0.75787

В таблице 8 в ячейке B57 записана формула =J26/(K26*L26)^(1/2).

В ячейке B59 записана формула =1- M26/L26.
В ячейке B61 записана формула =1- N26/L26.
В ячейке B63 записана формула =1- O26/L26.

Анализ результатов расчетов показывает, что квадратичная аппроксимация наилучшим образом описывает экспериментальные данные.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА В EXCEL И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙН

Рассмотрим результаты эксперимента, приведенные в исследованном выше примере. Исследуем характер зависимости в три этапа:

- Построим график зависимости.
- Построим линию тренда (в данном случае это прямая $y = a_1 + a_2 \cdot x$).
- Получим числовые характеристики коэффициентов этого уравнения.

Решение

Построение графика зависимости.

1. Выделим интервал A1:B25.
2. Вызовем Мастер диаграмм, нажав соответствующую кнопку на панели инструментов.
3. Используя мышь, выделим область для встроенной диаграммы.
4. На 1 шаге в диалоговом окне Мастера диаграмм интервал A1:B25 должен быть указан, если это не так укажите. Нажмите **Шаг>**.
5. На 2 шаге выберите тип диаграммы **XY-точечная.** Нажмите **Шаг>**.
6. На 3 шаге выберите 1 тип автоформата. Нажмите **Шаг>**
7. На 4 шаге укажите следующие параметры:
8. Отвести 1 столбец для данных по оси X; отвести 1 строку для текста легенды. Нажмите **Шаг>**.
9. На 5 шаге в окне “Название диаграммы:” введите заголовок “Линейная аппроксимация”; в окне “Категорий [X]:” введите “x”; в окне “Значений [Y]:” введите y. Нажмите **Закончить**.

Построение линии тренда

Для построения линии тренда выполним следующую последовательность действий:

1. Дважды щелкнем по диаграмме. Диаграмма активизируется.
2. Щелкните по графику непосредственно в одну из изображенных точек. Сам график активизи-руется, его окраска изменится.
3. Вставляем линию тренда, воспользуемся меню **ΔВставкаΔЛиния тренда**.
4. Появиться диалоговое окно “Линия тренда” выберем на вкладке “Тип” (Рис.2) линейный тип и перейдем к вкладке “Параметры”.

На вкладке “Параметры” (Рис.3) потребуем показывать уравнение тренда на диаграмме и показывать значение R^2, поставив их в соответствующие клетки. Нажмем кнопку **OK**.

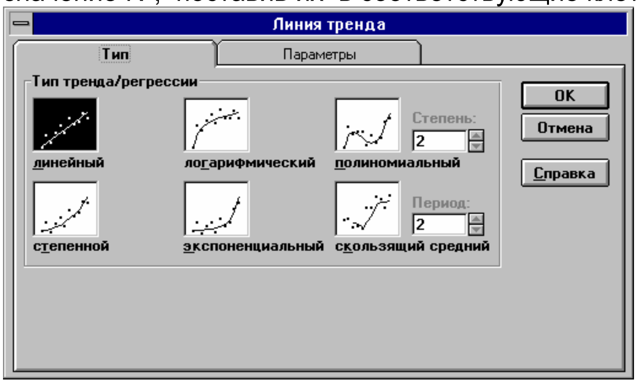

Рис.2

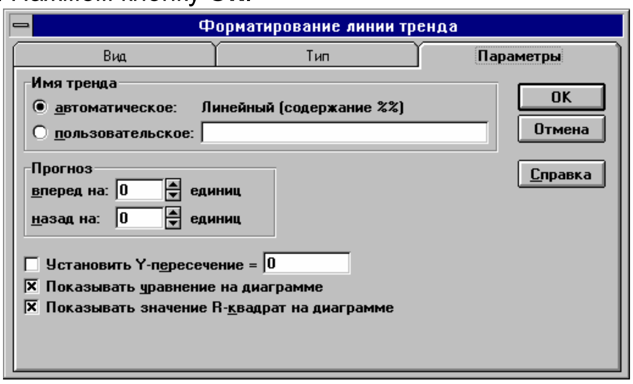

Рис.3

На диаграмме появится линия тренда с соответствующим уравнением. Также изменится легенда. При желании текстовое поле с уравнением и значением R^2 ,а также название координат x и y, можно оттащить в более удобное место как это сделано на Рис 4.

