Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МОРСКОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н.В. ВАСИЛЬЕВА, А.Н. МОСКАЛЕВ, Е.Г. СЕДОВА

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Утверждено советом университета
в качестве учебного пособия

Санкт-Петербург
2019

УДК 517 (075)
ББК 22.161
В68

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор Т.М. Косовская;
кандидат физико-математических наук Н.Д. Петухова

Васильева Н.В., Москалев А.Н., Седова Е.Г.

В68 Математика для заочного отделения. Методические указания и контрольные работы: учеб. пособие. — СПб.: Изд-во СПбГМТУ. — 2019. — ?? с.

ISBN

Данное учебное пособие адресовано бакалаврам заочного отделения Санкт-Петербургского государственного морского технического университета и включает в себя такие разделы дисциплины «Математика» как: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия, теория пределов и дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных. В пособии содержится краткая теория по этим разделам, необходимая для решения типовых задач, приводится подробный разбор решения задач, входящих в контрольные работы, а также приведены варианты контрольных работ.

УДК 517 (075)
ББК 22.161

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие написано для бакалавров заочного отделения инженерных и экономических направлений и представляет собой первую часть дисциплины «Математика», которая изучается на первом курсе. Пособие содержит краткий теоретический материал, необходимый для решения стандартных задач, методы и подробный разбор решения таких задач, а также четыре контрольные работы, которые необходимо выполнить на первом курсе.

Объем материала пособия соответствует ФГОС третьего поколения, его содержание обусловлено учебными планами изучения математических дисциплин в вузах РФ, а глубина изложения – уровню требований к математической подготовке студентов российских университетов.

Учебное пособие включает в себя пять частей дисциплины «Математика». В конце каждой части размещены контрольные работы.

В конце пособия указан список используемой и рекомендуемой литературы, имеющейся в библиотеке СПбГМТУ или доступной в сети Интернет. Авторы надеются, что работа будет полезной обучающимся на заочном отделении при подготовке к экзамену, а также преподавателям, ведущим занятия на заочном отделеним.

ПРЕДИСЛОВИЕ К УЧЕБНОМУ ПОСОБИЮ

Пособие представляет собой первую часть курса «Математика», изучаемую на первом курсе заочного отделения. Оно включает в себя такие пять разделов дисциплины:

1. Линейная алгебра.
2. Векторная алгебра и аналитическая геометрия.
3. Линейные преобразования в линейном векторном пространстве.
4. Теория пределов.
5. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных.

В конце каждого раздела размещены задания к четырем контрольным работам. Решение каждого контрольного задания подробно разобрано, а вариант контрольного задания следует выбирать по последней цифре номера зачетной книжки.

Решения задач, аналогичным задачам контрольных работ, разобраны в каждой части пособия и в силу этого не должны вызвать затруднений у обучающихся.

Третья часть пособия – «Линейные преобразования в линейном векторном пространстве» адресована бакалаврам экономических направлений. Поэтому обучающиеся по инженерным направлениям могут изучать ее на уровне ознакомления.

1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В учебном курсе «Линейная алгебра» изучаются методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), т.е. систем m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которые записываются в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.1)$$

где через a_{ij} обозначен коэффициент i – го уравнения системы при неизвестном x_j для всех $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – правые части системы.

При решении систем проводятся действия с коэффициентами a_{ij} и правыми частями $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Поэтому мы будем проводить операции с таблицей коэффициентов при неизвестных, которую будем называть *матрицей системы* и обозначать ее в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Если $m = n$, то матрица является квадратной и соответствует системе n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которую называют *линейной системой n – го порядка*.

Неизвестные и правые части системы будем записывать в виде столбцов вида:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Решить систему (1.1.) – значит найти упорядоченный набор неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ или столбец неизвестных X. Напомним то, что известно из школьного курса элементарной математики:

– СЛАУ может иметь одно решение, т.е. существует единственный набор $x_1, x_2, \dots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство;

– СЛАУ может вообще не иметь решений;

– СЛАУ может иметь бесконечно много решений.

Далее введем по определению операции, которые проводятся с матрицами, смысл и назначение которых будет понятны чуть позже.

1.1. Матрицы и определители

Матрицы. Действия с матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Если она содержит m строк и n столбцов, то матрица называется матрицей *размерности* $m \times n$ **.** Матрицы записывают в виде:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \dots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn}\end{pmatrix},$$

обозначая через a_{ij} ее элемент, находящийся в i – й строке и в j – том столбце. Если это важно, то размерность матрицы указывают в ее названии: $A_{m\times n}$.

Если у матрицы число строк равно числу столбцов, то есть $m = n$, то она называется *квадратной матрицей* n *– го порядка.* Те элементы $a_{i,j}$ квадратной матрицы A, для которых $i = j$ называются *диагональными*, а ряд, на котором они находятся, *главной диагональю. Элементы* $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$ образуют так называемую *вспомогательную диагональ матрицы* (рис. 1.1).

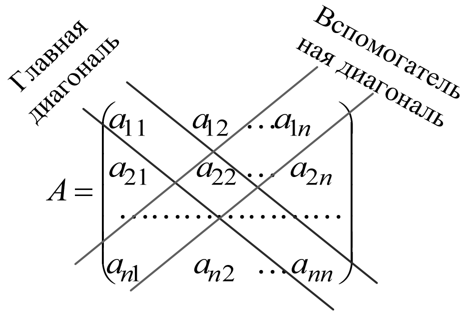


Рис. 1.1. Главная и вспомогательная диагонали матрицы

Виды квадратных матриц

Верхняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots & \ldots. \\ 0 & 0 & \ldots. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нижняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots & \ldots. \\ 0 & 0 & \ldots. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единичная

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots. & \ldots.. & \ldots & \ldots. \\ 0 & 0 & \ldots. & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц

Операция замены каждой i – й строки матрицы A ее i – м столбцом называется *транспонированием.* Транспонированная к матрице A матрица обозначается A^T.

Из определения следует, что транспонированная к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица имеет вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц

Суммой матриц $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,,\ i = 1, 2, ..., m \text{ и } j = 1, 2, ..., n\,. \quad (1.4)$$

Для суммы матриц используют обозначение: $A + B = C$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на вещественное число α называется матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}\,,\ i = 1, 2, ..., m \text{ и } j = 1, 2, ..., n\,. \quad (1.5)$$

Для произведения матрицы на число используют обозначение: $\alpha A = C$.

Задача 1.1

Вычислите линейную комбинацию $2A - B^T$ матриц $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение

На основании сформулированных операций (1.4) – (1.5) с матрицами запишем:

$$2A - B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -8 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & -8 \\ -6 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & -7 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A_{m \times l}$ на матрицу $B_{l \times n}$ называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + ... + a_{il} b_{lj}, \quad (1.6)$$

при $i = 1, 2, ..., m$ и $j = 1, 2, ..., n$.

Для произведения матриц используют обозначение: $A \cdot B = C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Из определения умножения матриц следует, что элемент c_{ij}

в матрице C является суммой произведений соответствующих элементов i – й строки матрицы A и j – го столбца матрицы B. На рисунке 2 схематично показано получение элемента c_{11} в произведении матриц.

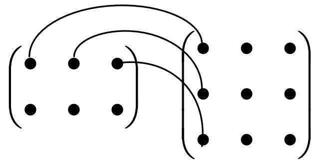


Рис. 1.2. Правило умножения матриц

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Произведение матриц определено только в том случае, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго. Произведение матриц содержит столько строк, сколько имеет первый сомножитель, и столько столбцов, сколько имеет второй сомножитель.

Задача 1.2

Найдите произведение матриц в том порядке, в котором оно определено $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

Для заданных матриц определено только произведение $A \cdot B$. По формуле (1.6):

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 \cdot (-2)+0 & 2 \cdot 3+0 \\ -1 \cdot (-2)+\cdot(-2) \cdot 4 & -1 \cdot 3-2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2)-5 \cdot 4 & 3 \cdot 3-5 \cdot (-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -1 \\ -26 & 14 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3

В общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$. Матрицы, для которых выполняется условие $A \cdot B = B \cdot A$, называются *коммутативными*.

Определители 2–го и 3–го порядка

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие число, которое называется ее *определителем* и обозначается $|A|$ или det$A$.

Определитель второго порядка

Для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определитель (*определитель второго порядка*) определяется по правилу:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Рис. 1.3. Правило вычисления определителя второго порядка

Определитель третьего порядка

Определитель квадратной матрицы третьего порядка (*определитель третьего порядка*) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ вычисляется через ее элементы по следующей формуле:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Схематично правило вычисления определителя третьего порядка показано на рис. 1.4, из которого ясно, что:

– за знаком определителя следует еще раз записать первый и второй его столбцы;

– после этого нужно провести главную диагональ матрицы и две прямые параллельные ей так, чтобы каждая прошла через три элемента;

– элементы, попавшие на эти прямые, следует перемножить и полученные произведения сложить;

– затем провести вспомогательную диагональ матрицы и две прямые параллельные ей так, чтобы каждая прошла через три элемента;

– элементы, попавшие на эти прямые, следует перемножить и полученные произведения вычесть из предыдущего результата.

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Рис. 1.4. Правило вычисления определителя третьего порядка

Задача 1.3

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

Решение

Вычислим определитель, используя правило на рис. 1.4:

$$\left|\begin{matrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix} = 3\cdot 1\cdot 4-1\cdot 5\cdot 2-1\cdot 3\cdot 2+2\cdot 1\cdot 1+2\cdot 5\cdot 3-4\cdot 3\cdot 1=16$$

С помощью определителей решают линейные системы 2 – го, 3 – го и более высокого порядка по *формулам Крамера*. Для систем порядка выше три $(n \geq 4)$ определитель вычисляется с использованием свойств определителей.

Основные свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании матрицы.

2. Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то определитель поменяет знак.

3. Определитель с двумя пропорциональными (равными) строками (столбцами) равен нулю.

4. Если в определители строка (столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

5. Общий множитель у элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

6.Определитель не изменится, если ко всем элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

7. Определитель диагональной и треугольной (верхней и нижней) матриц равен произведению диагональных элементов.

8. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.

Минором элемента a_{ij} в определителе называется определитель, который получится из данного вычеркиванием i – ой строки и j – ого столбца. Для минора используют обозначение Δ_{ij}.

Например, в определителе $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ минором для элемента a_{21} будет число: $\Delta_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} в определителе называется число, которое вычисляется по правилу: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta ij$, где Δ_{ij} – соответствующий минор.

Например, в определителе $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ алгебраическим дополнением для элемента a_{21} будет число: $A_{21} = (-1)^{2+1}\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(-6) = 6$.

ЗАМЕЧАНИЕ

При выборе знака перед минором в алгебраическом дополнении для определителя 3 – го порядка следует руководствоваться следующим правилом: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$.

Теорема разложения

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

или

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \text{ и.т.д.}$$

Теорема разложения позволяет вычислять определитель любого порядка. Особенно удобно пользоваться ею, если предварительно преобразовать определитель так, чтобы в какой-то строке или столбце все элементы, кроме одного, равнялись нулю. Такой определитель будет равен ненулевому элементу этой строки или столбца, умноженному на его алгебраическое дополнение. Например, в определителе на рис. 1.5 в первом столбце единица с двумя нулями. На основании теоремы разложения, примененной к первому столбцу, определитель равен алгебраическому дополнению единицы, т.е. в данном случае можно понизить порядок определителя, вычеркиванием строки и столбца, в которых находится единица, с учетом знака в алгебраическом дополнении (рис. 1.5).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 18$$

Рис. 1.5. Понижение порядка определителя

ЗАМЕЧАНИЕ 1

В дальнейшем определитель третьего и более высокого порядка будем вычислять по теореме разложения, приводя его предварительно к виду на рис. 1.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Единицу с нулями можно получать в любом столбце или строке определителя. При этом следует не забывать знак в алгебраическом дополнении, т.е.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = -2$$

Задача 1.4

Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на (–2), к третьей – первую, а к четвертой – первую строку, умноженную на (–3). После этого все элементы первого столбца, кроме первого элемента, будут равны нулю. Применяя теорему разложения к этому столбцу, понизим порядок определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & -3 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 6 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Применяя теорему разложения к последней строке полученного определителя третьего порядка, получим:

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 6 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -10 \cdot (18 - 3) = -150 .$$

Обратная матрица

Определение 1

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Определение 2

Пусть A – квадратная невырожденная матрица n – ого порядка. *Обратной матрицей* A^{-1} для нее называется матрица, для которой справедливо:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E , \qquad (1.7)$$

где E – единичная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ

Матрицы A и A^{-1} – коммутативны.

Теорема

Если A – квадратная невырожденная матрица n – ого порядка, то для нее определена обратная матрица A^{-1}, которая вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T , \qquad (1.8)$$

где $|A|$ – определитель матрицы A, а C – *союзная матрица,* которая получается из матрицы A заменой всех ее элементов на их алгебраические дополнения.

Задача 1.5

Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Вычислим определитель матрицы.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1)\,(2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-4+3) = 1 \neq 0$$

2. Вычислим алгебраические дополнения для элементов матрицы A, составим союзную матрицу и транспонируем ее.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Выпишем обратную матрицу в соответствии с формулой (1.8)

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

и сделаем проверку

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Основными методами решения СЛАУ являются: метод Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Первые два метода применимы только для систем с квадратной невырожденной матрицей. Методом Гаусса можно решать любую СЛАУ.

Формулы Крамера

Если определитель Δ СЛАУ n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (1.9)$$

в которых:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ – определитель системы,}$$

Δ_j – вспомогательные определители, которые получаются из определителя Δ заменой j – го столбца из коэффициентов при неизвестном x_j столбцом правых частей системы, т.е.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.10)$$

$j = 1,2,\ldots,n$.

Эти формулы называются *формулами Крамера.*

Задача 1.6 а

Решите СЛАУ, используя формулы Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(3) \\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7$$

отличен от нуля. Поэтому справедливы формулы Крамера (1.9). Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -7,$$

и, используя формулы Крамера, выпишем ответ:

$$x_1 \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_2 \frac{-7}{-7} = 1, \quad x_3 \frac{-7}{-7} = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Чтобы выяснить правильность полученного ответа, можно сделать проверку, подставив найденные значения неизвестных в заданную систему.

Матричный метод

Систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными можно записать в виде матричного уравнения вида:

$$A \cdot X = B, \qquad (1.11)$$

в котором $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец правых частей системы.

Если матрица A невырожденная, то существует обратная матрица A^{-1}. Формулу решения матричного уравнения (1.11) можно получить, используя определение обратной матрицы (1.7) и свойство единичной матрицы. Единичная матрица играет в теории матриц роль единицы. Легко проверить, что если определено произведение $E \cdot X$ или $X \cdot E$, то:

$$E \cdot X = X \text{ или } X \cdot E = X . \qquad (1.12)$$

Умножая обе части матричного уравнения (1.11) на обратную матрицу A^{-1} слева (ставя A^{-1} первым сомножителем), получим:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E} \cdot X = A^{-1}B , \text{ или } \underbrace{E \cdot X}_{X} = A^{-1}B ,$$

или

$$X = A^{-1}B . \qquad (1.13)$$

Формула (1.13) показывает, что для того, чтобы найти решения системы или, что то же самое, найти столбец неизвестных X, следует найти матрицу, обратную к матрице системы и умножить ее на столбец правых частей.

