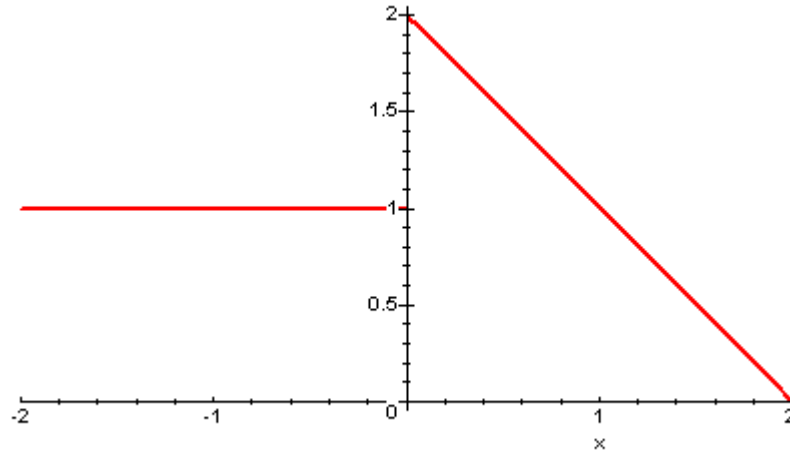


Пример разложения функции в ряд Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 0); \\ 2-x, & x \in [0; 2). \end{cases}$$

1. $\ell = 2$, график заданной функции на интервале $[-2; 2]$:



2. **Коэффициенты разложения** функции в ряд Фурье (здесь приведен только конечный результат (ответ), в РГЗ вычисления интегралов должны быть показаны, текст можно писать от руки):

$$a_0 = 2; \quad a_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n); \quad b_n = \frac{1}{\pi n} (1 + (-1)^n).$$

Таким образом,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n) \cos \frac{\pi n x}{2} + \frac{1}{\pi n} (1 + (-1)^n) \sin \frac{\pi n x}{2} \right).$$

3. **Первые три ненулевые гармоники:**

$$y_1 = \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right); \quad y_2 = \frac{1}{\pi} \sin(\pi x); \quad y_3 = \frac{4}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right).$$

