

## Практическое занятие №9

### Тема: Численное решение уравнения Фредгольма 2 рода методом квадратур

Цель – сформировать у магистрантов представление о применении интегральных уравнений в различных областях. Привить умение решать линейные интегральные уравнения Фредгольма 2 рода. Развить навыки проверки полученных результатов с помощью прикладных программ.

#### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию  $y(x)$  под знаком интеграла:

$$\int_a^b F(x, t, y(t)) dt = G(x, y(x)) \quad (1)$$

Здесь  $F, G$  – заданные функции. Если функция в правой части уравнения (1) не зависит от  $y(x)$ , то говорят об интегральном уравнении 1-го рода, в общем случае – об уравнении 2-го рода.

Область  $S = [a, b] \times [a, b]$  изменения переменных  $x$  и  $t$  в уравнении (1) называется основным квадратом. Функция  $F$  считается определенной в  $S$ . Промежуток  $[a, b]$ , на котором ищется функция  $y(x)$ , называется областью определения уравнения (1). Промежуток  $[a, b]$  может быть и бесконечным ( $a = -\infty$  и/или  $b = +\infty$ ). Функцию  $y(x)$ , которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество для всех  $x \in [a, b]$ , называют решением интегрального уравнения (1) на промежутке  $[a, b]$ .

Интегральное уравнение (1) называют линейным, если в него неизвестная функция входит линейно.

Линейное интегральное уравнение вида

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (2)$$

называется интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.  
Уравнение

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad (3)$$

называют интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода.

В уравнениях (2), (3) функции  $f(x), K(x, t)$  являются заданными,  $y(x)$  – искомая функция,  $\lambda$  – числовой параметр,  $x \in [a, b], t \in [a, b]$ . Функция  $K(x, t)$  называется ядром интегрального уравнения,  $f(x)$  – свободным членом. Если  $f \equiv 0$ , то уравнения (2), (3) называются однородными, в противном случае – неоднородными.

К интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода приводят задачи гравирозведки полезных ископаемых, задача восстановления размытого изображения. К однородным интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода приводят, например, задачи о собственных колебаниях систем, т. е. колебаниях при отсутствии внешней силы.

Частный случай линейных уравнений вида (2), (3), имеющий важное самостоятельное значение, возникает для ядер, удовлетворяющих условию

$$K(x, t) \equiv 0 \quad t > x.$$

Такие ядра называют ядрами Вольтерры.  
При этом уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad x \in [a,b] \quad (4)$$

$$\int_a^x K(x,t)y(t)dt = f(x) \quad x \in [a,b] \quad (5)$$

называют уравнениями Вольтерры соответственно 2-го и 1-го рода.

К линейным уравнениям Вольтерры 2-го рода приводит, например, решение начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА 2 РОДА МЕТОДОМ КВАДРАТУР

Формально уравнение (4) является частным случаем уравнения (2), если ядро уравнения отвечает условию  $K(x,t) \equiv 0 \quad t > x$ . Однако это свойство функции  $K(x,t)$  приводит к тому, что методы решения этих уравнений становятся принципиально различными. При использовании метода квадратур, входящие в уравнения интегралы заменяются квадратурными суммами, а полученные конечные соотношения могут быть как вспомогательными, так и имеющими самостоятельный характер в качестве окончательных расчетных выражений.

В уравнениях Вольтерра (4) значение искомой функции  $y$  в точке  $x$  определяется ее значениями в предшествующих точках  $t < x$ , а значения в последующих точках  $t > x$  не влияют на  $y(x)$ . Для приближенного решения уравнения на отрезке  $[a,b]$  берем из точек  $a \leq t_0 < t_1 < \dots, t_n \leq b$  и находим приближенные значения  $y(t_k) \approx y_k^n$  только в узлах сетки. Для этого интегральное уравнение аппроксимируем системой линейных алгебраических уравнений относительно величин  $y_k^n$ . Эту система строим так, чтобы по известным значениям  $y_0^n, y_1^n, \dots, y_{k-1}^n$  можно было построить уравнение для нахождения  $y_k^n$ . В случае уравнения Фредгольма (2) совсем другая ситуация. Интеграл в (2) зависит от значений неизвестной функции  $y(x)$  на всем отрезке. Поэтому в каждое уравнение аппроксимирующей системы должны входить значения  $y_k^n$  во всех точках сетки и система должна решаться не последовательно, а сразу вся.