Задача 1.6.b

Решите матричным методом СЛАУ, убедившись предварительно, что матричный метод можно использовать.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение

Выпишем матрицу системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и столбец правых частей $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Определитель матрицы A равен:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{0} & -1 & -5 \\ \cancel{0} & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Следовательно, можно использовать матричный метод.

2. В соответствии с формулой (1.8) найдем обратную к A матрицу, выписав предварительно союзную матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -13 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

и транспонируя ее:

$$C^T = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Составим обратную матрицу по формуле (1.8):

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Теперь можно получить решение системы по формуле (1.13):

$$X = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18-12-12 \\ -26+12+20 \\ -2+0-4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

> Иногда требуется решить матричное уравнение вида: $X \cdot A = B$. Если A – квадратная невырожденная матрица, то решение этого уравнения имеет вид: $X = B \cdot A^{-1}$.

Например, решением матричное уравнение $X \cdot A = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ является матрица $X_{2\times 2}$, которая определяется по формуле: $X = B \cdot A^{-1}$.

Поскольку $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},$$

то

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-12 & -3-8 \\ -8+6 & -6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Убедиться, что матрица X найдена верно, можно, сделав проверку, т.е. подставляя X в уравнение $X \cdot A = B$.

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} -16 & -11 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = B.$$

Метод Гаусса

Методом Гаусса можно решать любую систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

При использовании метода Гаусса проводят операции с так *называемой расширенной матрицей системы*, т.е. с матрицей системы, к которой присоединен столбец правых частей системы (рис. 1.6).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & & x_n & \end{array} \\ B = & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array}$$

Рис. 1.6. Вид расширенной матрицы системы

Чтобы отметить «особость» последнего столбца в расширенной матрице, его отделяют вертикальной чертой, а над каждым столбцом матрицы коэффициентов надписывают, какому неизвестному он соответствует.

По сути, расширенная матрица представляет собой краткую запись системы. Поскольку в системе можно проводить равносильные преобразования, т.е. преобразования, не меняющие множества ее решений, то соответствующие преобразования (элементарные преобразования) можно проводить и в расширенной матрице системы.

Элементарными преобразованиями в расширенной матрице системы называются преобразования, не меняющие множества ее решений. К элементарным преобразованиям относятся:

1) перемена местами строк матрицы;

2) умножение (деление) строки на число, отличное от нуля;

4) прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

5) вычеркивание одной из двух пропорциональных (равных) строк;

6) вычеркивание нулевой строки;

7) перемена местами столбцов, кроме последнего за чертой с запоминанием, какому неизвестному соответствует каждый столбец.

Принято знак элементарных преобразований обозначать: ~.

Целью метода Гаусса является приведение элементарными преобразованиями расширенной матрицы системы к такому виду, чтобы в первых ее k $(k \le n)$ столбцах сформировалась единичная матрица. При этом возможны следующие случаи.

1. Расширенная матрица приведена к виду, показанному на рис. 1.7. Из вида системы, которой соответствует полученная расширенная матрица, ясно, что в данном случае система имеет единственное решение

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \quad x_3 = \alpha_3, \ldots\ldots, x_n = \alpha_n .$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & & x_n & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_n \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{cases} x_1 = \alpha_1, \\ x_2 = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_n. \end{cases}$$

Рис. 1.7. Расширенная матрица и соответствующая СЛАУ в случае единственного решения

Из рисунка ясно, что в этом случае матрица системы A являлась квадратной, т.е. размерности $n \times n$, или стала квадратной после вычеркивания получившихся в результате элементарных преобразований нулевых строк.

2. Расширенная матрица приведена к виду, показанному на рис. 1.8, т.е. в одной из строк все элементы получились равными нулю, а справа от черты число, не равное нулю. Из вида системы, которой соответствует полученная расширенная матрица, ясно, что в данном случае система не имеет решений.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & & x_{n-1} & x_n & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \alpha_{m-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_m \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{cases} x_1 = \alpha_1, \\ x_2 = \alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \alpha_{m-1}, \\ 0 = \alpha_m, \ \alpha_m \neq 0. \end{cases}$$

Рис. 1.8. Расширенная матрица и соответствующая СЛАУ в случае отсутствия решений

3. Расширенная матрица приведена к виду, показанному на рис. 1.9, т.е. число строк меньше числа столбцов (на рисунке число строк $m = n - 2$). Это могло быть в первоначальной расширенной матрице или получилось в результате вычеркнутых нулевых строк.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{n-2} & x_{n-1} & & x_n & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{31} & c_{32} & \alpha_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{n-2,1} & c_{n-2,2} & \alpha_{n-2} \end{array}\right) \end{array} \sim$$

Рис. 1.9. Расширенная матрица в случае бесконечного множества решений

В данном случае можно получить единичную матрицу только в k первых столбцах ($k = n - 2$).

Из вида системы, которой соответствует полученная расширенная матрица

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 - c_{11}x_{n-1} + c_{12}x_n, \\ x_2 + = \alpha_2 - c_{21}x_{n-1} - a - c_{22}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} = \alpha_{n-2} - c_{n-2,1}x_{n-1} - c_{n-2,2}x_n \end{cases}$$

ясно, что в данном случае система имеет бесконечно много решений. При этом в примере на рис. 1.9 формула всего бесконечного множества решений дает выражение неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ (мы будем называть их *базисными*) через неизвестные x_{n-1}, x_n, которые называются *свободным* и могут принимать любые вещественные значения.

Задача 1.6.с

Решите систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

В данном случае в ее левом верхнем углу единица. Если это не так, то единицу в верхнем левом углу нужно сначала получить, меняя местами строки или столбцы. Иногда единицу приходится получать, складывая или вычитая строки расширенной матрицы. Решение системы осуществляется за три шага.

1 шаг – формирование первого столбца.

Первую строку, умноженную на (2), прибавим ко второй строке, первую строку, умноженную на (–3) и прибавим к третьей строке расширенной матрицы. После этого все элементы первого столбца матрицы, кроме первого окажутся равными нулю.

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)\end{array} (2)\,(-3) \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right)\end{array}$$

2 шаг – формирование второго столбца.

Диагональный элемент второго столбца расширенной матрицы равен единице. Если это не так, то единицу нужно получить, меняя местами второй и третий столбец или вторую и третью строки. Если нужной единицы нет, то вторую строку нужно разделить на некоторое число так, чтобы ее элемент во втором столбце стал равным единице. В данном случае вторую строку, умноженную на (–1), прибавим к первой строке, а также вторую строку прибавим к третьей строке. После этого все элементы второго столбца матрицы, кроме диагонального элемента, окажутся равными нулю.

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{array}\right)\end{array} (1)\,(-1) \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)\end{array}$$

3 шаг – формирование третьего столбца.

Третью строку разделим на 2, чтобы ее диагональный элемент равнялся единице. После этого третью строку, умноженную на (–6), прибавим ко второй и третью строку, умноженную на 5, прибавим к первой строке.

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)\end{array} :(2) \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\end{array} (-6)\,(5) \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\end{array}$$

Решение системы, которая соответствует полученной расширенной матрице, очевидно:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Задача 1.6.d

Решите систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 10 \end{cases}$

Решение

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -4 & 10 \end{array}\right) \end{array} (-2)(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-2} & \cancel{-3} & \cancel{6} \end{array}\right) \end{array} (2)$$

После первого шага метода Гаусса появились две одинаковые строки – вторая и третья. Одну из них (третью) можно вычеркнуть. Поскольку матрица системы, стоящая слева от черты, не является квадратной, то единичная матрица может быть выделена только в первых двух столбцах, а поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, то решений бесконечно много. После второго шага получится матрица вида:

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6 \end{array}\right) \end{array}$$

Неизвестные системы x_1, x_2, x_3, x_4 в этом случае разделяют на два класса: базисные и свободные. Базисные неизвестные: x_1, x_2 – столбцы для этих неизвестных образуют единичную матрицу. Свободные неизвестные: x_3, x_4. Записать формулу всего бесконечного множества решений системы – это значит записать формулу выражения базисных неизвестных через свободные неизвестные.

Запишем систему, которая соответствует полученной расширенной матрице

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 5x_4 = -8 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6 \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = -5x_3 - 5x_4 - 8 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 6 \end{cases}.$$

Значения x_3 и x_4 задаются произвольно. Множество всех решений системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = -5t - 5z - 8, \\ x_2 = -2t - 3z - 6, \end{cases} \text{где } t, z \in R .$$

Задача 1.6.е

Решите систему уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Решение

После первого шага метода Гаусса полученные вторая и третья строки расширенной матрицы отличаются только правыми частями.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} \\ B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

Если из третьей строки вычесть вторую, то появится строка, в которой слева от черты стоят нули, а справа от черты число, не равное нулю. Следовательно, система не имеет решений (рис. 10).

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

Рис. 1.10. Решение задачи 1.6.е

Линейные однородные системы

Однородная СЛАУ m уравнений с n неизвестными записывается в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная СЛАУ всегда совместна, она всегда имеет нулевое (тривиальное) решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Следовательно, однородная система может иметь только одно нулевое решение или иметь бесконечно много решений, среди которых есть ненулевые.

Если матрица A однородной системы – квадратная, то однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$|A| = 0. \qquad (1.14)$$

Определение

Пусть однородная СЛАУ имеет k ненулевых решений $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Эти решения образуют *фундаментальную систему решений* (ФСР), если любое решение системы X, можно представить в виде:

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_kX_k,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ любые вещественные числа.

ЗАМЕЧАНИЕ

Следует иметь в виду, что число решений k в фундаментальной системе равно числу свободных неизвестных.

Задача 1.7

Имеет ли однородная СЛАУ ненулевые решения? Если да, то найти их, выписав фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее по методу Гаусса.

1 шаг – формирование первого столбца.

Ко второй строке прибавим первую, умноженную на (–2), к третьей строке прибавим первую, умноженную на (–1).

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-2)(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{array}\right) \end{array}$$

Из получившихся двух одинаковых строк одну (третью) вычеркнем.

2 шаг – формирование второго столбца. Предварительно в расширенной матрице поменяем местами столбцы коэффициентов при неизвестных x_2 и x_4, чтобы второй (диагональный) элемент второй строки стал равным единице.

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array} (-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, то однородная система имеет бесконечно много решений и, следовательно, есть ненулевые. Выпишем линейную систему, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 8x_2 = 0, \\ x_4 + 5x_2 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = 8x_2 + x_3, \\ x_4 = -5x_2, \end{cases} \text{ где } x_2, x_3 \in R.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3, x_4 разделим на два класса: x_1, x_4 – базисные, x_2 и x_3 – свободные. Свободные неизвестные можно задавать произвольно. Обозначив $x_2 = C_1$ и $x_3 = C_2$, где C_1, C_2 – любые вещественные числа, запишем решение системы X в матричном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8C_1 + C_2 \\ C_1 + 0 \cdot C_2 \\ 0 \cdot C_1 + C_2 \\ -5C_1 + 0 \cdot C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 .$$

Решения $X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задача 1. Даны матрицы *A* и *B*. Найдите матрицу *C*.

1. $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$, $C = B - 2A^T$.

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = (3A)^T - B$.

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = A + B^T$.

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=2A+3B$.

5. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T$.

6. $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 7\\ 6 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 6 & 1 & -3\end{pmatrix}$, $C=2A-B^T$.

7. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 4\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 4\\ 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $C=(2B)^T+A$.

8. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 7 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & 6\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, $C=A-B^T$.

9. $A=\begin{pmatrix}7 & -4\\ 0 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $C=3B-2A$.

10. $A=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 3 & 1\\ -5 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=A^T+B^T$.

11. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 0\\ -4 & -2\end{pmatrix}$, $C=2B-A^T$.

12. $A=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -1\\ -1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 5 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $C=(2A)^T-B$.

13. $A=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $C=3A+B^T$.

14. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=2A-3B$.

15. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -7\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=2A^T-B^T$.

16. $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 9 & 7 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & -2\\ 4 & 3 & 2\\ -8 & -3 & 2\end{pmatrix}$, $C=A\cdot E+B^T$.

17. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & 8\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -7 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $C=A-2B^T$.

18. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & 0 & 5\\ 0 & -4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & 8 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $C=3A-B$.

19. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1\\ -3 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, $C=2A+B^T$.

20. $A=\begin{pmatrix}9 & -11\\ 7 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 1 & -3\\ 8 & -1\end{pmatrix}$, $C=A-3B$.

21. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}9 & -8 & 7\\ -6 & 5 & -4\end{pmatrix}$, $C=A^T+2B^T$.

22. $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & -3\\ -7 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 2\\ -3 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $C=A-B\cdot E$.

23. $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 5\\ -6 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$, $C=3B-A^T$.

24. $A=\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -4 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=A+(2B)^T$.

25. $A=\begin{pmatrix}-6 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=4A+B^T$.

26. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ -4 & -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & -3 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $C=3A+2B$.

27. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 5 & -7\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 7\\ -1 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $C=A^T-2B^T$.

28. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 6 & 7 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=A^T+BE$.

29. $A=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 7 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=A^T-3B$.

30. $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C=2A+B$.

31. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=B^T+2A$.

32. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=2A-3B$.

33. $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C=A+2B$.

34. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C=2A-B$.

35. $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C=-A+B$.

36. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=A^T-B$.

Задача 2. Найдите произведение матриц $A\cdot B$. Существует ли произведение $B\cdot A$? Почему? Если существует, то найдите его.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 4\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\\ -1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$. 9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3\\ 6 & 8 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$. 11. $A=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\4&1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4\\2&1\\1&1\\2&3\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}5&1&0&-3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-4\\3&1\\0&-1\end{pmatrix}$. 14. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&3&1\\4&2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&-2&3\\-2&-1&5&-2\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-3&5\\3&-5\\-1&1\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. 18. $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&0&1\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&-2&1\\1&2&1&2\\3&1&-3&1\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

23. $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

25. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

26. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2\\4\\1\\-1\end{pmatrix}$.   27. $A=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\\-5\\6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 6 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

31. $A=\begin{pmatrix}-7 & 2 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 4 & 2\\ 4 & -2 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3\\ -4 & 3 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

32. $A=\begin{pmatrix}-1 & 5 & -2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 5 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

33. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & -1\\ 4 & -1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

34. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

35. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & -3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

36. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

Задача 4. Вычислите определитель

1. $\begin{vmatrix}-1 & 6 & 5 & 1\\ -2 & 8 & 6 & 2\\ 2 & 16 & 7 & 3\\ -3 & 9 & 3 & 4\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}5 & 62 & -79 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 6 & 183 & 201 & 5\\ 0 & 3 & 4 & 0\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}9 & 7 & 9 & 7\\ 8 & 6 & 8 & 6\\ -9 & -7 & 9 & 7\\ -8 & -6 & 8 & 6\end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -5 & 6 & 10 & 6 \\ -9 & 8 & 8 & 5 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 6 & 8 & -9 & -12 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -2 & -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ -5 & -7 & 10 & 14 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 10 & -5 \\ 5 & 8 & 8 & -9 \\ 5 & 5 & 9 & -8 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 22 & 12 & 4 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 16 & 7 & 3 \\ -3 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 5 & -9 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & -9 & -7 \\ -8 & -6 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 28. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 7 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 10 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & -11 \end{vmatrix}$ 32. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 17 & 13 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ 34. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 7 & -1 & =21 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ 36. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Задача 5. Найдите обратную матрицу для матрицы A. Сделайте проверку.