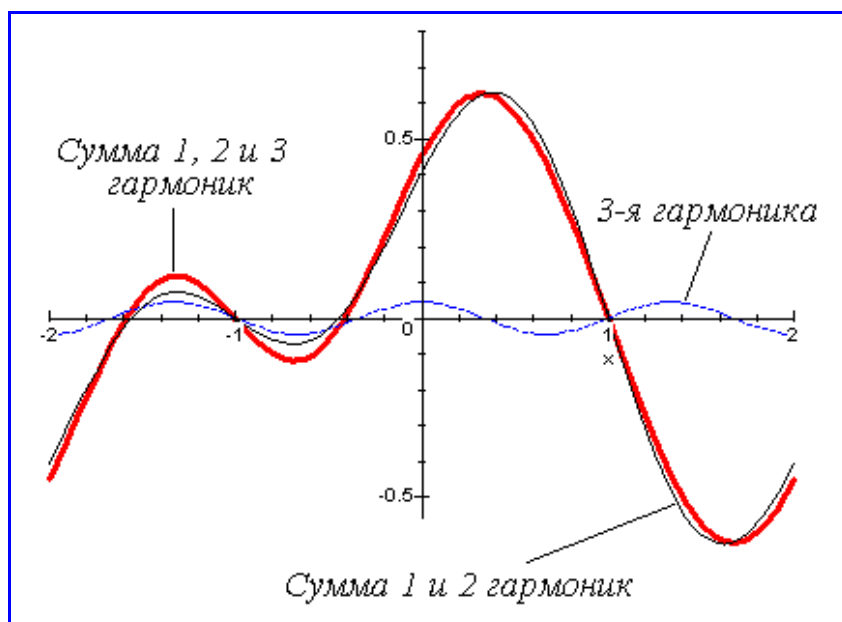
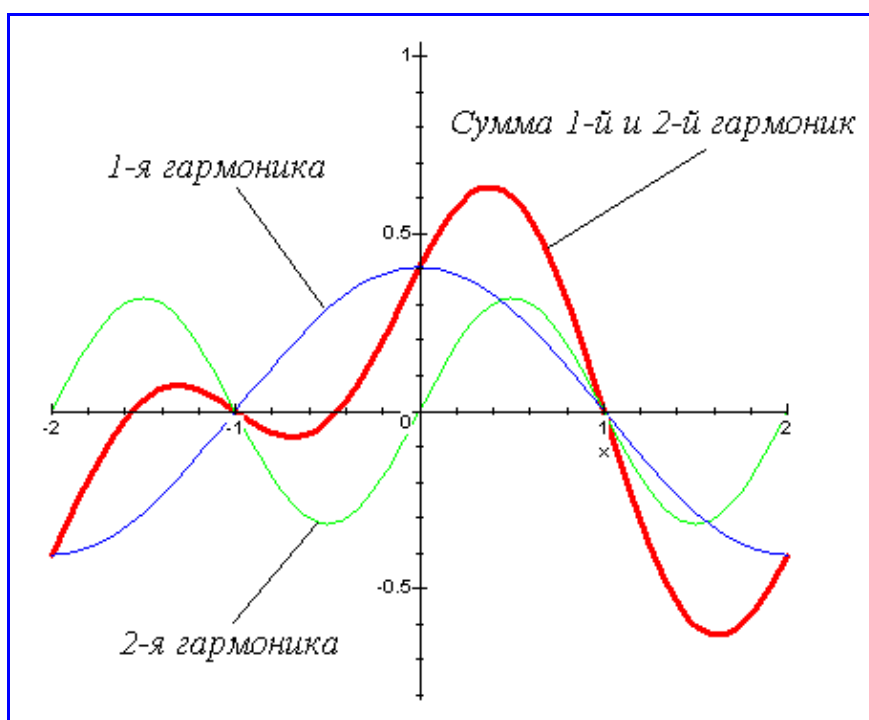
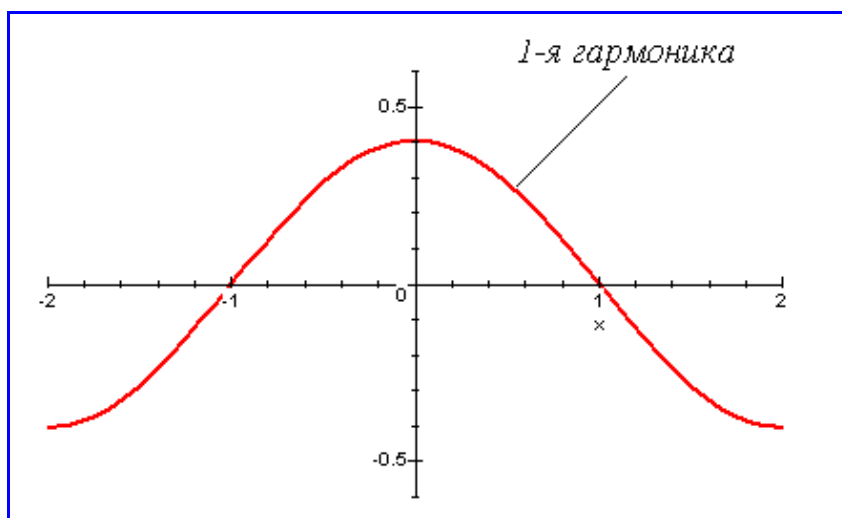
7. **Проверка выполнения теоремы Дирихле.**

Так как обе указанные в задании точки $x = 0$ и $x = 2$ являются точками разрыва функции, проверим выполнение теоремы Дирихле при $x = 0$ и $x = 1$.

$$\text{При этом } f(1) = 1 \text{ и } \tilde{f}(0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow -0} f(x) + \lim_{x \rightarrow +0} f(x) \right] = \frac{1+2}{2} = 1,5.$$

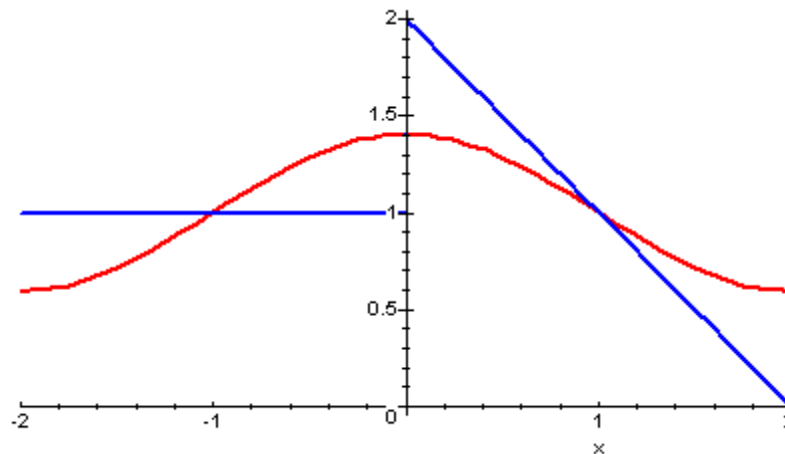
Удобнее выполнить проверку при вычислении и построении приближений (в п.6).