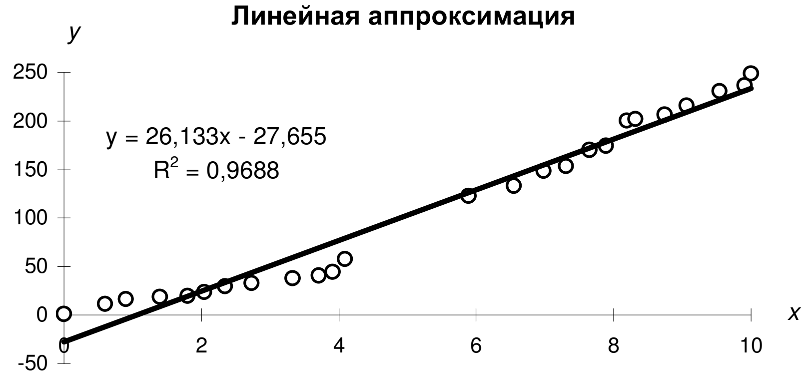

Рис.4

Для построения квадратичной аппроксимации на четвертом шаге в диалоговом окне “Линия тренда” выберем на вкладке “Тип” (Рис.2) полиномиальный тип степень 2. Результат представлен на рис.5.

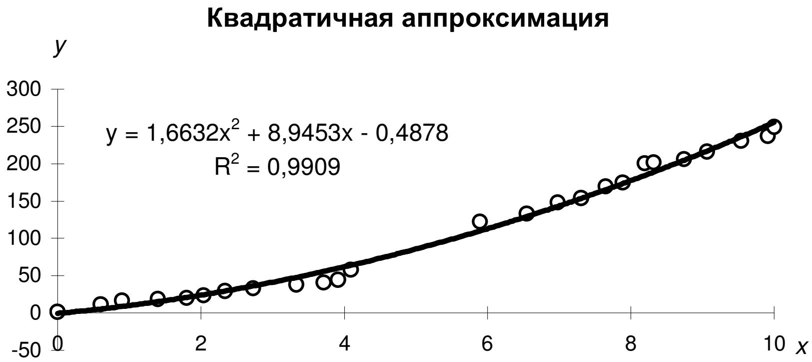

Рис.5

Для построения экпоненциальной аппроксимации на четвертом шаге в диалоговом окне “Линия тренда” выберем на вкладке “Тип” (Рис.2) экспоненциальный тип. Результат представлен на рис.6.

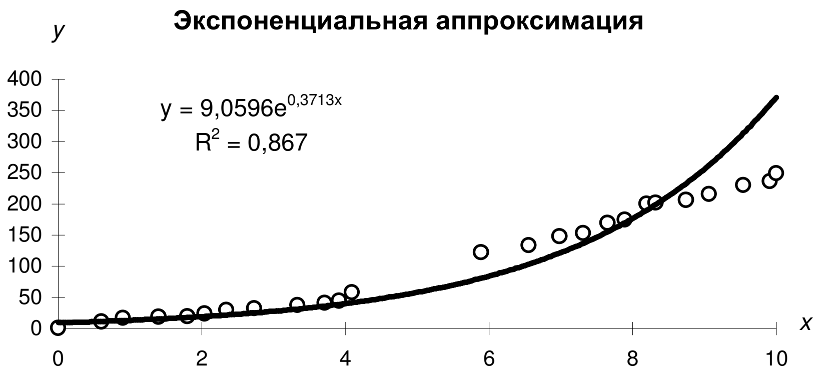

рис.6

Сравнивая результаты , полученные при помощи функции ЛИНЕЙН видим что они полностью совпадают с вычислениями, проведенными выше. Это указывает на то, что вычисления верны.