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & -6\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}$. 11. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. 12. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 14. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$. 15. $A=\begin{pmatrix}4 & -8 & -5\\ -4 & 7 & -1\\ -3 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$. 17. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$. 18. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -3 & 7 & 2\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$. 20. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}$. 21. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 6\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. 23. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 24. $A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 3\\ -8 & 7 & 5\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$. 26. $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 27. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 7 & 9 & 5\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix}$. 29. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$. 30. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -4 & -3 & -5\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

31. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 6\end{pmatrix}$. 32. $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & -5 & 7\end{pmatrix}$. 33. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

34. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&4\\0&1&1\end{pmatrix}$. 35. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\\1&1&3\end{pmatrix}$. 36. $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&2&3\\2&-1&2\end{pmatrix}$.

Задача 6. Решите систему линейных уравнений тремя способами: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы; в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases}2x-y-z=4,\\3x+4y-2z=11,\\3x-2y+4z=11.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x+y+2z=-1,\\2x-y+2z=-4,\\4x+y+4z=-2.\end{cases}$ 3. $\begin{cases}3x+2y+z=5,\\2x+3y+z=1,\\2x+y+3z=11.\end{cases}$

4. $\begin{cases}x+2y+4z=31,\\5x+y+2z=29,\\3x-y+z=10.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x+5y-4z+5=0,\\2x-3y+z-2=0,\\4x+y-3z+4=0.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x-2y+4z=3,\\2x-4y+3z=1,\\3x-y+5z=2.\end{cases}$

7. $\begin{cases}2x-y+z=2,\\3x+2y+2z=-2,\\x-2y+z=1.\end{cases}$ 8. $\begin{cases}x+3y+4z=6,\\2x-y-z=1,\\x+2y+3z=5.\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x+y+z-3=0,\\2x+3y-z=0,\\x-y+3z-7=0.\end{cases}$

10. $\begin{cases}2x-4y+9z=28,\\7x+3y-6z=-1,\\7x+9y-9z=5.\end{cases}$ 11. $\begin{cases}x+y+z=3,\\2x+y-2z=1,\\x+y-3z=-1.\end{cases}$ 12. $\begin{cases}2x+2y+2z=6,\\x+2y+3z=1,\\x+3y+6z=2.\end{cases}$

13. $\begin{cases}2x-4y+z=3,\\x-5y+3z=-1,\\x-y+z=1.\end{cases}$ 14. $\begin{cases}x-y+z=6,\\2x+y+z=3,\\x+y+2z=5.\end{cases}$ 15. $\begin{cases}2x+y+z=6,\\x-y+z=5,\\x+y+2z=4.\end{cases}$

16. $\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+3z=2\\x+3y+6z=1\end{cases}$ 17. $\begin{cases}x\quad-2z=4,\\2y+z\ =3,\\x\quad-z=6.\end{cases}$ 18. $\begin{cases}2x-y+z=4,\\-x+3y-2z=-3,\\3x+2y-z=3.\end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x+y-2z=-2, \\ x+y+z=0, \\ x-2y+3z=-3. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x+2y-z=1, \\ 2x+3y-2z=0, \\ x+5y+z=-5. \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x-3y+z=-3, \\ x-5y-2z=6, \\ 2x+y-3z=9. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+y+z=4, \\ x+2y+2z=3, \\ x+4y-z=-2. \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 4x-y-z+3=0, \\ x+3y+3z=-4, \\ -x+2y-z=5. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x-y\quad =7, \\ 5x+3y-6z=-5, \\ -x-2y+3z=7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x-y+z=12, \\ x+2y-z=12, \\ 2x-y+3z=9. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x+3y-2z=-4, \\ x-y+4z=4, \\ 3x+2y-z=-9. \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 2x+y+z=6, \\ 2y+z=13, \\ 3x+y+2z=8. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x-y+3z=8, \\ x+y-2z=5, \\ 3x-2y+z=7. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x+3y-z=4, \\ -x+2y+3z=12, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 5x-y+z=-17, \\ x-3y+2z=-11, \\ 2x+y+z=0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 4x-y+2z=8, \\ 2x+y+z=7. \end{cases}$ 32. $\begin{cases} 3x-4y+z=0, \\ 2x+y-4z=-1, \\ x-y+3z=3. \end{cases}$ 33. $\begin{cases} x+y-z=2, \\ x+2y+z=5, \\ 2x-y-z=2. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x-y+3z=3, \\ x+3y+z=5, \\ x+y+2z=4. \end{cases}$ 35. $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ x-y+2z=2, \\ 2x-y+z=2. \end{cases}$ 36. $\begin{cases} 3x-y+z=3, \\ 2x+y-z=2, \\ x-y+z=1. \end{cases}$

Задача 7. Имеет ли однородная СЛАУ ненулевые решения? Если да, то найти их, построив фундаментальную систему решений.

1. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+5x_3+7x_4=0, \\ 6x_1-12x_2+17x_3-9x_4=0, \\ 7x_1-14x_2+18x_3+17x_4=0. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3-5x_4=0, \\ 4x_1+6x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-5x_3-14x_4=0, \\ 10x_1+15x_2+3x_3-7x_4=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 14x_1+35x_2-7x_3-63x_4=0, \\ -10x_1-25x_2+5x_3+45x_4=0, \\ 26x_1+65x_2-13x_3-117x_4=0. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 9x_1+21x_2-15x_3+5x_4=0, \\ 12x_1+28x_2-20x_3+7x_4=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5=0, \\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5=0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 4x_1+5x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+6x_2+7x_3+4x_4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0, \\ x_1+17x_2+4x_3=0. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3+7x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+7x_3+5x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3-5x_4=0. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0, \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+5x_4=0, \\ 9x_1+2x_2+5x_3+7x_4=0, \\ 5x_1-9x_2+2x_3=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+5x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4+3x_5=0, \\ 4x_1+4x_2+7x_3+9x_4+5x_5=0, \\ 5x_1+5x_2+9x_3+11x_4+6x_5=0. \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0, \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0, \\ x_1+8x_3+7x_4=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+3x_3+6x_4+5x_5=0, \\ -4x_1+5x_2-7x_3-3x_4+8x_5=0, \\ -6x_1+7x_2-10x_3-9x_4+3x_5=0, \\ 8x_1-9x_2+13x_3+15x_4+2x_5=0. \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3-x_4-x_5=0, \\ -x_1+2x_2-x_3-x_4-x_5=0, \\ 4x_1+x_2-5x_3-5x_4-5x_5=0, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1+6x_2+10x_3+4x_4-2x_5=0, \\ 6x_1+10x_2+17x_3+7x_4-3x_5=0, \\ 9x_1+3x_3+2x_4+3x_5=0, \\ 12x_1-2x_2+x_3+8x_4+5x_5=0. \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+2x_4-6x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+7x_3+6x_4-18x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+11x_3+9x_4-27x_5=0, \\ x_1+4x_2+5x_3+2x_4-6x_5=0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ x_1-2x_2-3x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1-x_2-2x_3+3x_4=0. \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-4x_2+7x_3+5x_4=0, \\ 4x_1-9x_2+8x_3+5x_4=0, \\ -3x_1+2x_2-5x_3+3x_4=0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_3 \quad + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \quad + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 + \ 2x_4 + \ 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 \qquad -2x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$ 32. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 7x_2 + x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$ 34. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ 36. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 8x_5 = 0. \end{cases}$

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Векторы. Линейное векторное пространство $\boldsymbol{R}^3$

Вектором будем называть одностолбцовую матрицу (столбец) вида $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и обозначать $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Числа x, y, z называются *координатами вектора* $\vec{a}$, а множество векторов $\vec{a}$ – *линейным векторным пространством* R^3.

Пространство R^3 называется линейным потому, что операции сложения векторов и умножения вектора на число не выводит нас за пределы этого пространства, т.е. результатом является снова вектор.

Векторы линейного пространства R^3 можно изображать направленными отрезками, т.е. отрезками, в которых установлены начальная и конечная точки. Для этого задают прямоугольную декартову систему координат и изображают векторы

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

взаимно перпендикулярными отрезками единичной длины, сонаправленными с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда вектор

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (2.1)$$

можно изображать отрезком $\overrightarrow{OM}$ с началом в начале координат и с концом в точке $M(x, y, z)$ (рис. 2.1).

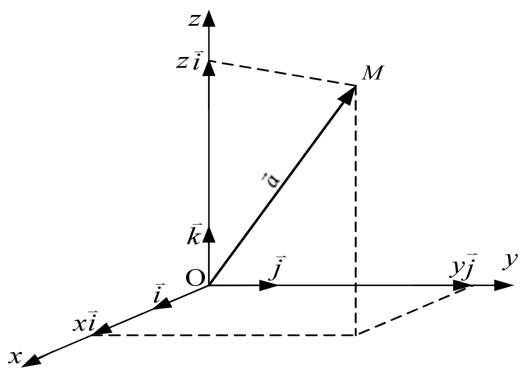


Рис. 2.1. Геометрическое изображение вектора

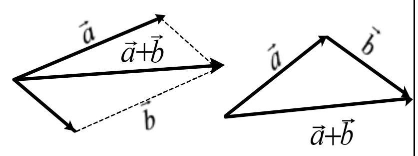
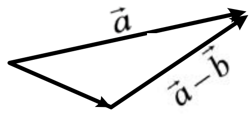
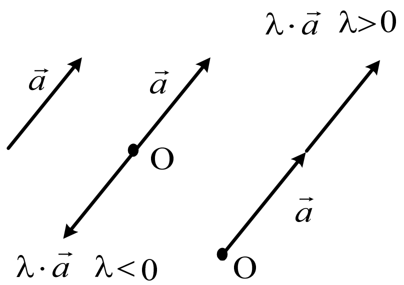
При таком изображении векторов ясный геометрический смысл приобретают его координаты – они являются проекциями $\overrightarrow{OM}$ или точки M на координатные оси.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ из пространства R^3 часто используют обозначение: $\vec{a} = \{x; y; z\}$, где x, y, z – его координаты в декартовой системе координат.

2.2. Линейные операции с направленными отрезками (векторами)

Линейные операции с направленными отрезками определены в школьном курсе, а линейные операции с векторами, как с одностолбцовыми матрицами, – в разделе «Линейная алгебра».

Сложение $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$.	
Вычитание $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}$	
Умножение на число $\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda z_1 \end{pmatrix}.$	

Начало направленного отрезка, являющегося изображением вектора $\vec{a}$, может параллельным переносом помещаться в любую точку пространства. Проекции вектора на координатные оси при этом не изменятся.

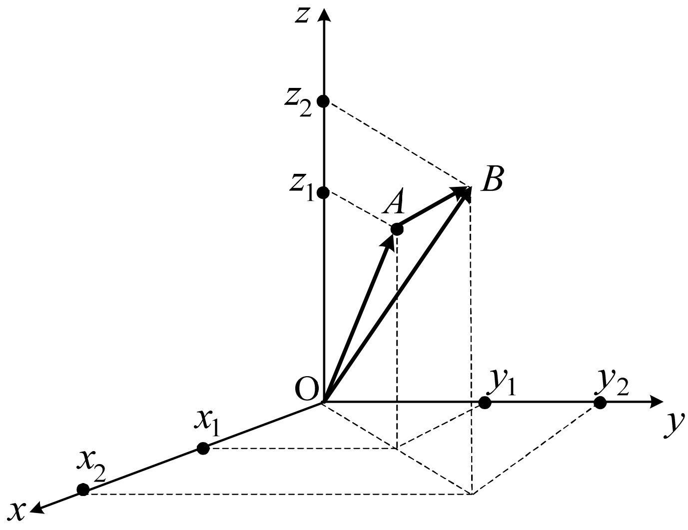


Рис. 2.2. Координаты вектора с началом в точке A и концом в точке B

Учитывая введенные линейные операции над векторами, можно установить, что, если начало направленного отрезка в точке $A(x_1; y_1; z_1)$, а конец в точке $B(x_2; y_2; z_2)$, то из рисунка 2.2 следует, что координаты соответствующего вектора равны разностям координат конечной и начальной точек, т.е.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\} \qquad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Следует понимать, что направленный отрезок не есть вектор, а лишь его изображение, которое появляется в R^3 только при введенной системе координат. Более того, один и тот же вектор изображается множеством сонаправленных отрезков одинаковой длины, начало которых может быть выбрано в любой точке пространства. Хотя в литературе (мы тоже будем это делать) направленный отрезок также называют вектором.

2.3. Модуль вектора. Направляющие косинусы

Длина направленного отрезка, т.е. изображения вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, далее будем говорить *модуль вектора* и обозначать $|\vec{a}|$, определяется (см. рис. 1) через его координаты по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \qquad (2.3)$$

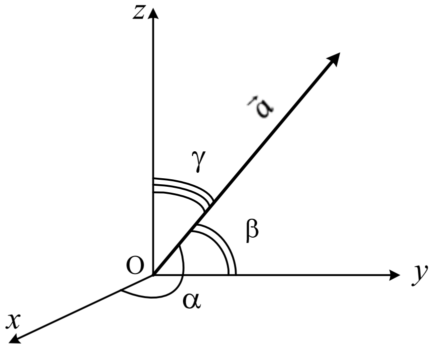


Рис. 2.3. Направляющие косинусы вектора

Ориентация направленного отрезка в пространстве определяется углами α, β, γ, которые он образует с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 2.3).

Косинусы этих углов, т.е. $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами.* Направляющие косинусы вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ определяются через его координаты по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (2.4)$$

Из формул для направляющих косинусов ясно, что если вектор образует с координатной осью острый угол, то соответствующая координата положительна, и если этот угол больше 90°, то соответствующая координата отрицательна.

Например, вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2,7 \\ 5,2 \\ 1,25 \end{pmatrix}$ образует с осями Oy и Oz острые углы, а с осью Ox тупой.

Направляющие косинусы удовлетворяют соотношению:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2.5)$$

Задача 2.1

Найти координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(3;-2;0,5)$, $B(4;3;-1)$.

Решение

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ по формуле (2.2)

$$\overrightarrow{AB} = \{4-3;3-(-2);-1-0,5\} = \{1;5;-1,5\}$$

и, используя формулу (2.3), найдем его модуль:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 1,5^2} = \sqrt{1 + 25 + 2,25} = \sqrt{28,25}.$$

Для определения направляющих косинусов используем формулы (2.4):

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{28,25}}; \ \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{28,25}}; \ \cos\gamma = \frac{-1,5}{\sqrt{28,25}}.$$

2.4. Коллинеарные векторы

Векторы называются *коллинеарными,* если один из них можно получить из другого умножением на некоторое вещественное число. Коллинеарные векторы изображаются параллельными направленными отрезками. Они одинаково направлены, если один вектор получен из другого умножением на положительное число и противоположно направлены, если один вектор получен из другого умножением на отрицательное число. Для коллинеарных векторов используется такое же обозначение, как и для параллельных отрезков:

$$\vec{a} \,\|\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha \vec{b}\text{, где } \alpha \text{ – число.}$$

Если $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, то условие коллинеарности векторов имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ или } \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (2.6)$$

Например, векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ коллинеарны, т.е. $\vec{a} \,\|\, \vec{b}$, поскольку $\frac{4}{2} = \frac{1}{0{,}5} = \frac{-2}{-1} = 2$ или $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$.

Иногда требуется найти орт заданного вектора или, иначе говоря, нормировать вектор. Это означает, что нужно найти вектор единичной длины направленный также как заданный. Чтобы найти такой вектор, нужно все координаты заданного вектора разделить на его модуль.

Например, вектор $\vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ орт вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, поскольку $|\vec{a}| = 3$.