Найдем приближенное решение уравнения (2) методом квадратур. Построим на отрезке  $[a,b]$  сетку с узлами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Запишем уравнение (2) в узлах сетки:

$$y(x_i) - \lambda \int_a^x K(x_i,t)y(t)dt = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Аппроксимируем интегралы в равенствах (12) конечными суммами с помощью одной из квадратурных формул

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Здесь  $y_i = \tilde{y}(x_i)$ ,  $f_i = f(x_i)$ ,  $K_{ij} = K(x_i, x_j)$ .  $\tilde{y}$  - приближение к искомой функции  $y$ ,  $A_j$  - веса квадратурной формулы.

Решение системы (13) дает приближенные значения искомой функции в узлах  $x_i$ . По ним с помощью интерполяции можно построить приближенное решение интегрального уравнения (2) на всем отрезке  $[a,b]$ .

Возьмем равномерную сетку с шагом  $h$  и используем квадратурную формулу трапеций. Тогда система линейных алгебраических уравнений (13) примет вид:

$$y_i - \lambda h \sum_{j=1}^n w_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где  $w_1 = w_n = \lambda/2$ ,  $w_j = \lambda$   $j = 2, 3, \dots, n-1$ .

Используем формулу (14) при решении примера 3

**Пример 3.** Получить численное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) - 7 \int_{-3\pi}^{3\pi} [\pi + \sin[2(x+t)]] \cdot y(t) = x \cdot \cos(x) - 28\pi \cdot \cos(2x)$$

на интервале  $[-3\pi, 3\pi]$ . Полученное решение сравнить с точным решением:  $y(x) = x \cdot \cos(x)$ .

Результаты представлены на рис. 8-10. На рис. 8 представлена функция, возвращающая численное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с использованием квадратурной формулы трапеций.

```

a := -3π  b := 3π  n := 54  K(x,t) := π + sin[2(x+t)]  λ := 7
F(x) := x · cos(x) - 28 · π · cos(2 · x)
Fred_2_TR(a,b,n,λ,K,f) :=
  h ← (b - a) / n
  for i ∈ 0..n
    x_i ← a + i · h
    fl_i ← f(x_i)
    for j ∈ 0..n
      t_j ← a + j · h
      K1_i,j ← K(x_i, t_j)
    for i ∈ 0..n
      M_i,0 ← -h/2 · λ · K1_i,0
      for j ∈ 1..n-1
        M_i,j ← -h · λ · K1_i,j
      M_i,n ← h/2 · λ · K1_i,n
      M_i,i ← M_i,i + 1
    y ← M^-1 · fl
    V<0> ← x
    V<1> ← y
  V

```

Рис. 8 Фрагмент документа Mathcad с функцией, возвращающей численное решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

На рис. 9 графические решения: точное и приближенные с использованием квадратурных формул трапеций и левых прямоугольников с шагом  $h = \pi/9 = 0.349$ . Относительная ошибка решения  $\delta = 0.00711705$  при использовании формулы трапеций и  $\delta = 0.0758672$  при использовании формулы левых прямоугольников.