<u>Примечание:</u> Полученное при построении линии тренда значение коэффициента детерминированности для экспоненциальной зависимости $R^2 = 0.867$ не совпадает с истинным значением $R^2 = 0.758$ (это значение было сосчитано вручную выше) поскольку при вычислении коэффициента детерминированности с помощью функции ЛИНЕЙН используются не истинные значения y_i , а преобразованные значения $\ln y_i$ с дальнейшей линеаризацией.

Получение числовых характеристик зависимости

Для построения числовых характеристик необходимо создать табличную формулу, которая будет занимать 5 строк и 2 столбца. Этот интервал может располагаться в произвольном месте на рабочем листе. В этот интервал требуется ввести функцию ЛИНЕЙН. Для этого выполняем следующую последовательность действий:

1. Выделите область A65:B69.
2. Вызовите Мастер функций.
3. Выберите функцию **Линейн**.
4. Определим аргументы функции

- В качестве **изв_знач_у** укажите **B1:B25**.
- В качестве **изв_знач_х** укажите **A1:A25**.
- Третье поле **Константа** оставьте пустым.
- В четвертом поле **стат** наберите **истина**.

5. Нажмите кнопку **Закончить**.
6. Установите курсор в строку формул.
7. **Нажмите комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter, это обеспечит ввод табличной формулы!**

В результате должны заполниться все ячейки интервала **A65:B69** (см. табл.9).

Таблица 9.

	A	B
65	26.13337	-27.6553
66	0.978085	6.076247
67	0.968788	15.72744
68	713.8997	23
69	176584.7	5689.103

Поясним назначение некоторых величин, расположенных в табл.9.
Величины, расположенные в ячейках A65 и B65 характеризуют соответственно наклон и сдвиг.
A67 — коэффициент детерминированности.
A68— F-наблюдаемое значение.
B68 — число степеней свободы.
A69 — регрессионная сумма квадратов.
B69 — остаточная сумма квадратов.

Рассмотрим назначение функции ЛИНЕЙН.

Эта функция использует метод наименьших квадратов, чтобы вычислить прямую линию, которая наилучшим образом аппроксимирует имеющиеся данные.

Функция возвращает массив, который описывает полученную прямую. Уравнение для прямой линии имеет следующий вид:

$y = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots b$ или $y = mx + b$,

где зависимое значение y является функцией независимого значения x. Значения m - это коэффициенты, соответствующие каждой независимой переменной x, а b - это постоянная. Заметим, что y, x и m могут быть векторами.

Функция ЛИНЕЙН возвращает массив $\{m_n; m_{n-1}; \dots; m_1; b\}$. ЛИНЕЙН может также возвращать дополнительную регрессионную статистику.

Синтаксис

ЛИНЕЙН(известные_значения_y;известные_значения_x; конст; статистика)

Известные_значения_y - это множество значений y, которые уже известны для соотношения $y = mx + b$.

– Если массив **известные_значения_y** имеет один столбец, то каждый столбец массива **известные_значения_x** интерпретируется как отдельная переменная.

Известные_значения_x - это множество значений x, которые уже известны для соотношения $y = mx + b$.

- Массив **известные_значения_x** может содержать одно или несколько множеств переменных.
- Если используется только одна переменная, то **известные_значения_y** и **известные_значения_x** могут быть массивами любой формы при условии, что они имеют одинаковую размерность.
- Если используется более одной переменной, то **известные_значения_y** должны быть вектором (то есть интервалом высотой в одну строку или шириной в один столбец).

Конст - это логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа b была равна 0.

- Если **конст** имеет значение ИСТИНА или опущена, то b вычисляется обычным образом.
- Если **конст** имеет значение ЛОЖЬ, то b полагается равным 0 и значения m подбираются так, чтобы выполнялось соотношение $y = mx$.

Статистика - это логическое значение, которое указывает, требуется ли вернуть дополнительную статистику по регрессии.