2.5. Компланарные векторы. Правая и левая тройка векторов

Векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ называются *компланарными*, если существует набор чисел c_1, c_2, c_3, для которых справедливо соотношение:

$$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0} \qquad (2.7)$$

и при этом хотя бы одно из чисел c_1, c_2, c_3 отлично от нуля.

Из определения ясно, что в этом случае один из векторов, например $\vec{a}$, если $c_1 \neq 0$, можно представить в виде

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}\,, \qquad (2.8)$$

где $\alpha = -\dfrac{c_2}{c_1}$, $\beta = -\dfrac{c_3}{c_1}$.

Учитывая введенные линейные операции над векторами, из формулы (2.8) ясно, что геометрически три компланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ изображаются направленными отрезками, лежащими в одной плоскости или параллельными ей (рис. 2.4).

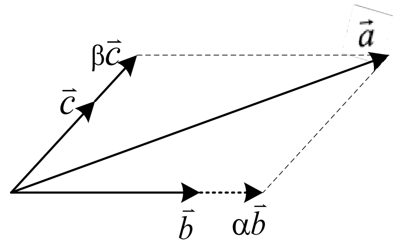


Рис. 2.4. Компланарные векторы

Если записать равенство (2.7) в векторном виде

$$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_{31} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

и перейти от него к соответствующей линейной системе

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0, \\ c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 = 0, \\ c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 = 0 \end{cases}$$

относительно неизвестных c_1, c_2, c_3, из которых хотя бы одно отлично от нуля, то выписанная однородная линейная система должна иметь ненулевые решения. Поэтому согласно (1.14) ее определитель должен равняться нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) – это условие компланарности векторов

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in R^3$ образуют в пространстве R^3 *базис*, что означает, что любой вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, где числа $x\ y, z$ – координаты вектора в этом базисе. Примером базиса является тройка векторов $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, для которого

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2

> Разумеется, координаты вектора $x\ y, z$ различны в разных базисах.

Тройка некомпланарных векторов называется *правой* (*базисом с правой ориентацией*), если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму происходит против часовой стрелки.

Если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит по часовой стрелке, то тройка векторов называется *левой* (*базисом с левой ориентацией)*.

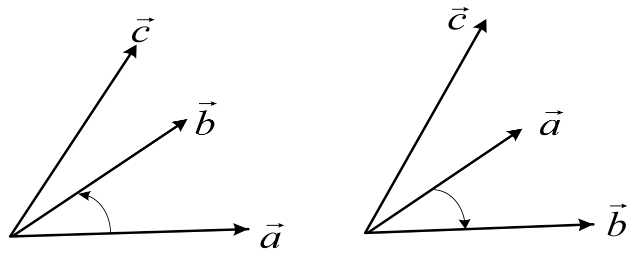


Рис. 2.5. a. Правая тройка Рис. 2.5. b. Левая тройка

2.6. Скалярное произведение векторов

Определение и свойства скалярного произведения

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ пространства R^3 – это число, которое обозначается $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, определяется по формуле:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \qquad (2.10)$$

и подчиняется следующим законам:

1) $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$ – коммутативный закон;
2) $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right)$ – дистрибутивный закон;

3) $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\alpha\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, α число – ассоциативный закон;

4) $\left(\vec{a},\vec{a}\right)\geq 0$; $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\left|\vec{a}\right|^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для скалярного произведения в пространстве R^3 наряду с обозначением $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ используется обозначение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Геометрический смысл скалярного произведения

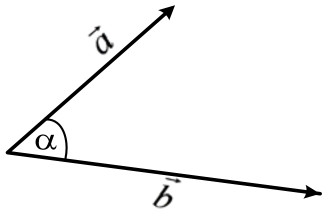


Рис. 2.6. Геометрический смысл скалярного произведения

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha\,, \qquad (2.11)$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.6).

Условие ортогональности векторов

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *ортогональны* (*перпендикулярны*) тогда и только тогда, когда $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$.

Например, векторы $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{pmatrix}2{,}5\\4\\0{,}5\end{pmatrix}$ ортогональны, так как $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=3\cdot 2{,}5+\left(-2\right)\cdot 4+1\cdot 0{,}5=7{,}5-7{,}5=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1

Поскольку в случае ортогональности векторов $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$, то $\cos\alpha=0$ и $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, ортогональные векторы перпендикулярны (изображаются перпендикулярными отрезками).

ЗАМЕЧАНИЕ 2

Для скалярного произведения справедливы все формулы сокращенного умножения, например:

$$\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{a}\right)-\left(\vec{b},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^{2}-\left|\vec{b}\right|^{2}. \tag{2.12}$$

$$\left(\vec{a}\pm\vec{b},\vec{a}\pm\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{a}\right)\pm 2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{b},\vec{b}\right). \tag{2.13}$$

Определение угла между векторами

Косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}. \tag{2.14}$$

2.7. Векторное произведение и его свойства

Если скалярное произведение может быть определено, вообще говоря, в любом векторном пространстве R^{n}, то векторное произведение определено только в пространстве R^{3} при условии, что установлена ориентация пространства, т.е. введена система координат с правой (или левой ориентацией).

Определение и свойства векторного произведения

Пусть в пространстве R^{3} задана прямоугольная декартова система координат, определяемая базисом векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, образующих правую тройку (см. рис. 2.1).

Векторным произведением векторов $\vec{a}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$ пространства R^3 с базисом $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ с правой ориентацией называется вектор, который обозначается $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и координаты которого можно найти по формуле:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-(x_1z_2-z_2y_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}\,. \quad (2.15)$$

Правило вычисления координат векторного произведения можно записать в виде определителя, который следует вычислять, раскладывая его по элементам первой строки:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=$$

$$=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-(x_1z_2-z_2y_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k} \quad (2.16)$$

Для векторного произведения выполняются все свойства, которые справедливы для определителя:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$;
2) $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$;
3) $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\alpha\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;
4) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для векторного произведения наряду с обозначением $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ используется обозначение $\vec{a}\times\vec{b}$.

Задача 2.2

Вычислить скалярное и векторное произведение векторов $\vec{c}_1=\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{c}_2=-2\vec{a}+\vec{b}$, если

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Найдем координаты векторов $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$

$$\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_2 = -2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим скалярное произведение $(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ по формуле (2.10)

$$(\vec{c}_1, \vec{c}_2) = -4 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-4) = -12 - 3 + 12 = -3$$

и вычислим векторное произведение по формуле (2.16).

$$[\vec{c}_1, \vec{c}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (12+3)\vec{i} - (16+9)\vec{j} + (-4+9)\vec{k} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл векторного произведения.

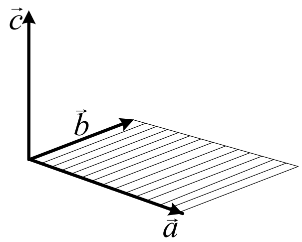


Рис. 2.7. Геометрический смысл векторного произведения

Для вектора $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (рис. 2.7) справедливо:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка векторов.

Вычисление площадей параллелограмма и треугольника

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 2.8), равна

$$S_{пар} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|. \qquad (2.17)$$

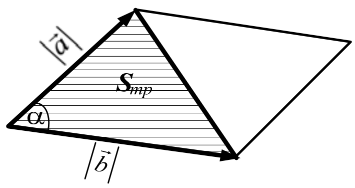


Рис. 2.8. Вычисление площадей параллелограмма и треугольника

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$S_{тр} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|. \qquad (2.18)$$

Задача 2.3

Заданы вершины треугольника ABC: $A(2;-2;3)$, $B(-3;-6;0)$, $C(4;-3;-1)$. Вычислите его площадь и косинус внутреннего угла A.

Решение

Треугольник ABC образован векторами $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ и $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (рис. 2.9), поэтому его площадь вычисляется по формуле:

$$S_{тр.} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

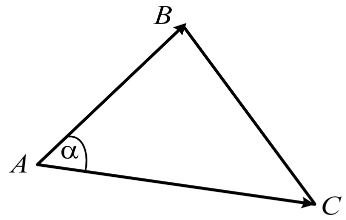


Рис. 2.9. Треугольник ABC в задаче 2.3

Вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 13\vec{i} - 26\vec{j} + 13\vec{k} = \begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ 13 \end{pmatrix},$$

а затем площадь треугольника ABC:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + 26^2 + 13^2} = \frac{13}{2}\sqrt{6}.$$

Внутренний угол A в треугольнике ABC – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. (рис. 2.9). Обозначим его через α и используем формулу (2.14) для определения косинуса угла $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} =$$

$$= \frac{(-5)\cdot 2 + (-4)\cdot(-1) + (-3)\cdot(-4)}{\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{-10 + 4 + 12}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{21}} = \frac{6}{5\sqrt{42}}.$$

2.8. Смешанное произведение векторов и его свойства

Определение и свойства смешанного произведения

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, которое обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и которое вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad (2.19)$$

где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\left\lfloor \vec{b}, \vec{c} \right\rfloor$ или скалярное произведение векторов $\left\lfloor \vec{a}, \vec{b} \right\rfloor$ и $\vec{c}$, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}, \left\lfloor \vec{b}, \vec{c} \right\rfloor\right) = \left(\left\lfloor \vec{a}, \vec{b} \right\rfloor, \vec{c}\right).$$

Свойства смешанного произведения

1) смешанное произведение меняет знак, если меняются местами любые два вектора:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a};$$

2) смешанное произведение не меняется при круговой перестановке векторов:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a};$$

3) для ненулевых векторов $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы компланарны (см. 2.9);

4) если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая,

если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая.

Задача 2.4

Выяснить, компланарны ли векторы $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Если нет, то какую тройку они образуют.

Решение

Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по формуле (2.19).

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 5 & -12 & 0 \\ -1 & -13 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ -1 & -13 \end{vmatrix} = -65 - 12 = -77 < 0\,.$$

Векторы не компланарны и образуют левую тройку.

Геометрический смысл смешанного произведения

1. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, вычисляется по формуле:

$$V_{пар-да} = \left| \vec{a}\vec{b}\vec{c} \right|. \qquad (2.20)$$

Из рисунка (2.10) ясно, что объем параллелепипеда равен:

$$V_{пар-да} = S_0 \cdot H\,,$$

где S_0 – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, H – высота.

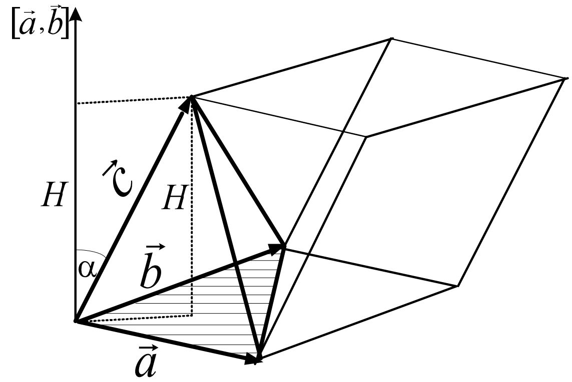


Рис. 2.10. Геометрический смысл смешанного произведения

Поскольку $S_0 = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$, а высота $H = |\vec{c}| \cdot \cos\alpha$, где α – угол между векторами $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\vec{c}$, то

$$V_{пар-да} = S_0 \cdot H = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\alpha = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} .$$

Рисунок 2.10 сделан для того случая, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку. Если тройка векторов левая, то угол между векторами $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ и $\vec{c}$ больше 90° и $\cos\alpha < 0$. В этом случае смешанное произведение отрицательно, и поэтому

$$V_{пар-да} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c} .$$

В общем случае

$$V_{пар-да} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|.$$

2. Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле:

$$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \qquad (2.21)$$

поскольку $V_{тетраэдра} = \frac{1}{6} \cdot V_{пар-да}$ (рис. 2.10).

Например, объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, в задаче 2.4, равен:

$$V_{пар-да} = \left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right| = |-77| = 77 .$$

а объем тетраэдра, построенного на этих же векторах равен:

$$V_{тетраэдра} = \frac{1}{6}\left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right| = \frac{1}{6}|-77| = \frac{77}{6} .$$

2.9. Аналитическая геометрия в пространстве

Основным методом аналитической геометрии является задание множеств точек на плоскости и в пространстве алгебраическими уравнениями. Для этого на плоскости или в пространстве должна быть введена система координат.

Метод координат в пространстве

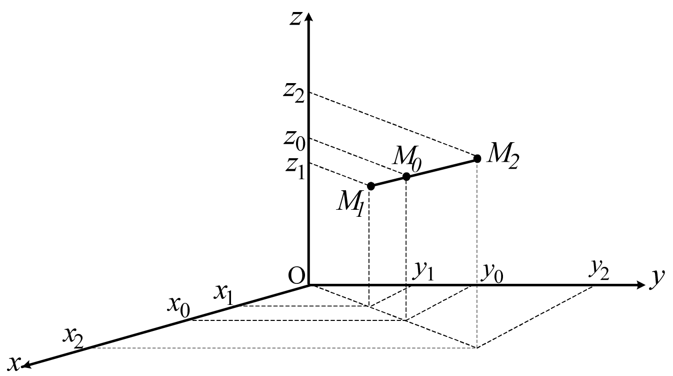


Рис. 2.11. Метод координат в пространстве

Если в пространстве введена прямоугольная декартова система координат x, y, z с началом в некоторой точке O (рис. 2.11), то *расстояние* r между точками $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ и $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$ определяется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \qquad (2.22)$$

Координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M_0}{M_0M_2}$ (рис. 2.11), отыскиваются по формулам:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \ z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.23)$$

В частном случае, для координат середины отрезка M_1M_2 справедливы формулы:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2.24)$$

Поверхности в пространстве и их уравнения

В пространстве, где задана прямоугольная декартова система координат, алгебраическое уравнение $f(x, y, z) = 0$ является *уравнением поверхности* Φ в этой системе координат, если это уравнение связывает координаты тех и только тех точек, которые принадлежат этой поверхности.

Например, точка $M_1(1,-2, 5)$ принадлежит поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + y^2$, а точка $M_2(1,-1, 0)$ не принадлежит ей.

2.10. Уравнение плоскости в пространстве

Общее уравнение плоскости

Плоскость в пространстве задается линейным уравнением с тремя переменными

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.25)$$

в котором коэффициенты при переменных – суть координаты нормального (перпендикулярного к плоскости) вектора $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости.*

Угол между плоскостями

Угол α между плоскостями, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, определяется как угол между их нормальными векторами. Тогда для косинуса этого угла справедлива формула:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,. \qquad (2.26)$$

Условие параллельности плоскостей имеет вид:

$$\vec{n}_1 \,||\, \vec{n}_2\,, \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\,. \qquad (2.27)$$

Условие перпендикулярности плоскостей определяется из соотношения:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0\,, \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0\,. \qquad (2.28)$$

Задача 2.5

Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ и $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$.

Решение

Нормальные векторы заданных плоскостей имеют вид:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Если обозначить через α угол между плоскостями, то по формуле (2.26)

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 - 2 - 1}{\sqrt{1 + 2 + 1} \cdot \sqrt{1 + 2 + 1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Следовательно, угол $\alpha = 120^\circ$.

Уравнение плоскости с нормальным вектором

Более удобным для решения задач является *уравнение плоскости с нормальным вектором*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\,, \tag{2.29}$$

где $\vec{n}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$ – нормальный вектор, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – принадлежащая плоскости точка (рис. 2.12).

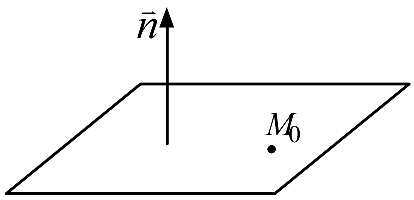


Рис. 2.12. Уравнение плоскости с нормальным вектором

Задача 2.6

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1,2,-3)$, параллельно плоскости, заданной уравнением $4x+y-2z+2=0$.