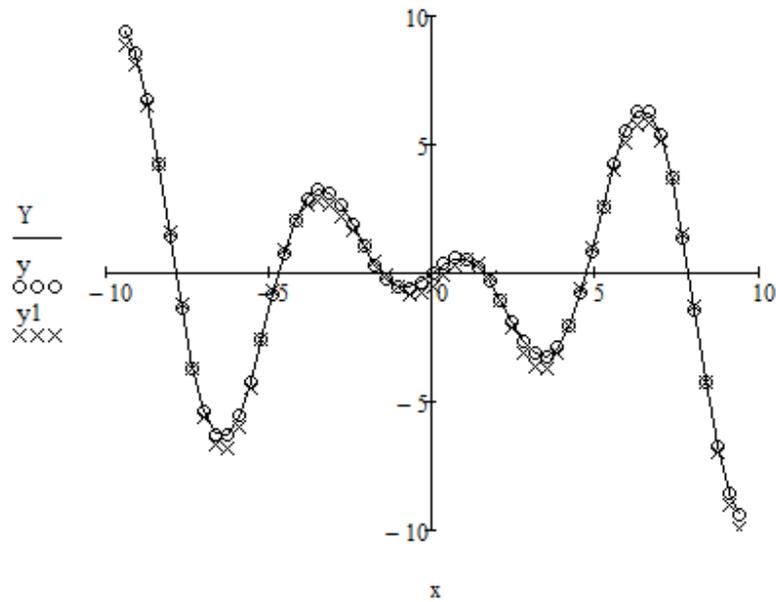


Рис. 9 Графическое решение уравнения. Здесь Y -точное решение;  
 y – решение с использованием квадратурной формулы трапеций;  
 y1 - решение с использованием квадратурной формулы левых прямоугольников

После уточнения по правилу Рунге (рис. 10 при использовании формулы трапеций) получили численное решение, совпадающее с точным решением (рис. 11). Относительная ошибка решения уменьшилась до  $\delta = 1.806 \times 10^{-6}$  при использовании формулы трапеций и до  $\delta = 0.00921507$  при использовании формулы левых прямоугольников.

```

E := 0.0001
Rez := for M ∈ 0..1000000
  y1 ← Fred_2_TR(a,b,n,λ,K,f)
  y2 ← Fred_2_TR(a,b,2n,λ,K,f)
  for k ∈ 0..n
    r_k ← max(|y1_{k,1} - y2_{2k,1}|)
  break if max(r) < E
  n ← 2 · n otherwise
  (y2)
  (2n)

Rez = ( {3457,2} )
      ( 3.456 × 10^3 )
i := 0..Rez_1
y2 := Fred_2_TR(a,b,Rez_1,λ,K,f)
x_i := y2_{i,0}    yU_i := y2_{i,1}
Y_i := x_i · cos(x_i)
μ := |Y - yU|    μ = 4.123411 × 10^-4
δ := μ ÷ |yU|    δ = 1.806 × 10^-6
  
```

Рис. 10 Фрагмент документа Mathcad с функцией, уточняющей решение уравнения

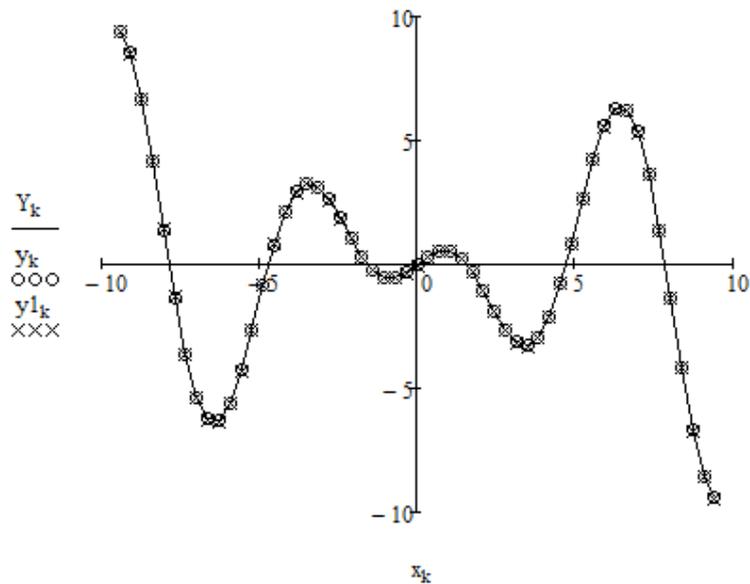


Рис. 11 Графическое решение уравнения. Здесь  $Y$  -точное решение;  
 $y$  – уточненное решение с использованием квадратурной формулы трапеций;  
 $y1$  – уточненное решение с использованием квадратурной формулы левых прямоугольников

### Задание 3.

1. Найдите приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода, используя квадратурные формулы левых прямоугольников, правых прямоугольников, трапеций, Симпсона. Выберите решение с наименьшей относительной ошибкой.

2. Для выбранного решения постройте последовательность непрерывных функций  $y_n(x)$ , сходящихся к точному решению исходного интегрального уравнения. Поиск в этой последовательности такого элемента  $y_n(x)$ , начиная с которого выполняется условие  $\|y_n(x) - y_{n-1}\| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - заданная заранее точность.