- Если **статистика** имеет значение ИСТИНА, то функция ЛИНЕЙН возвращает дополнительную регрессионную статистику, так что возвращаемый массив будет иметь вид: $\left\{m_n; m_{n-1}; \ldots; m_1; b; se_n; se_{n-1}; \ldots; se_1; se_b; r^2; se_y; F; df; ss_{reg}; ss_{resid}\right\}$.
- Если статистика имеет значение ЛОЖЬ или опущена, то функция ЛИНЕЙН возвращает только коэффициенты m и постоянную b.

Дополнительная регрессионная статистика:

Величина	**Описание**
$se_1, se_2, \ldots, se_n$	Стандартные значения ошибок для коэффициентов $m_1, m_2, \ldots, m_n$.
se_b	b = #Н/Д, если конст имеет значение ЛОЖЬ.
r^2	Коэффициент детерминированности.
se_y	Стандартная ошибка для оценки y
F	F-статистика, или F-наблюдаемое значение. F-статистика используется для определения того, является ли наблюдаемая взаимосвязь между зависимой и независимой переменными случайной или нет.
df	Степени свободы. Степени свободы полезны для нахождения F-критических значений в статистической таблице. Для определения уровня надежности модели нужно сравнить значения в таблице с F-статистикой, возвращаемой функцией ЛИНЕЙН
ss_{reg}	Регрессионная сумма квадратов
ss_{resid}	Остаточная сумма квадратов

В табл.10 показано, в каком порядке возвращается дополнительная регрессионная статистика.

Таблица 10.

m_n	m_{n-1}	…..	m_2	m_1	b
se_n	se_{n-1}	…..	se_2	se_1	se_b
r^2	se_y				
F	df				
ss_{reg}	ss_{resid}				

Точность аппроксимации с помощью прямой, вычисленной функцией ЛИНЕЙН, зависит от степени разброса данных. Чем ближе данные к прямой, тем более точной является модель, используемая функцией ЛИНЕЙН. Функция ЛИНЕЙН использует метод наименьших квадратов для определения наилучшей аппроксимации данных. Когда имеется только одна независимая переменная, тогда x, m и b вычисляются по следующим формулам:

$$m = \frac{n - \left(\sum xy\right)\left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\left(\sum (x^2)\right) - \left(\sum x\right)^2}, \qquad b = \frac{\left(\sum y\right)\left(\sum (x^2)\right) - \left(\sum xy\right)\left(\sum x\right)}{n\left(\sum (x^2)\right) - \left(\sum x\right)^2}.$$

Эти формулы могут быть использованы для нахождения решения системы (4), вместо m и b следует подставить a_2 и a_1.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Во всех вариантах требуется:

1. Используя метод наименьших квадратов функцию $y = f(x)$, заданную таблично, аппроксимировать

а) многочленом первой степени $y = P_1(x) \equiv a_1 + a_2 x$;

б) многочленом второй степени $y = P_2(x) \equiv a_1 + a_2 x + a_3 x^2$;

в) экспоненциальной зависимостью $y = a_1 e^{a_2 \cdot x}$.

2. Для каждой зависимости вычислить коэффициент детерминированности.
3. Вычислить коэффициент корреляции (только в случае а).
4. Для каждой зависимости построить линию тренда.
5. Используя функцию ЛИНЕЙН вычислить числовые характеристики зависмости y от x.
6. Сравнить свои вычисления с результатами, полученными при помощи функции ЛИНЕЙН.
7. Сделать вывод, какая из полученных формул наилучшим образом аппроксимирует функцию $y = f(x)$.
8. Написать программу на одном из языков программирования и сравнить результаты счета с полученными выше.

Вариант 1. Функция $y = f(x)$ задана табл. 11.

Таблица 11

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.51	4.57	3.33	15.11	4.87	20.87	7.44	32.15	9.87	41.82
1.11	6.22	3.39	16.03	5.35	23.83	7.98	33.32	10.65	43.76
1.62	8.99	3.51	16.51	5.94	26.18	8.87	37.84	10.76	45.36
2.65	13.09	3.99	18.42	6.87	26.76	8.90	37.96	11.03	45.97
2.74	13.45	4.42	20.13	7.12	30.88	9.54	42.65	11.76	49.34

Вариант 2. Функция $y = f(x)$ задана табл. 12.