Решение

Из уравнения плоскости, заданной уравнением $4x+y-2z+2=0$, найдем координаты ее нормального вектора $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$. Поскольку плоскости параллельны, то этот вектор является нормальным и для искомой плоскости. Уравнение плоскости будем искать в виде (2.29), в которое вместо чисел x_0,y_0,z_0 подставим координаты точки M_0, а вместо чисел A,B,C – координаты вектора $\vec{n}$:

$$4\cdot(x+1)+(y-2)-2\cdot(z+3)=0$$

или

$$4x+y-2z-4=0\,.$$

2.11. Уравнения прямой в пространстве

Уравнения линий в пространстве

Если $f_1(x,y,z)=0$ и $f_2(x,y,z)=0$ – уравнения двух поверхностей в прямоугольной декартовой системе координат, то система

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0, \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{2.30}$$

задает в пространстве множество точек, принадлежащих как одной поверхности, так и другой, то есть их линии пересечения.

Следовательно, линия в пространстве задается системой двух алгебраических уравнений с тремя переменными.

Например, система $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ z=0 \end{cases}$ задает в пространстве линию пересечения сферы с центром в начале координат и с радиусом 3 с координатной плоскостью xOy, то есть окружность с радиусом 3, расположенную в плоскости xOy.

Общие уравнения прямой

Прямая в пространстве задается системой двух линейных уравнений с тремя переменными.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Эти уравнения называются *общими уравнениями прямой*.

Параметрические уравнения прямой

Прямая линия однозначно определена, если на ней задана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и параллельный ей ненулевой вектор, так называемый *направляющий вектор* $\vec{s}=\begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ (рис. 2.13).

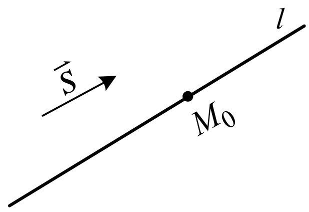


Рис. 2.13. Прямая в пространстве

Параметрические уравнения прямой в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + m\,t, \\ y = y_0 + n\,t, \\ z = z_0 + p\,t, \end{cases} \qquad (2.32)$$

где t – *параметр.*

Канонические уравнения прямой

Канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (2.33)$$

где $\vec{s} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ – направляющий вектор прямой, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой (рис. 2.13).

Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду

Общие уравнения прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

можно привести к каноническому или параметрическому виду, задавая на ней прямой любую точку и вектор, параллельный этой прямой.

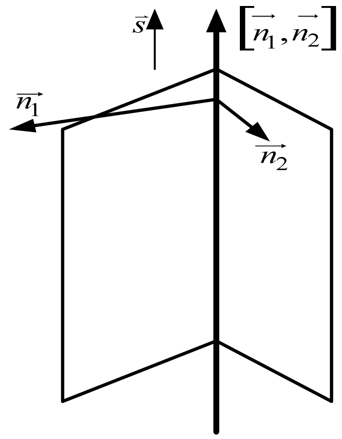


Рис. 2.14. Приведение общих уравнений прямой к каноническому и параметрическому виду

Координатами точки, принадлежащей прямой, является любое из решений заданной линейной системы. Направляющим вектором прямой является вектор $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ – нормальные векторы плоскостей, задающих прямую (рис. 2.14).

Задача 2.7

Приведите уравнения прямой $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$ к каноническому виду.

Решение

Выберем на заданной прямой точку с аппликатой $z = 0$. Подставим $z = 0$ в общие уравнения прямой и найдем остальные координаты точки из системы $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Складывая уравнения системы, получим $3x = 3$, или $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в любое уравнение системы, найдем $y = 2$. Следовательно, точка $M_0(1, 2, 0)$ принадлежит прямой. Нормальные векторы плоскостей, задающих прямую, имеют вид:

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда направляющий вектор прямой равен их векторному произведению, т.е.

$$\vec{s} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} + 3\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{3}.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости, а прямая задана параметрическими уравнениями: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$

Тогда $\vec{s} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$ – направляющий вектор прямой, $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ – нормальный вектор плоскости.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью можно найти, зная α – угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой. Из рис. 2.15 ясно, что угол φ – угол между прямой и плоскостью равен: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Поэтому справедлива формула:

$$\sin\varphi = \cos\alpha = \frac{(\vec{n}, \vec{s})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} . \qquad (2.34)$$

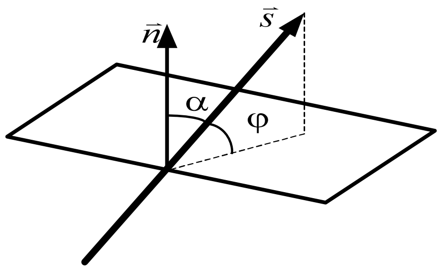


Рис. 2.15. Угол между прямой и плоскостью

Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид:

$$\vec{n} \perp \vec{s} \text{ , или } (\vec{n}, \vec{s}) = 0 \text{ , или } Am + Bn + Cp = 0 .$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\vec{n} \parallel \vec{s} \text{ или } \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} .$$

Точка пересечения прямой и плоскости находится из системы

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \qquad (2.35)$$

Задача 2.8

Найдите расстояние от точки $M(-1; -2; 2{,}5)$ до плоскости, заданной уравнением $x + 2y - 2z - 8 = 0$.

Решение

Из рис. 2.16 ясно, что искомое расстояние – это расстояние между точками M и M_0, где M_0 – точка пересечения заданной плоскости с прямой, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости.

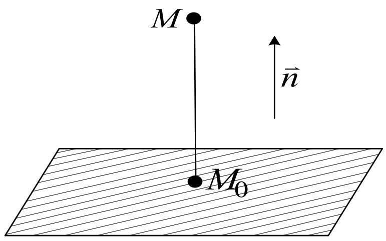


Рис. 2.16. Расстояние от точки до плоскости

Для прямой MM_0 используем параметрические уравнения (2.32), в которых в качестве направляющего вектора выберем нормальный вектор плоскости $\vec{s} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Уравнения будут иметь вид: $\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 2{,}5 - 2t. \end{cases}$

Точку пересечения MM_0 с плоскостью найдем, решая систему (2.35):

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 2{,}5 - 2t, \\ x + 2y - 2z - 8 = 0. \end{cases}$$

Выразим из первых трех уравнений x, y, z через t и подставим эти выражения в последнее уравнение. Получим соотношение $(-1 + t) + 2(-2 + 2t) - 2(2{,}5 - 2t) - 8 = 0$, из которого найдем: $9t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Координаты точки M_0 найдем, подставляя $t = 2$ в первые три уравнения системы. Тогда $M_0(1,\ 2, -1{,}5)$.

Теперь найдем расстояние от точки M до плоскости, вычислив расстояние от нее до точки M_0 по формуле (2.22):

$$r=\sqrt{(-1-1)^2+(-2-2)^2+(2{,}5-(-1{,}5))^2}=$$
$$\sqrt{2^2+4^2+4^2}=\sqrt{36}=6\,.$$

2.12. Аналитическая геометрия на плоскости

Метод координат на плоскости

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O. Точка M в этой системе координат задается ее координатами, т.е. $M(x, y)$.

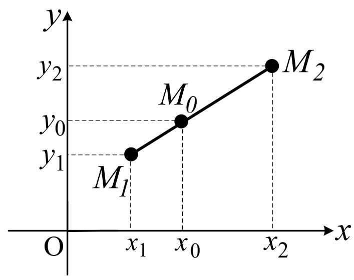


Рис. 2.17. Метод координат на плоскости

Расстояние r между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \qquad (2.36)$$

Координаты точки $M_0(x_0, y_0)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=\dfrac{M_1M_0}{M_0M_2}$ отыскиваются по формулам:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\;\; y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,. \qquad (2.37)$$

В частности, для координат середины отрезка справедливо:

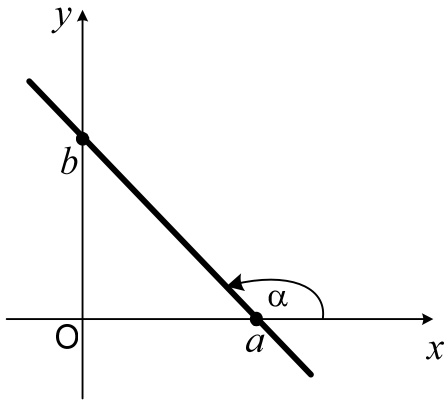
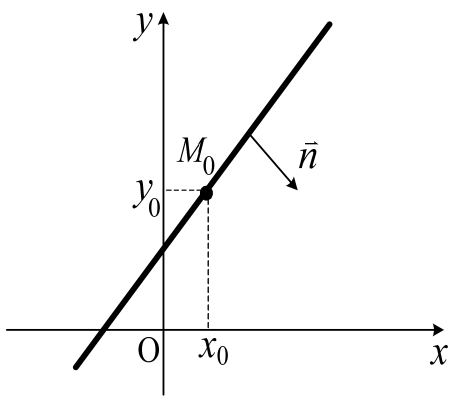
$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\,,\;\; y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad (2.38)$$

Виды уравнений прямой на плоскости

В общем случае прямая на плоскости задается линейным уравнением с двумя переменными:

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2.39)$$

в котором числа A и B – это координаты нормального (перпендикулярного прямой) вектора.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$, α – угол между прямой и осью Ox, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy (рис. 2.18).	 Рис. 2.18
Уравнение прямой с нормальным вектором $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $M_0(x_0, y_0)$ точка на прямой, $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ нормальный вектор прямой (рис. 2.19).	 Рис. 2.19

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

где $M_0(x_0, y_0)$ – точка, на прямой, $\vec{s}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ – направляющий вектор прямой (любой параллельный вектор рис. 2.20).

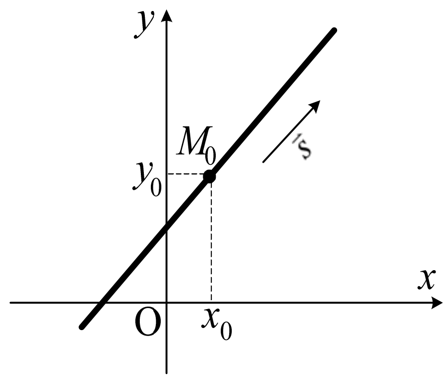


Рис. 2.20

Задача 2.9

Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1,-5)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой, заданной уравнением $2x-2y+3=0$.

Решение

Из уравнения заданной прямой l (рис. 2.21) можно определить ее нормальный вектор $\bar{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Для параллельной прямой l_1 этот вектор также является нормальным. Поэтому используем уравнение прямой с нормальным вектором $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$, подставляя в него вместо x_0, y_0 координаты точки A, а вместо A, B координаты нормального вектора:

$$2(x+1)-2(y+5)=0 \text{ или } 2x-2y-8=0.$$

Для перпендикулярной прямой l_2 вектор $\bar{n}$ является направляющим (параллельным) (рис. 2.21).

Для нее используем каноническое уравнение, подставляя в него вместо x_0, y_0 координаты точки A, а вместо m, n координаты вектора $\vec{n}$:

$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+5}{-2}$, или $-2(x+1) = 2(y+5)$, или $2x + 2y + 12 = 0$.

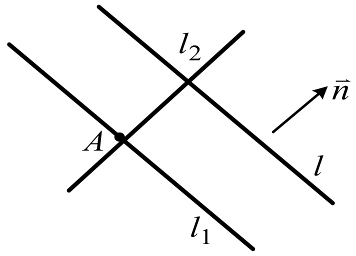


Рис. 2.21. Параллельная и перпендикулярная прямые

Кривые второго порядка

Кривая второго порядка определяется уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{2.40}$$

где A, B, C, D, E, F — заданные действительные числа. При этом числа A, B, C одновременно не равны нулю.

Это уравнение называется *общим уравнением кривой второго порядка.* В зависимости от величины параметров A, B, C, D, E, F оно может задавать одну из четырех кривых – *окружность, эллипс, гиперболу* или *параболу.*

В частных случаях это уравнение может задавать пару пересекающихся прямых

$$a^2(x - x_0)^2 - b^2(y - y_0)^2 = 0, \ (a, b > 0) \text{ или}$$

$$y = y_0 \pm \frac{a}{b}(x - x_0),$$

или пару параллельных (совпадающих) прямых

$$x^2 - a^2 = 0 \ (a \geq 0), \text{ или } x = \pm a,$$
$$y^2 - b^2 = 0, \ (b \geq 0) \text{ или } y = \pm b.$$

Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$, или $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$ определяет точку $M_0(x_0, y_0)$.

Окружность

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где точка (x_0, y_0) – центр окружности, R – ее радиус.

Эллипс

Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a, b > 0. \qquad (2.41)$$

Числа a и b называются *полуосями* эллипса. Если $a > b$, то эллипс вытянут вдоль оси Ox. Если $a < b$, то эллипс вытянут вдоль оси Oy. Вид кривой показан на рисунке 2.22, из которого ясно, что эллипс симметричен относительно координатных осей, а начало координат является центром симметрии.

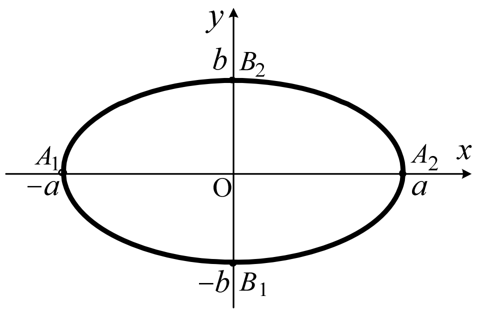


Рис. 2.22. Эллипс

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ называются *вершинами* эллипса. При $a = b$ эллипс представляет собой окружность радиуса a с центром в начале координат. Уравнение этой окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = a^2 .$$

Если центр симметрии эллипса не в начале координат, а в точке $O'(x_0, y_0)$, то его уравнение имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 . \qquad (2.42)$$

Гипербола

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a, b > 0 . \qquad (2.43)$$

Числа a и b называются *полуосями* гиперболы. При этом a называется *вещественной полуосью*, а b – *мнимой полуосью* эллипса. Вид кривой показан на рисунке 2.23, из которого ясно, что кривая симметрична относительно координатных осей и не пересекает ось ординат.

Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ называются *вершинами* гиперболы, а прямые $y == \pm\frac{b}{a}x$ являются ее *асимптотами*. Асимптоты характеризуют форму кривой: к ним приближаются ветви гиперболы при $x \to \pm\infty$.

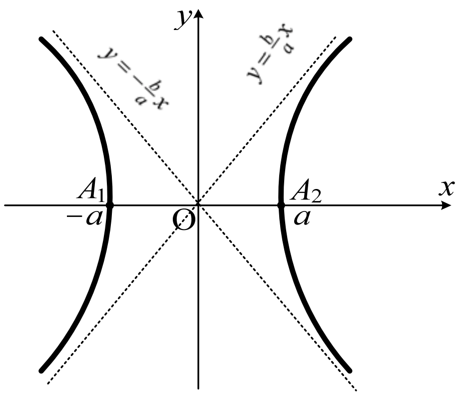


Рис. 2.23. Гипербола с вершинами на оси абсцисс

Если уравнение гиперболы имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ где } a,b>0, \qquad (2.44)$$

то вершины ее $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ лежат на оси ординат, а уравнения асимптот имеют такой же вид, как и в предыдущем случае. Вид кривой на рис. 2.24.