3. Сравните приближенное решение с точным решением в евклидовой норме. Вычислите значение относительной ошибки решения  $\delta$ . Постройте графики точного и приближенного решений.

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

### Вариант 1.

$$y(x) - 4 \int_0^1 x^2 e^{x^2 t^4} y(t) dt = x^3 - e^{x^2} + 1, \quad \varepsilon = 0.0001.$$

Точное решение:  $y(x) = x^3$ .

### Вариант 2.

$$y(x) - \int_{-1}^1 x^2 e^{xt} y(t) dt = 1 - 2x \sinh x, \quad \varepsilon = 0.00001.$$

Точное решение:  $y(x) = 1$ .

### Вариант 3.

$$y(x) - 4 \int_0^2 (2x - t) y(t) dt = \frac{22}{9} - \frac{21x}{10}, \quad \varepsilon = 0.0001.$$

Точное решение:  $y(x) = \frac{17}{30}x - \frac{2}{5}$ .

### Вариант 4.

$$y(x) - 4 \int_0^{2\pi} \sin(x) \cos(t) y(t) dt = \cos(2x), \quad \varepsilon = 0.000001.$$

Точное решение:  $y(x) = \cos(2x)$ .

**Вариант 5.**

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^t y(t) dt = e^{-x}, \quad \varepsilon = 0.00001$$

Точное решение:  $y(x) = x + e^{-x}$ .

**Вариант 6.**

$$y(x) - \int_0^1 x t^2 y(t) dt = 1, \quad \varepsilon = 0.00001.$$

Точное решение:  $y(x) = 1 + \frac{4}{9}x$ .

**Вариант 7.**

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x t y(t) dt = \frac{5}{6}x, \quad \varepsilon = 0.000001.$$

Точное решение:  $y(x) = x$ .

**Вариант 8.**

$$y(x) - 2 \int_0^1 \sin(x^2 + t^2) y(t) dt = x - \cos(x^2) + \cos(x^2 + 1),$$

$\varepsilon = 0.0001$ . Точное решение:  $y(x) = x$ .

**Вариант 9.**

$$y(x) - 5 \int_{-1}^1 (x^2 t + x t^2) y(t) dt = x^2 [30 \sin(1) - 50 \cos(1) + \sin(x)],$$

$\varepsilon = 0.0001$ . Точное решение:  $y(x) = x^2 \sin(x)$ .

**Вариант 10.**

$$y(x) - 2 \int_{0.5}^1 \frac{1}{x^2 - t^2 + 1} y(t) dt = x + \ln\left(\frac{x^2}{x^2 + 0.75}\right), \quad \varepsilon = 0.0001. \text{ Точное решение: } y(x) = x$$

**Вариант 11.**

$$y(x) - \frac{1}{3} \int_1^6 \frac{1}{x^2 + t^2} y(t) dt = \frac{x^2}{6} \ln\left(\frac{x^2 + 36}{x^2 + 1}\right) + x^3 - \frac{35}{6},$$

$\varepsilon = 0.0001$ . Точное решение:  $y(x) = x^3$ .

**Вариант 12.**

$$y(x) - \int_1^2 \frac{1}{x^2 + t^2 + 1} y(t) dt = x + \ln\left(\sqrt{\frac{x^2 + 2}{x^2 + 5}}\right), \quad \varepsilon = 0.0001. \text{ Точное решение: } y(x) = x.$$

**Вариант 13.**

$$y(x) - 17 \int_{-\pi}^{\pi} \sin[4(x - t)] y(t) dt = e^x - 2 \sinh(\pi) [\sin(4x) + 4 \cos(4x)],$$

$\varepsilon = 0.001$ . Точное решение:  $y(x) = e^x$

**Вариант 14.**

$$y(x) - \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (x - t) y(t) dt = \sinh(\pi) - 2 \sinh(x) - \pi \cosh(\pi),$$

$\varepsilon = 0.001$ . Точное решение:  $y(x) = e^{-x} - e^x$

**Вариант 15.**

$$y(x) - 3 \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{x-t}{2}\right) y(t) dt = \sin(x) - 8 \cos\left(\frac{x}{2}\right),$$

$\varepsilon = 0.001$ . Точное решение:  $y(x) = \sin(x)$