4. Графики, иллюстрирующие сложение гармоник.



5. Приближения функции рядом Фурье.

Первое приближение: $s_1 = \frac{a_0}{2} + y_1 = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$



Проверка теоремы Дирихле:

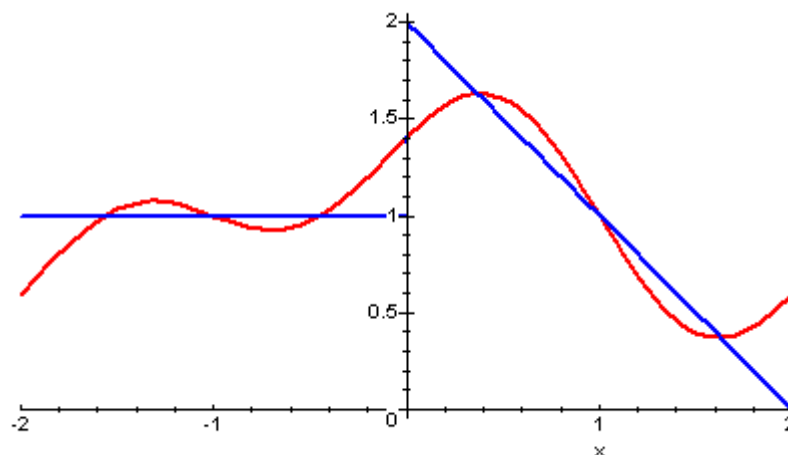
$$x = 0 \Rightarrow s_1(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \approx 1,405; \quad \tilde{f}(0) = 1,5 \Rightarrow$$

$$\text{Абсолютная погрешность первого приближения } \Delta = |1,5 - 1,405| = 0,095;$$

$$\text{относительная погрешность: } \delta = \frac{0,095}{1,5} \cdot 100\% = 6,33\%.$$

$$x = 1 \Rightarrow s_1(1) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad f(1) = 1 \Rightarrow s_1(1) = f(1).$$

Второе приближение: $s_2 = \frac{a_0}{2} + y_1 + y_2 = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x).$



Проверка теоремы Дирихле:

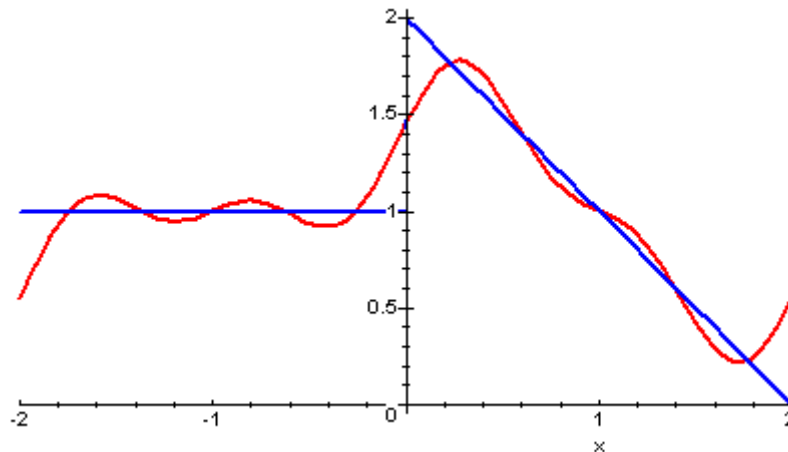
$$x = 0 \Rightarrow s_2(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos(0) + \frac{1}{\pi} \sin(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} + 0 \approx 1,405; \quad \tilde{f}(0) = 1,5 \Rightarrow$$

$$\text{Абсолютная погрешность второго приближения } \Delta = |1,5 - 1,405| = 0,095;$$

$$\text{относительная погрешность: } \delta = \frac{0,095}{1,5} \cdot 100\% = 6,33\%.$$

$$x = 1 \Rightarrow s_2(1) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi) = 1; \quad f(1) = 1 \Rightarrow s_2(1) = f(1).$$