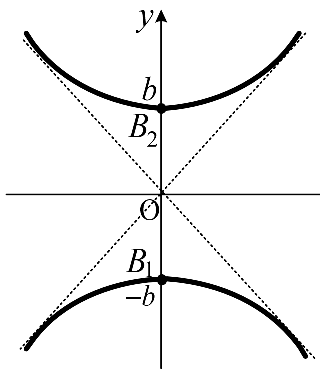


Рис. 24. Гипербола с вершинами на оси ординат

Уравнение гиперболы с центром симметрии в точке $O'(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \qquad (2.45)$$

где вершины в точках (x_0+a, y_0) и (x_0-a, y_0), а уравнения

$$y-y_0==\pm\frac{b}{a}(x-x_0) \qquad (2.46)$$

– уравнения асимптот гиперболы.

Уравнение гиперболы с центром симметрии в точке $O'(x_0, y_0)$ может иметь вид:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \qquad (2.47)$$

где вершины в точках $(x_0,\, y_0-b)$ и $(x_0,\, y_0+b)$, а уравнения асимптот имеют такой же вид, как и в предыдущем случае, т.е. $y-y_0 == \pm\frac{b}{a}(x-x_0)$.

Парабола

Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O'(x_0, y_0)$ имеет вид

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0),\ p>0, \qquad (2.48)$$

если ось симметрии параллельна Ox (рис. 2.25).

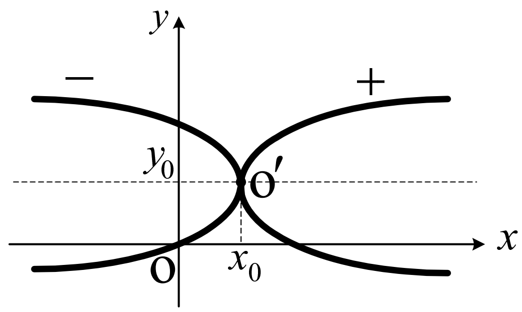


Рис. 2.25. Парабола с осью симметрии, параллельной Ox

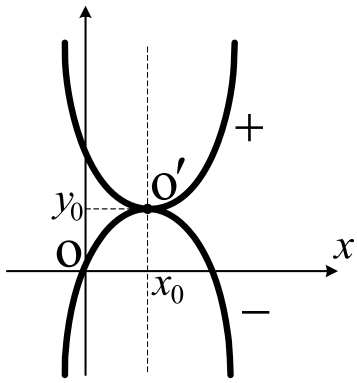


Рис. 2.26. Парабола с осью симметрии, параллельной Oy

Каноническое уравнения параболы с вершиной в точке $O'(x_0, y_0)$, имеет вид:

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0), \tag{2.49}$$

если ось симметрии параллельна Oy (рис. 2.26).

Знак показывает направление ветвей параболы. Если в уравнении знак +, то направление ветвей совпадает с направлением оси, которой параллельна ось симметрии параболы. Если в уравнении знак –, то направление ветвей противоположно направлению оси, которой параллельна ось симметрии параболы.

Задача 2.10 а

Построить кривую, заданную уравнением $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$.

Решение

Преобразуем уравнение к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным x и y.

$\left(x^2 - 4x\right) + 4\left(y^2 - 2y\right) = -4$, $\left(x^2 - 4x + 4\right) + 4\left(y^2 - 2y + 1\right) = -4 + 8$,

$$(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = 4, \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

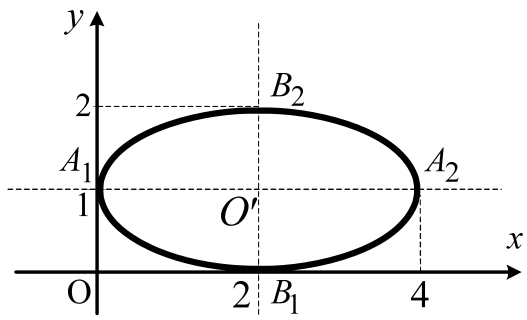


Рис. 2.27. Построение эллипса

Получили каноническое уравнение эллипса. Сравнивая его с уравнением (2.42), выпишем центр симметрии эллипса $O'(2;1)$, определим его полуоси $a=2$ и $b=1$ и построим кривую (рис. 2.27). Из рисунка ясны координаты вершин эллипса: $A_1(0;1)$, $A_2(4;1)$, $B_1(2;0)$ и $B_2(2;2)$.

Задача 2.10 b

Построить кривую, заданную уравнением $y^2-x^2+2y+4x+1=0$.

Решение

Преобразуем уравнение к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным x и y.

$$\left(y^2+2y\right)-\left(x^2-4x\right)=-1,$$

$$\left(y^2+2y+1\right)-\left(x^2-4x+4\right)=-1+1-4,\ (y+1)^2-(x-2)^2=-4,$$

$$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{4}=1.$$

Получили уравнение гиперболы вида (2.45) с центром симметрии $O'(2,-1)$. Полуоси гиперболы: $a=b=2$. Гипербола с равными полуосями называется *равнобочной.* Если ее центр симметрии вначале координат, то ее асимптотами являются биссектрисы координатных углов $y=\pm x$.

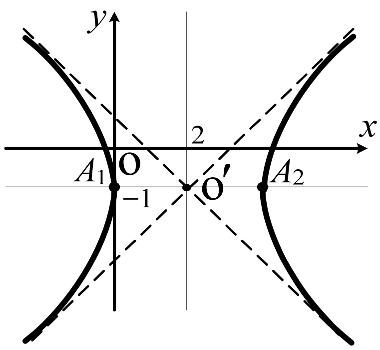


Рис. 2.28. Построение гиперболы

Если центр симметрии в точке $O'(x_0, y_0)$, то равнения асимптот имеют вид: $y - y_0 = \pm(x - x_0)$. Вид кривой показан на рисунке 2.28.

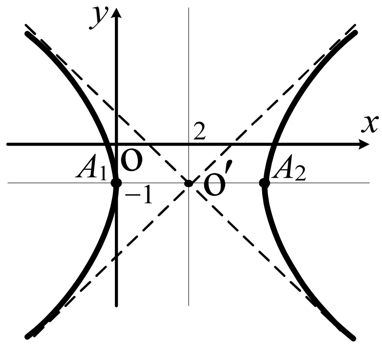


Рис. 2.28. Построение гиперболы

Вершины гиперболы $A_1(2-2,-1) = A_1(0,-1)$ и $A_2(2+2,-1) = A_2(4,-1)$ лежат на оси, параллельной Ox, а уравнения асимптот имеют вид: $y + 1 = \pm(x - 2)$.

Задача 2.10 с

Построить кривую, заданную уравнением $x^2 + 2x + 6y - 2 = 0$, приведя его к каноническому виду.

Решение

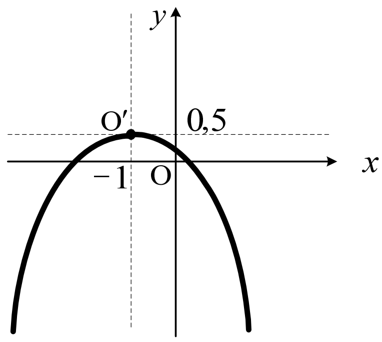


Рис. 2.29. Парабола с осью симметрии, параллельной оси Oy

Преобразуем уравнение следующим образом

$\left(x^2+2x\right)=-6y+2$, $x^2+2x+1=-6y+2+1$, $(x+1)^2=-6y+3$,

$$(x+1)^2=-6(y-0{,}5).$$

Получили уравнение параболы вида (2.49) с вершиной в точке $O'(-1;0{,}5)$ и с осью симметрии, параллельной оси Oy. Кривая построена на рис. 2.29.

3. Линейные преобразования в линейном векторном пространстве

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису

Ранее упоминалось, что три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in R^3$ образуют в пространстве R^3 *базис*. Это означает, что любой вектор $\vec{a} \in R^3$ можно представить в виде:

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3,$$

где числа $x\ y, z$ – координаты вектора в этом базисе.

Следовательно, координаты x, y, z любого вектора $\vec{a}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$ – это координаты его в некотором заданном базисе, например, в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Понятно, что если перейти к другому базису, то координаты вектора изменятся.

Если известны координаты векторов $\vec{p}=\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix}$, то $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис только в том случае, когда определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad (2.50)$$

Если требуется найти координаты вектора $\vec{a}$, заданного в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в другом базисе $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$, и если заданы координаты нового базиса $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ в старом базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \end{pmatrix}, \ \vec{q} = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{pmatrix},$$

то следует составить *матрицу перехода* $H = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$, поставив координаты векторов нового базиса в ее столбцы. Тогда вектор $\vec{a}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ с координатами x', y', z' в новом базисе определяется из матричного уравнения

$$\vec{a} = H \cdot \vec{a}',$$

решение которого при невырожденной матрице H (ее определитель отличен от нуля) имеет вид:

$$\vec{a}' = H^{-1} \cdot \vec{a} . \qquad (2.51)$$

Задача 2.11

Выяснить, образуют ли векторы

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ базис.}$$

Если да, то разложить вектор $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ по этому базису.

Решение

Матрица перехода будет иметь вид: $H=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Из условия (2.50) следует, что векторы образуют базис, если определитель матрицы перехода отличен от нуля. Вычислим этот определитель.

$$|H|=\underset{(-2)}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=-(9+2)=-11\neq 0\,.$$

Следовательно, векторы образуют базис.

2. Найдем координаты вектора $\vec{a}$ в новом базисе $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ по формуле (2.51). Для этого составим союзную для матрицы перехода матрицу

$$C=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

транспонируем ее

$$C^T=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и запишем обратную к матрице перехода матрицу:

$$H^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь из (2.51) можно найти координаты вектора $\vec{a}$ в новом базисе:

$$\vec{a}' = H^{-1} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Если матрицей перехода является единичная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $\vec{a}' = E \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Это означает, что координаты вектора $\vec{a} \in R^3$ не меняются при переходе к базису $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Этот базис называют *каноническим*.

Линейное преобразование. Матрица линейного преобразования

Если в линейном пространстве R^3 задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, .\vec{e}_3$, то *линейным преобразованием* называется соответствие между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ этого пространства, которое можно записать в виде матричного уравнения:

$$\vec{x} = A \cdot \vec{y} , \qquad (2.52)$$

где координаты векторов $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ заданы в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, .\vec{e}_3$, а матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется *матрицей линейного преобразования*.

Матрица A линейного преобразования $\vec{y} = A\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, .\vec{e}_3$ меняется при переходе к новому базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', .\vec{e}_3'$ по формуле

$$A' = H^{-1} A H,$$

где матрица A' – матрица этого же преобразования $\vec{y}' = A'\vec{x}'$ в новом базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', .\vec{e}_3'$.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейного преобразования при переходе к базису $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ с матрицей перехода $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и ее обратной матрицей (проверьте) $H^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ принимает вид:

$$A' = H^{-1} A H = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа и собственные векторы матрицы

Пусть квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица некоторого линейного преобразования. Ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором матрицы* A, если выполняется соотношение:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}\,, \tag{2.53}$$

где λ – некоторое вещественное число, которое называется *собственным числом*.

Векторное равенство (2.53) может быть записано в виде:

$$\left(A - \lambda E\right) \cdot \vec{x} = 0\,, \tag{2.54}$$

где E – единичная матрица. Следовательно, собственный вектор $\vec{x}$ является ненулевым решением однородной системы (2.54), а собственные числа определяются из условия равенства нулю определителя этой системы:

$$\left|A - \lambda E\right| = 0\,. \tag{2.55}$$

Если собственные числа матрицы λ_1, λ_2 и λ_3 – вещественные и различные, то соответствующие им собственные векторы не компланарны, т.е. образуют базис. В базисе собственных векторов матрица линейного преобразования имеет вид:

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

где столбцами матрицы перехода H являются собственные векторы.

Задача 2.12

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Если собственные векторы образуют базис, то записать матрицу A в этом базисе.

Решение

Поскольку $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Поэтому из (2.55) следует, что

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } (2-\lambda)^2 - 1 = 0, \text{ или}$$

$$(2 - \lambda + 1)(2 - \lambda - 1) = 0, \text{ или } (3-\lambda)(1-\lambda) = 0.$$

Следовательно, собственные числа матрицы: $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 1$. Найдем соответствующие собственные векторы.

1) $\lambda_1 = 3$. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Если обозначить координаты первого собственного вектора $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$, то векторное равенство (2.54) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что соответствует линейной однородной системе

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 = 0, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений (ее определитель равен нулю).

Поскольку из системы следует, что $\alpha_1 = \beta_1$, то положим $\beta_1 = 1$. Тогда $\alpha_1 = 1$ и первый собственный вектор

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Аналогично $\lambda_2 = 1$. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Второй собственный вектор $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, а векторное равенство (2.54) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что соответствует линейной однородной системе

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = 0, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $\alpha_2 = -\beta_2$. Поэтому положим $\beta_2 = 1$. Тогда $\alpha_2 = -1$ и второй собственный вектор $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 1$ образуют базис. В этом легко убедиться, вычислив определитель, столбцами которого являются координаты собственных векторов:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Выясним вид матрицы A' в базисе собственных векторов, построив матрицу перехода $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ее союзную матрицу

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и, поскольку $\det H = 2$, обратную матрицу:

$$H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из соотношения (2.55) следует, что

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получается диагональная матрица, на диагонали которой собственные числа (2.55).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задача 1. Найдите координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

1. $A(1; 1; 3)$, $B(2; 2; 3)$.
2. $A(0; 1; 3)$, $B(1; 2; 3)$.
3. $A(0; 1; -1)$, $B(1; 2; 0)$.
4. $A(2; 2; 3)$, $B(3; 2; 4)$.
5. $A(2; 1; 2)$, $B(3; 2; 2)$.
6. $A(0; 1; 1)$, $B(1; 2; 2)$.
7. $A(0; 1; 4)$, $B(1; 2; 4)$.
8. $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 2)$.
9. $A(0; -4; 3)$, $B(1; -3; 4)$.
10. $A(1; 2; 1)$, $B(0; 1; 2)$.
11. $A(2; 1; 3)$, $B(3; 2; 4)$.
12. $A(0; 1; 1)$, $B(1; 2; 2)$.
13. $A(2; 1; 3)$, $B(3; 2; 4)$.
14. $A(2; 0; 7)$, $B(0; 2; 4)$.
15. $A(8; 2; -5)$, $B(7; 1; 4)$.
16. $A(-2; 1; 3)$, $B(5; 1; 2)$.
17. $A(2; -1; 4)$, $B(5; 2; 3)$.
18. $A(3; 1; 3)$, $B(2; 2; -1)$.
19. $A(2; 2; 3)$, $B(3; 1; 3)$.
20. $A(0; 7; 3)$, $B(4; 7; -5)$.
21. $A(4; -3; 2)$, $B(1; 2; 3)$.
22. $A(5; 1; 1)$, $B(6; 2; 1)$.

23. $A(0;4;2)$, $B(3;6;-4)$.

24. $A(1;3;2)$, $B(4;6;5)$.

25. $A(0;-2;1)$, $B(2;0;3)$.

26. $A(2;-2;3)$, $B(2;1;7)$.

27. $A(1;3;3)$, $B(2;4;2)$.

28. $A(2;0;-1)$, $B(4;2;0)$.

29. $A(1;3;-2)$, $B(3;2;0)$.