Таблица 12

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.72	0.53	2.55	6.23	5.23	24.98	8.07	60.54	10.21	98.32
0.99	1.10	3.24	9.06	6.87	36.85	8.44	61.76	10.59	100.76
1.11	1.22	4.53	20.32	7.08	48.03	9.22	80.97	11.43	108.37
1.76	3.22	4.65	22.87	7.32	47.63	9.63	81.43	12.32	145.59
1.86	3.91	5.02	25.65	7.74	55.86	9.65	79.04	12.85	154.77

Вариант 3. Функция $y = f(x)$ задана табл. 13.

Таблица 13

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.28	1.05	2.34	9.11	3.33	29.43	4.23	86.44	5.55	187.54
0.87	2.87	2.65	16.86	3.41	37.45	4.83	90.85	6.32	200.45
1.65	6.43	2.77	17.97	3.55	42.44	4.92	99.06	6.66	212.97
1.99	8.96	2.83	18.99	3.85	56.94	5.14	120.45	7.13	275.74
2.08	8.08	3.06	23.75	4.01	75.08	5.23	139.65	7.25	321.43

Вариант 4. Функция $y = f(x)$ задана табл. 14.

Таблица 14

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1.21	2.39	4.34	8.07	7.77	15.42	10.34	20.56	14.76	27.87
2.04	3.97	4.76	9.33	8.08	17.54	10.65	21.87	17.65	34.97
2.76	5.41	5.32	10.97	8.44	17.66	11.65	23.22	18.57	35.32
3.02	5.65	5.81	11.61	8.88	17.98	12.87	25.51	19.43	41.87
3.54	7.11	6.12	12.12	9.49	19.05	13.65	26.23	21.05	43.23

Вариант 5. Функция $y = f(x)$ задана табл. 15.

Таблица 15

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.77	0.56	2.76	7.06	5.54	28.76	8.12	65.87	11.89	130.75
1.45	2.08	3.45	14.98	5.81	30.76	8.87	77.85	12.56	149.56
1.76	3.04	3.89	15.98	6.98	45.76	9.45	86.09	13.43	172.45
2.23	2.76	4.87	23.22	7.34	50.87	10.87	101.65	13.55	175.51
2.65	3.65	5.04	26.12	7.86	60.45	11.23	124.37	14.76	200.54

Вариант 6. Функция $y = f(x)$ задана табл. 14.

Таблица 16

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.01	3.08	3.82	13.2	6.32	21.32	9.41	32.98	13.22	38.76
1.34	7.67	4.68	15.75	6.96	23.86	10.11	33.97	13.88	42.76
2.09	9.65	4.97	17.98	7.51	24.53	10.76	36.54	14.76	45.86
2.87	11.61	5.45	18.86	8.66	28.56	11.44	38.65	15.54	49.06
3.44	12.09	5.87	20.28	9.08	31.94	12.39	39.99	16.23	51.98

Вариант 7. Функция $y = f(x)$ задана табл. 17.

Таблица 17

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.86	1.89	5.78	76.98	8.34	256.78	9.54	399.89	11.22	555.43
1.54	6.76	6.45	122.32	8.78	277.71	9.75	425.98	11.39	578.98
2.78	9.79	7.23	167.89	8.88	300.45	10.32	466.89	11.39	623.42
3.99	15.98	7.65	188.65	9.15	342.56	10.67	488.98	11.43	630.76
5.34	54.67	7.91	219.87	9.25	378.45	10.78	500.12	12.19	686.02

Вариант 8. Функция $y = f(x)$ задана табл. 18.

Таблица 18

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.66	3.87	8.98	44.54	16.22	82.43	20.53	100.76	23.05	116.65
1.34	6.78	10.45	51.87	17.11	85.56	20.97	104.32	23.54	117.71
3.87	17.56	11.88	59.45	18.43	90.45	21.34	106.54	24.29	120.52
5.65	26.65	13.78	70.56	19.56	92.34	21.98	109.78	24.79	121.76
6.99	37.87	15.02	72.86	20.32	96.85	22.41	111.87	25.43	128.75

Вариант 9. Функция $y = f(x)$ задана табл. 19.