Третье приближение: $s_3 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^3 y_n = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{4}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right).$



Проверка теоремы Дирихле:

$$x = 0 \Rightarrow s_3(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos(0) + \frac{1}{\pi} \sin(0) + \frac{4}{9\pi^2} \cos(0) = 1 + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} \approx 1,450; \quad \tilde{f}(0) = 1,5 \Rightarrow$$

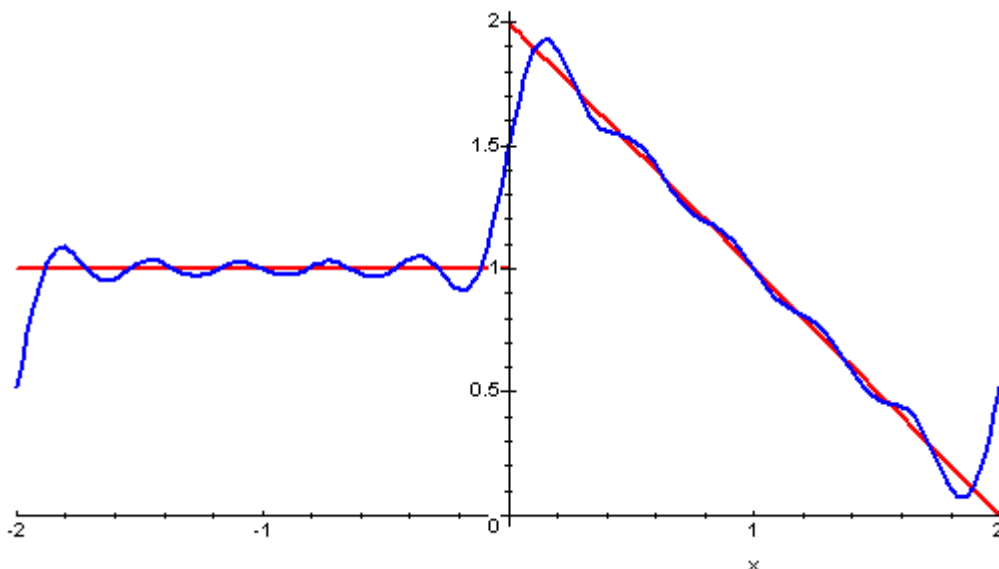
$$\text{Абсолютная погрешность третьего приближения } \Delta = |1,5 - 1,45| = 0,05;$$

$$\text{относительная погрешность: } \delta = \frac{0,05}{1,5} \cdot 100\% = 3,33\%.$$

$$x = 1 \Rightarrow s_3(1) = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi) + \frac{4}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1; \quad f(1) = 1 \Rightarrow s_3(1) = f(1).$$

Десятое приближение функции рядом Фурье:

$$s_{10} = 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi x) + \frac{4}{9\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) + \frac{4}{25\pi^2} \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \\ + \frac{1}{3\pi} \sin(3\pi x) + \frac{4}{49\pi^2} \cos\left(\frac{7\pi x}{2}\right) + \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi x) + \frac{4}{81\pi^2} \cos\left(\frac{9\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5\pi} \sin(5\pi x).$$



Проверка теоремы Дирихле:

$$\begin{aligned}x = 0 \Rightarrow s_{10} &= 1 + \frac{4}{\pi^2} \cos(0) + \frac{1}{\pi} \sin(0) + \frac{4}{9\pi^2} \cos(0) + \frac{1}{2\pi} \sin(0) + \frac{4}{25\pi^2} \cos(0) + \\ &+ \frac{1}{3\pi} \sin(0) + \frac{4}{49\pi^2} \cos(0) + \frac{1}{4\pi} \sin(0) + \frac{4}{81\pi^2} \cos(0) + \frac{1}{5\pi} \sin(0) = \\ &= 1 + \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} \right) \approx 1,48; \quad \tilde{f}(0) = 1,5 \Rightarrow\end{aligned}$$

Абсолютная погрешность десятого приближения $\Delta = |1,5 - 1,48| = 0,02$;

относительная погрешность: $\delta = \frac{0,02}{1,5} \cdot 100\% = 1,33\%$.

$$x = 1 \Rightarrow s_{10}(1) = 1; \quad f(1) = 1 \Rightarrow s_{10}(1) = f(1).$$

6. График функции и десятого приближения на интервале $[-3l; 3l]$.