30. $A(1;3;-1)$, $B(3;1;0)$.

31. $A(3;1;-4)$, $B(3;-2;-1)$.

32. $A(4;-3;-2)$, $B(-3;5;2)$.

33. $A(1;-2;4)$, $B(-3;-2;1)$.

34. $A(2;-1;-2)$, $B(3;-2;1)$.

35. $A(-2;-1;4)$, $B(-3;2;4)$.

36. $A(2;-2;-2)$, $B(3;1;-2)$.

Задача 2. Вычислите скалярное и векторное произведения векторов $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{c}_2 = -\vec{a} + 3\vec{b}$.

1. $\vec{a}\{-2;1;1\}$, $\vec{b}\{3;-2;4\}$.

2. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{-1;-3;0\}$.

3. $\vec{a}\{-2;1;1\}$, $\vec{b}\{0;-2;-5\}$.

4. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{3;-1;0\}$.

5. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{1;-3;8\}$.

6. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{2;0;2\}$.

7. $\vec{a}\{0;-1;-1\}$, $\vec{b}\{1;2;-1\}$.

8. $\vec{a}\{1;-1;0\}$, $\vec{b}\{-2;1;0\}$.

9. $\vec{a}\{-2;1;2\}$, $\vec{b}\{1;0;-1\}$.

10. $\vec{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{-3;-1;1\}$.

11. $\vec{a}\{-2;1;-2\}$, $\vec{b}\{-1;0;3\}$.

12. $\vec{a}\{1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{-2;3;-1\}$.

13. $\vec{a}\{-1;0;-3\}$, $\vec{b}\left\{1;0;-\frac{2}{3}\right\}$.

14. $\vec{a}\{2;-1;3\}$, $\vec{b}\{0;1;1\}$.

15. $\vec{a}\{2;1;-2\}$, $\vec{b}\{-1;0;-2\}$.

16. $\vec{a}\{2;0;0\}$, $\vec{b}\{-3;1;1\}$.

17. $\vec{a}\{2;1;0\}$, $\vec{b}\{1;1;3\}$.

18. $\vec{a}\{1;-1;0\}$, $\vec{b}\{0;3;2\}$.

19. $\vec{a}\{2;1;-2\}$, $\vec{b}\{0;1;1\}$.

20. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{0;3;-1\}$.

21. $\vec{a}\{2;-1;4\}$, $\vec{b}\{-1;0;0\}$.

22. $\vec{a}\{-1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{0;0;-1\}$.

23. $\vec{a}\left\{\frac{1}{2};1;-2\right\}$, $\vec{b}\left\{1;-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$.

24. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{-1;-3;0\}$.

25. $\vec{a}\{1;0;-1\}$, $\vec{b}\{-1;-3;0\}$.

26. $\vec{a}\{5;2;-2\}$, $\vec{b}\{3;3;4\}$.

27. $\vec{a}\{-1;-1;-1\}$, $\vec{b}\{0;0;-1\}$.

28. $\vec{a}\{2;2;1\}$, $\vec{b}\{-2;-3;0\}$.

29. $\vec{a}\{2;-4;1\}$, $\vec{b}\{3;1;-2\}$.

30. $\vec{a}\{0;2;1\}$, $\vec{b}\{2;1;-3\}$.

31. $\vec{a}\{-1;4;5\}$, $\vec{b}\{2;-1;2\}$.

32. $\vec{a}\{3;-2;6\}$, $\vec{b}\{-2;7;3\}$.

33. $\vec{a}\{-1;1;2\}$, $\vec{b}\{-2;1;-2\}$.

34. $\vec{a}\{1;-3;2\}$, $\vec{b}\{-2;1;1\}$.

35. $\vec{a}\{-1;3;2\}$, $\vec{b}\{1;-1;2\}$.

36. $\vec{a}\{3;2;1\}$, $\vec{b}\{-2;3;3\}$.

Задача 3. Заданы вершины треугольника ABC. Вычислите его площадь и косинус внутреннего угла A.

1. A(–1; 3; 3), B(2; 2; 1), C(0; 3;–2).
2. A(2; 3;–1), B(0; 4; 5), C(–2;–2; 4).
3. A(2; 1; 0), B(3; 0; 3), C(2;–3; 7).
4. A(–3; 1; 3), B(1; 7; 2), C(7; 3; 3).
5. A(0; 2; 1), B(4; 0; 1), C(3;–4; 2).
6. A(0;–2; 1), B(–2; 0; 2), C(0; 1; 0).
7. A(–1; 2; 1), B(–4;–3; 1), C(5; 4; 2).
8. A(2; 3;–1), B(–3; 4; 1), C(–2; 2;–4).
9. A(3;–4; 6), B(1;–2; 6), C(–3; 5; 1).
10. A(4;–3; 2), B(–1; 4; 3), C(6; 3;–2).
11. A(0;–3; 4), B(1; 1;–2), C(5; 0; 4).
12. A(2;–1; 0), B(–2; 1; 1), C(2; 2;–1).
13. A(–1; 7; 1), B(3;–1;–2), C(–5; 3; 1).
14. A(1; 1; 0), B(–2; 1;–3), C(–2;–2; 0).

15. A(2; 3; 4), B(–4; 3; 0), C(2; 6; 2).

16. A(3;–2; 2), B(0;–1; 3), C(1; 2; 2).

17. A(3; 4;–2), B(2;1; 5), C(5; 2;–2).

18. A(5; 0; 4), B(4;–1; 1), C(7; 0; 2).

19. A(2;–2; 2), B(3; 5;–7), C(4; 8; 0).

20. A(2; 2; 1), B(1; 1;–2), C(4; 0;–1).

21. A(–1; 2; 7), B(3; 1;4), C(4; 5; 1).

22. A(2; 1; 0), B(1; 1;–3), C(4; 1;–2).

23. A(2; 6;–4), B(1; 3;–3), C(4; 4;–4).

24. A(–1; 2; 0), B(1; 4; 5), C(–4; 6; 3).

25. A(2;–5; 2), B(1;–3; 2), C(2;–3; 0).

26. A(–3; 1;–2), B(2; 3; 2), C(4; –1; 7).

27. A(–6; 2; 2), B(1; 3;–1), C(0;–4; 2).

28. A(2; 1; 7), B(–3; 0; 3), C(2; 4; 2).

29. A(1; –1; 4), B(3; 1; 2), C(3; 2; 1).

30. A(2; 1; 5), B(1; 3; 2), C(4; 5; 3).

31. A(1; 2; 2), B(–3; 1;–2), C(4; 2; 2).

32. A(2; 1; 5), B(1; 3; 2), C(4; 5; 3).

33. A(1; 1; 3), B(3; –1;2), C(1; 2; 2).

34. A(1; 2; –3), B(–1; 2; 3), C(1; 4; 3).

35. A(1; –2; 2), B(3; 1;2), C(1; –2; 2).

36. A(–2; –1; 5), B(2; 3; 2), C(2; 2; 3).

Задача 4. Выясните, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Если они не компланарны, то какую тройку (правую или левую) они образуют?

1. $\vec{a}\{-2; 1; 1\}$, $\vec{b}\{0; -2; -5\}$, $\vec{c}\{2; -1; -1\}$.

2. $\vec{a}\{0; 1; 1\}$, $\vec{b}\{0; 4; -2\}$, $\vec{c}\{2; 1; 0\}$.

3. $\vec{a}\{2; 0; 1\}$, $\vec{b}\{2; 0; -1\}$, $\vec{c}\{-2; -1; 4\}$.

4. $\vec{a}\{1; -1; -1\}$, $\vec{b}\{-2; 3; -1\}$, $\vec{c}\{0; 1; 0\}$.

5. $\vec{a}\{1; 1; 1\}$, $\vec{b}\{2; 3; 0\}$, $\vec{c}\{3; -1; -1\}$.

6. $\vec{a}\{-1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{-3; 2; -1\}$, $\vec{c}\{2; 0; -2\}$.

7. $\vec{a}\{1; 0; 3\}$, $\vec{b}\{0; 1; 1\}$, $\vec{c}\{2; -1; 3\}$.

8. $\vec{a}\{-3; 1; 4\}$, $\vec{b}\{2; 0; 0\}$, $\vec{c}\{-3; 1; 1\}$.

9. $\vec{a}\{1; 0; -1\}$, $\vec{b}\{0; -1; -1\}$, $\vec{c}\{0; 0; -2\}$.

10. $\vec{a}\{-1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{0; 0; -1\}$, $\vec{c}\{-1; 0; 3\}$.

11. $\vec{a}\{-1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{1; 0; -4\}$, $\vec{c}\{2; 0; -2\}$.

12. $\vec{a}\{1; 0; -2\}$, $\vec{b}\{-3; 2; -1\}$, $\vec{c}\{4; 2; -3\}$.

13. $\vec{a}\{1; 2; 4\}$, $\vec{b}\{2; -1; 3\}$, $\vec{c}\{3; -6; 4\}$.

14. $\vec{a}\{1; -1; 1\}$, $\vec{b}\{1; 1; 1\}$, $\vec{c}\{2; 3; 4\}$.

15. $\vec{a}\{5; 3; -1\}$, $\vec{b}\{1; -2; 3\}$, $\vec{c}\{2; 0; -4\}$.

16. $\vec{a}\{-3; 3; 3\}$, $\vec{b}\{2; 1; 1\}$, $\vec{c}\{19; 11; 17\}$.

17. $\vec{a}\{1; 6; 5\}$, $\vec{b}\{3; -2; 4\}$, $\vec{c}\{7; -18; 2\}$.

18. $\vec{a}\{7; -3; 2\}$, $\vec{b}\{3; -7; 8\}$, $\vec{c}\{1; -1; 1\}$.

19. $\vec{a}\{2; 1; -1\}$, $\vec{b}\{1; -4; 1\}$, $\vec{c}\{3; -2; 2\}$.

20. $\vec{a}\{3; 1; -1\}$, $\vec{b}\{-2; -1; 0\}$, $\vec{c}\{5; 2; -1\}$.

21. $\vec{a}\{3; 3; 1\}$, $\vec{b}\{1; -2; 1\}$, $\vec{c}\{1; 1; 1\}$.

22. $\vec{a}\{6; 3; 4\}$, $\vec{b}\{-1; -2; -1\}$, $\vec{c}\{2; 1; 2\}$.

23. $\vec{a}\{1; -2; 6\}$, $\vec{b}\{1; 0; 1\}$, $\vec{c}\{2; -6; 17\}$.

24. $\vec{a}\{1; -1; -3\}$, $\vec{b}\{3; 2; 1\}$, $\vec{c}\{2; 3; 4\}$.

25. $\vec{a}\{1; 5; 2\}$, $\vec{b}\{-1; 1; -1\}$, $\vec{c}\{1; 1; 1\}$.

26. $\vec{a}\{4; 3; 1\}$, $\vec{b}\{1; -2; 1\}$, $\vec{c}\{2; 2; 2\}$.

27. $\vec{a}\{7; 3; 4\}$, $\vec{b}\{-1; -2; -1\}$, $\vec{c}\{4; 2; 4\}$.

28. $\vec{a}\{4; 3 1\}$, $\vec{b}\{6; 7; 4\}$, $\vec{c}\{2; 0; -1\}$.

29. $\vec{a}\{2; 3; 2\}$, $\vec{b}\{4; 7; 5\}$, $\vec{c}\{2; 0; -1\}$.

30. $\vec{a}\{-1; 2; 8\}$, $\vec{b}\{3; 7; -1\}$, $\vec{c}\{2; 1; 1\}$.

31. $\vec{a}\{-1; -3; 4\}$, $\vec{b}\{3; -3; 1\}$, $\vec{c}\{2; 1; 1\}$.

32. $\vec{a}\{-2; 1; 3\}$, $\vec{b}\{-3; 4; -2\}$, $\vec{c}\{-2; 1; 3\}$.

33. $\vec{a}\{-1; -3; 4\}$, $\vec{b}\{3; -3; 1\}$, $\vec{c}\{2; -6; 5\}$.

34. $\vec{a}\{1; -3; 5\}$, $\vec{b}\{-3; 4; -2\}$, $\vec{c}\{-2; 1; 3\}$.

35. $\vec{a}\{-1; -3; 4\}$, $\vec{b}\{1; 4; 5\}$, $\vec{c}\{2; 1; 1\}$.

36. $\vec{a}\{-2; 1; 3\}$, $\vec{b}\{-3; 4; -2\}$, $\vec{c}\{-5; 5; 1\}$.

Задача 5. Найдите угол между плоскостями α_1 и α_2.

1. $\alpha_1:\ -x + 2y - z + 1 = 0$; $\quad \alpha_2:\ y + 3z - 1 = 0$.
2. $\alpha_1:\ x + y - 2z + 4 = 0$; $\quad \alpha_2:\ 2x - y + z - 3 = 0$.
3. $\alpha_1:\ -x + 2y - z + 1 = 0$; $\quad \alpha_2:\ y + 3z - 1 = 0$.

4. $\alpha_1: 2x+y-2z+3=0$; $\alpha_2: x+y+6=0$.

5. $\alpha_1: -3x+4y-7=0$; $\alpha_2: x+z-5=0$.

6. $\alpha_1: 3x-2y-4z+5=0$; $\alpha_2: 2y-z-3=0$.

7. $\alpha_1: x+2y-5z+2=0$; $\alpha_2: 2x+4y+2z-1=0$.

8. $\alpha_1: 3x+4y-7=0$; $\alpha_2: 2x+y+2z-1=0$.

9. $\alpha_1: x+2y-z+1=0$; $\alpha_2: -2x-4y+2z-7=0$.

10. $\alpha_1: x+2y+3z+2=0$; $\alpha_2: 2x-y-9=0$.

11. $\alpha_1: 2x-y+2z-7=0$; $\alpha_2: 3x+4y-z-1=0$.

12. $\alpha_1: x+2y+3z=0$; $\alpha_2: 2x-4y+2z-5=0$.

13. $\alpha_1: x-2y-z-2=0$; $\alpha_2: 2x-y+2z-4=0$.

14. $\alpha_1: x-2y-2z+3=0$; $\alpha_2: 4x-7z-5=0$.

15. $\alpha_1: x-2y+z-2=0$; $\alpha_2: x-y-z+3=0$.

16. $\alpha_1: x-2y+2z-8=0$; $\alpha_2: x+z-6=0$.

17. $\alpha_1: x+2y-5z-3=0$; $\alpha_2: 2x+4y+2z=0$.

18. $\alpha_1: x-2y-4z-2=0$; $\alpha_2: 2y-z-3=0$.

19. $\alpha_1: 2x+y+4z-1=0$; $\alpha_2: x+y-2=0$.

20. $\alpha_1: 3x+2y-z=0$; $\alpha_2: -x-4y-3z-4=0$.

21. $\alpha_1: 2x+y+2z-5=0$; $\alpha_2: -2x+4y-z+1=0$.

22. $\alpha_1: -2x+4y+3=0$; $\alpha_2: -x+2z-5=0$.

23. $\alpha_1: 2x-y-3z+3=0$; $\alpha_2: -x+y-7=0$.

24. $\alpha_1: x+2y-2z+4=0$; $\alpha_2: 2x-y-z+6=0$.

25. $\alpha_1: \; -3x+y-z+2=0$; $\alpha_2: \; -y-4z-1=0$.

26. $\alpha_1: \; x-y-4z-2=0$; $\alpha_2: \; -x-y+3z+2=0$.

27. $\alpha_1: \; -x+2y+3z-3=0$; $\alpha_2: \; x-4y+2z+3=0$.