Таблица 19

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1.05	3.45	3.65	40.43	5.08	95.06	7.13	87.95	9.54	25.97
1.65	6.76	4.05	53.87	5.43	100.98	7.34	72.08	9.85	18.64
2.08	9.08	4.15	59.96	5.89	121.76	8.01	60.87	10.06	11.43
2.76	17.98	4.39	70.08	6.43	112.83	8.54	55.08	10.42	8.87
2.99	27.78	4.76	85.96	6.91	99.05	9.01	44.41	10.89	5.51

Вариант 10. Функция $y = f(x)$ задана табл. 20.

Таблица 20

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1.08	200.45	5.14	60.98	7.54	15.67	9.32	18.65	11.23	85.98
2.21	149.43	5.98	40.98	7.84	13.98	9.86	22.09	11.46	114.43
3.87	128.98	6.32	29.98	8.07	12.09	10.05	31.65	11.96	130.87
4.07	116.56	6.99	24.65	8.57	14.97	10.54	38.56	12.54	150.98
4.76	87.76	7.43	19.99	8.94	16.09	10.87	57.98	13.86	196.77

Вариант 11. Функция $y = f(x)$ задана табл. 21.

Таблица 21

аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i
2.23	8.09	5.34	22.21	9.65	39.54	17.61	70.76	22.21	88.07
2.87	12.76	5.76	23.78	10.76	40.76	18.05	75.45	24.65	96.97
3.66	15.76	6.23	25.55	11.65	45.65	18.87	76.98	25.32	104.43
3.97	16.76	7.45	30.97	12.45	46.78	19.97	82.07	26.43	112.87
4.86	20.97	8.76	32.21	16.76	64.87	20.85	83.09	27.65	120.12

Вариант 12. Функция $y = f(x)$ задана табл. 20.

Таблица 22

аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i
0.09	2.54	2.85	22.47	4.44	156.87	5.91	456.78	8.54	867.67
0.15	2.76	3.08	25.41	4.76	197.98	6.98	600.98	8.86	900.54
0.87	2.98	3.56	54.89	5.05	242.65	7.12	645.65	9.08	956.87
1.85	6.45	3.92	80.87	5.45	345.87	7.65	789.09	9.45	977.08
2.75	20.65	4.07	85.75	5.72	400.89	8.13	800.98	9.55	999.54

Вариант 13. Функция $y = f(x)$ задана табл. 23.

Таблица 23

аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i
0.55	1.54	5.34	47.87	9.45	287.65	13.56	255.87	17.21	20.76
1.43	3.78	6.35	98.09	9.97	299.86	14.65	200.67	17.69	11.78
2.87	6.78	6.86	154.08	10.55	356.98	14.76	167.37	18.54	7.87
3.54	9.76	7.58	198.09	11.34	321.95	15.86	107.67	19.08	4.08
4.63	17.87	8.23	245.97	12.12	296.94	16.33	54.98	19.78	2.78

Вариант 14. Функция $y = f(x)$ задана табл. 24.

Таблица 24

аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i	аргумент x_i	функция y_i
0.76	4.67	7.12	48.54	11.54	78.98	16.75	112.34	21.45	149.43
1.23	8.56	7.97	55.89	12.23	85.91	17.45	119.05	22.23	154.45
3.87	25.78	8.55	57.76	13.86	91.25	18.81	125.87	23.45	161.54
5.43	38.65	9.65	64.86	14.53	100.56	19.64	135.45	24.67	168.54
5.94	40.76	10.78	71.45	15.48	105.43	20.35	140.76	25.78	180.65

Вариант 15. Функция $y = f(x)$ задана табл. 25.

Таблица 25

аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i
2.85	300.76	6.85	82.45	9.41	14.29	12.89	21.34	16.32	107.45
3.45	234.87	7.32	76.45	9.79	11.08	13.62	31.43	16.65	130.48
4.23	188.81	7.79	34.64	10.54	10.56	14.51	40.78	17.34	185.77
4.77	132.21	8.34	25.45	11.84	15.54	15.21	81.12	18.53	243.67
5.46	98.97	8.87	19.76	12.45	17.56	15.84	92.34	19.32	287.78

Вариант 16. Функция $y = f(x)$ задана табл. 26.

Таблица 26

аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i
0.44	1.54	2.12	15.43	4.21	89.76	5.89	50.06	7.34	11.11
0.72	2.32	2.65	21.54	4.59	95.65	6.23	43.76	7.69	7.78
1.26	3.86	3.12	29.54	4.79	100.65	6.72	31.34	8.23	4.87
1.58	7.21	3.39	39.67	5.04	91.09	6.99	22.12	8.83	2.99
1.87	11.11	3.81	53.65	5.41	84.43	7.05	16.23	9.21	1.91

Вариант 17. Функция $y = f(x)$ задана табл. 27.

Таблица 27

аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i
0.21	1.62	4.98	40.09	7.96	63.31	12.33	97.77	17.32	126.45
1.19	8.65	5.49	43.56	8.32	67.45	13.21	105.34	18.43	144.34
2.43	16.76	6.07	48.45	9.43	72.87	14.72	112.56	19.38	160.45
3.12	24.45	6.81	52.21	10.21	81.34	15.53	121.89	20.45	161.34
4.54	32.87	7.21	57.34	11.54	89.45	16.23	108.54	21.22	170.59

Вариант 18. Функция $y = f(x)$ задана табл. 28.

Таблица 28

аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i
0.81	20.65	4.49	53.98	6.95	115.76	8.92	112.87	10.97	45.34
1.23	29.56	5.27	74.87	7.21	121.62	9.34	102.67	10.76	40.67
2.12	35.67	5.94	98.99	7.45	126.78	9.76	95.89	11.65	30.78
2.97	39.45	6.56	104.78	7.99	120.87	9.98	70.67	11.95	28.78
3.56	45.78	6.89	110.78	8.56	115.87	10.45	55.89	12.56	15.46

Вариант 19. Функция $y = f(x)$ задана табл. 29.

Таблица 29

аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i
2.54	1.12	6.45	3.15	9.08	4.59	12.67	6.33	17.77	9.05
4.43	2.29	7.32	4.44	9.66	4.88	14.02	7.33	18.98	9.76
5.32	2.99	7.76	4.12	10.22	5.19	14.87	7.54	20.34	10.34
5.99	3.09	8.23	4.11	10.88	5.66	15.55	8.87	22.45	12.43
6.12	3.78	8.87	4.67	11.45	6.01	16.71	8.35	23.49	12.21

Вариант 20. Функция $y = f(x)$ задана табл. 30.

Таблица 30

аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i	аргу-мент x_i	функ-ция y_i
0.08	0.05	2.78	22.21	5.59	43.39	7.91	62.48	10.32	79.09
0.56	3.65	3.43	23.54	6.09	47.89	8.05	63.23	10.43	79.98
1.23	8.81	4.01	31.21	6.44	51.23	8.45	68.56	11.34	87.09
1.89	15.09	4.67	35.32	7.05	55.52	9.12	71.67	11.93	94.23
2.22	17.87	5.08	39.45	7.34	58.45	9.54	75.56	12.43	95.56

Рекомендательный библиографический список

1. Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.

2. Информатика: Учебник / Под ред. проф. Н.В. Макаровой. М.: Финансы и статистика, 1997.

3. Информатика: Практикум по технологии работы на компьютере/ Под ред. проф. Н.В. Макаровой. М.: Финансы и статистика, 1997.

4. В.Б. Комягин. Программирование в Excel5 и Excel7 на языке Visual Basic. М.: Радио и связь, 1996.

5. Н. Николь, Р.Альбрехт. Excel 5.0. Электронные таблицы. М.: Изд. “ЭКОМ”, 1996.