28. $\alpha_1: \; x++y-5z+1=0$; $\alpha_2: \; 2x+4y-3z+1=0$.

29. $\alpha_1: \; x-5z-3=0$; $\alpha_2: \; 3x-5y-2z-2=0$.

30. $\alpha_1: \; x-2y-5z-4=0$; $\alpha_2: \; 2x-3y-2z+6=0$.

31. $\alpha_1: \; 2x-y-3z-2=0$; $\alpha_2: \; 2x+y-z+2=0$.

32. $\alpha_1: \; x-4y-z-3=0$; $\alpha_2: \; 2x-y-3z+5=0$.

33. $\alpha_1: \; x+y-4z-2=0$; $\alpha_2: \; x+5y-z+2=0$.

34. $\alpha_1: \; x+3y-2z-1=0$; $\alpha_2: \; x-4y-2z+5=0$.

35. $\alpha_1: \; x+3y-z-2=0$; $\alpha_2: \; x+2y+z-2=0$.

36. $\alpha_1: \; x-2y-4z+4=0$; $\alpha_2: \; x-3y+2z-3=0$.

Задача 6. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку P и параллельной плоскости α.

1. $P(2;1,1)$, $\alpha: 3x+y-2z-1=0$.

2. $P(2;1;3)$, $\alpha: x-4y+3z-3=0$.

3. $P(1;3;2)$, $\alpha: x+y-z-3=0$.

4. $P(1;0;-1)$, $\alpha: 2x+y-5z-1=0$.

5. $P(3;-1;1)$, $\alpha: 3x+y-2z+1=0$.

6. $P(0;5;7)$, $\alpha: 3x+y-2z-1=0$.

7. $P(2;1;0)$, $\alpha: x+y-2z=0$.

8. $P(3;2;1)$, $\alpha: x+y-z-1=0$.

9. $P(-3; 4; 1)$, $\alpha: 2x - y - z - 1 = 0$.

10. $P(-1; 1; 1)$, $\alpha: 5y - 4z + 2 = 0$.

11. $P(2; 1; 2)$, $\alpha: x + y - 2z = 0$.

12. $P(3; -4; 1)$, $\alpha: x + y - z - 1 = 0$.

13. $P(1; 1; 1)$, $\alpha: x + y + 2z - 3 = 0$.

14. $P(-6; 1; 1)$, $\alpha: x + 3y - 6 = 0$.

15. $P(0; 2; 1)$, $\alpha: x + y - 2z - 5 = 0$.

16. $P(5; 2; -1)$, $\alpha: 3x - y + z - 4 = 0$.

17. $P(1; -2; 1)$, $\alpha: x - 3y - z + 7 = 0$.

18. $P(3; 2; 1)$, $\alpha: x + y - z - 1 = 0$.

19. $P(3; 2; 1)$, $\alpha: 2x - y - z + 2 = 0$.

20. $P(1; -3; 1)$, $\alpha: x + 2y - z + 4 = 0$.

21. $P(0; 1; 1)$, $\alpha: 4x - y - z - 6 = 0$.

22. $P(0; 2; 2)$, $\alpha: x - 5y + z + 1 = 0$.

23. $P(3; 0; 2)$, $\alpha: x + 3y - z + 2 = 0$.

24. $P(3; 2; -1)$, $\alpha: -x - y + z + 7 = 0$.

25. $P(2; -2; 1)$, $\alpha: -x - y + 5z = 0$.

26. $P(2; 3; 0)$, $\alpha: x - y + 7z + 4 = 0$.

27. $P(5; -2; 1)$, $\alpha: x + y + 4z + 1 = 0$.

28. $P(3; 4; 1)$, $\alpha: x - 5y + z + 1 = 0$.

29. $P(3; -4; 1)$, $\alpha: 2x + y - z + 3 = 0$.

30. $P(0;1;-1)$, $\alpha: 4x - y - z - 7 = 0$.

31. $P(1;-2;1)$, $\alpha: 2x - 3y + z + 2 = 0$.

32. $P(1;1;-2)$, $\alpha: 4x + y - 2z - 4 = 0$.

33. $P(1;2;-1)$, $\alpha: 2x - y + 3z + 1 = 0$.

34. $P(1;-1;2)$, $\alpha: 2x + 3y - z - 4 = 0$.

35. $P(1;3;1)$, $\alpha: 2x + y - z - 4 = 0$.

36. $P(-1;1;2)$, $\alpha: 3x - y - 2 - z + 2 = 0$.

Задача 7. Прямая задана общими уравнениями. Напишите ее канонические и параметрические уравнения.

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - y + z - 4 = 0 \\ -2x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x - y + 4z - 6 = 0 \\ x + y - 5z - 4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x - 2y + 2z - 2 = 0 \\ x + 5y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ x - 2y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x - 2y + 3z + 4 = 0 \\ x + 2y - 5z + 6 = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - 4y + z + 4 = 0 \\ 2x + 3y + 4z + 7 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - 4y + 3z - 4 = 0 \\ 2x + 4y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} -x - y + 3z - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 5z + 3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x + y + z - 10 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 4y - z + 10 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x-3y+z-3=0 \\ x+y+5z-5=0 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x+y+2z+4=0 \\ -x-3y-z+3=0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -2x-y+z-1=0 \\ x+4y+z+3=0 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y+z+4=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+4y-z+1=0 \\ 2x+y+4z-3=0 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 5x+3y+z-18=0 \\ 2y+z-9=0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x-y-5=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} x+y-35=0 \\ x+2y-2z-7=0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x+2y+z-1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 2x+2y+z+9=0 \\ x-y+3z-1=0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x-3y-2z-8=0 \\ x+y-z+3=0 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 6x+3y-2z=0 \\ x+2y+6z-12=0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x+2y-3z-1=0 \\ x+y+z-7=0 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 3x-2y+2z-2=0 \\ 5x+2y-2z+4=0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x-y+z-1=0 \\ 5x+2y-z+5=0 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 3x+2y-z+5=0 \\ x+y+5z-1=0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 5x+y-z-5=0 \end{cases}$ 32. $\begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ x+y+5z-3=0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ 2x+2y-z+5=0 \end{cases}$ 34. $\begin{cases} 3x+y-z+5=0 \\ x+y+5z-1=0 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$ 36. $\begin{cases} 2x+2y-z+5=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases}$

Задача 8. Найдите расстояние от точки *M* до плоскости α.

1. $M(1;\ 0;-3)$, $\alpha: 2x-y-z=1$. 2. $M(1;\ 2;-1)$, $\alpha: 2x+3y-6z=2$.

3. $M(1;-3;1), \alpha: 2x+y-z=2$. 4. $M(3;-1;0), \alpha: x+2y-z=4$.

5. $M(2;1;-4), \alpha: 5x+y-7z=2$. 6. $M(0;-2;1), \alpha: 2x-y+2z=1$.

7. $M(1;2;-4), \alpha: 2x+y+z=5$. 8. $M(4;2;-1), \alpha: 2x-y-z=1$.

9. $M(3;1;2), \alpha: 3x-y+2z=1$. 10. $M(1;7;2), \alpha: 4x+4y-2z=3$.

11. $M(2;-2;1), \alpha: x+y-z=3$. 12. $M(1;-1;1), \alpha: 6x+2y-3z=2$.

13. $M(-2;1;3), \alpha: 4x+y-z=1$. 14. $M(1;1;1), \alpha: 2x+2y+z=4$.

15. $M(2;1;2), \alpha: 2x+y-z=5$. 16. $M(2;3;3), \alpha: 3x-2y+6z=3$.

17. $M(4;0;1), \alpha: 2x+y-2z=3$. 18. $M(1;3;-4), \alpha: 3x-5y+4z=0$.

19. $M(0;-3;4), \alpha: x+y-z=4$. 20. $M(0;3;6), \alpha: 2x-3y-6z=2$.

21. $M(5;1;2), \alpha: 3x-4y-z=2$. 22. $M(4;0;4), \alpha: 2x-y+2z=1$.

23. $M(3;1;-3), \alpha: x-3y-z=7$. 24. $M(3;0;2), \alpha: x-2y-2z=4$.

25. $M(3;1;4), \alpha: x-4y+5z=0$. 26. $M(1;5;-1), \alpha: x-2y-2z=2$.

27. $M(6;1;-1), \alpha: x-y-5z=3$. 28. $M(3;2;-1), \alpha: x+y+z=7$.

29. $M(1;4;-1), \alpha: x-2y+z=5$. 30. $M(1;0;3), \alpha: 4x-2y-6z=5$.

31. $M(1;2;1), \alpha: x-y+2z=2$. 32. $M(1;1;2), \alpha: x-3y-z=4$.

33. $M(1;2;2), \alpha: 2x-y+z=4$. 34. $M(1;1;3), \alpha: x+y-2z=5$.

35. $M(3;2;1), \alpha: 3x-y+z=4$. 36. $M(1;-1;2), \alpha: x+y-2z=4$.

Задача 9. Напишите уравнение прямых на плоскости, проходящих через точку *M*, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна заданной прямой l.

1. $M(-2;1)$, $l:\ 3x-2y+`12=0$.  2. $M(2;-1)$, $l:\ x-y+`1=0$.

3. $M(3;-3)$, $l:\ x+2y-4=0$. 4. $M(-1;4)$, $l:\ 2x-5y+`2=0$.

5. $M(-5;0)$, $l:\ -x+2y+`9=0$. 6. $M(4;-1)$, $l:\ x+4y-3=0$.

7. $M(1;-1)$, l: $2x+2y+`1=0$. 8. $M(2;0)$, $l$: $-4x+y+`2=0$.

9. $M(6;1)$, l: $2x-y+4=0$. 10. $M(1;-3)$, l: $3x-y+`2=0$.

11. $M(1;1)$, l: $x-y+`10=0$. 12. $M(3;2)$, l: $2x-y-2=0$.

13. $M(1;1)$, l: $x+y+`2=0$. 14. $M(2;2)$, $l$: $3x+y+`4=0$.

15. $M(2;1)$, l: $x+4y+`1=0$. 16. $M(2;2)$, l: $4x+y-3=0$.

17. $M(3;-1)$, l: $3x-y+`2=0$. 18. $M(1;2)$, l: $2x+y-2=0$.

19. $M(1;5)$, l: $3x+y+`2=0$. 20. $M(2;1)$, l: $x+5y-4=0$.

21. $M(3;4)$, l: $x-3y-5=0$. 22. $M(5;1)$, l: $x+y-2=0$.

23. $M(2;4)$, l: $4x+2y-7=0$. 24. $M(1;6)$, l: $-2x+y=0$.

25. $M(0;3)$, l: $2x-y+1=0$. 26. $M(2;4)$, l: $x-5y-2=0$.

27. $M(1;4)$, l: $x+5y+1=0$. 28. $M(3;0)$, l: $4x-y+3=0$.

29. $M(3;3)$, l: $-4x+y=0$. 30. $M(1;4)$, l: $-x+y-2=0$.

31. $M(2;2)$, l: $x+2y-4=0$. 32. $M(1;3)$, l: $2x-y-4=0$.

33. $M(2;1)$, l: $4x-y-2=0$. 34. $M(1;-3)$, l: $x-y-3=0$.

35. $M(3;-1)$, l: $x-y+2=0$. 36. $M(1;2)$, l: $2x-y+2=0$.

Задача 10. Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и постойте ее. Укажите координаты вершин, фокусов.

1. $4x^2+y^2-8x+4y=0$.

2. $9x^2-4y^2+54x+8y+41=0$.

3. $2x^2+3y^2+12x-6y+21=0$.

4. $4x^2-y^2+8x-2y+3=0$.

5. $9x^2+16y^2+36x-64y-44=0$.

6. $4x^2-25y^2+8x-10y+4=0$.

7. $9x^2+4y^2+36x-8y+36=0$.

8. $x^2-4y^2+10x+24y-7=0$.

9. $4x^2+25y^2-8x+100y+4=0$.

10. $x^2-4y^2+6x+8y+5=0$.

11. $2x^2+3y^2+8x-6y+11=0$.

12. $9x^2-4y^2+36x+8y+68=0$.

13. $4x^2+9y^2-32x+36y+64=0$.

14. $4x^2-y^2-8x-4y-16=0$.

15. $9x^2+4y^2+18x-8y+49=0$.

16. $4x^2-y^2+16x-2y+15=0$.

17. $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$.

18. $4x^2-9y^2+16x+54y-101=0$.

19. $3x^2+2y^2+12x-16y+44=0$.

20. $9x^2-16y^2-36x-64y-172=0$.

21. $4x^2+9y^2+32x-16y+37=0$.

22. $9x^2-4y^2-18x-16y-7=0$.

23. $4x^2+y^2-8x+4y+24=0$.

24. $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 11 = 0$.

25. $x^2 + 4y^2 + 10x - 24y + 57 = 0$.

26. $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$.

27. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 109 = 0$.

28. $5x^2 + 3y^2 - 10x + 12y + 17 = 0$.

29. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$.

30. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

31. $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 12 = 0$.

32. $2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 10 = 0$.

33. $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$.

34. $2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$.

35. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$.

36. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$.

Задача 11. Выясните, образуют ли векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ базис. Если они образуют базис, то вектор $\vec{x}$ разложите по этому базису (только для экономических специальностей).

1. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$.

3. $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}13\\2\\7\end{pmatrix}$.

4. $\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\5\\5\end{pmatrix}$.

5. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}$.

6. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\8\end{pmatrix}$.

7. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\-8\\-3\end{pmatrix}$.

8. $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$.

9. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\15\\0\end{pmatrix}$.

10. $\vec{p}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}$.

11. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-15\\5\\6\end{pmatrix}$.

12. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}23\\-14\\30\end{pmatrix}$.

13. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}$.

4. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-13\\2\\18\end{pmatrix}$.

15. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-8\\9\end{pmatrix}$.

16. $\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\-1\\4\end{pmatrix}$.

17. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$.

18. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\9\\4\end{pmatrix}$.

19. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\\-14\end{pmatrix}$.

20. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-1\\7\end{pmatrix}$.

21. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\11\end{pmatrix}$.

22. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\9\\-13\end{pmatrix}$.

23. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\1\\12\end{pmatrix}$.

24. $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}$.

25. $\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-19\\-1\\7\end{pmatrix}$.

26. $\vec{p}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix}$.

27. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$.

28. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\5\\-3\end{pmatrix}$.

29. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\12\\-1\end{pmatrix}$.

30. $\vec{p}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$.

31. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

32. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

33. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

34. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$.

35. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

36. $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$.

Задача 12. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы A (только для экономических специальностей).

1. $A=\begin{pmatrix}3 & -8\\ -2 & 3\end{pmatrix}$. 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. 3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 2\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. 5. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. 6. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. 8. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.9. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 11. $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$. 12. $A=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. 14. $A=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. 15. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -4 & 0\end{pmatrix}$. 17. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1{,}5 & 1\end{pmatrix}$. 18. $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2{,}5 & -1\end{pmatrix}$. 20. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. 21. $A=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. 23. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$. 24. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 26. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. 27. $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$. 29. $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 30. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

31. $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$. 32. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. 33. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

34. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. 35. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. 36. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

4. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

4.1. Множества на числовой оси

Множества на числовой оси – это промежутки:

$(a;b)$ – интервал. $x\in(a;b)$ означает, что $a<x<b$;

$[a;b]$ – отрезок или замкнутый интервал. $x\in[a;b]$ означает, что $a\le x\le b$;

$[a;b)$ – полузамкнутый интервал. $x\in[a;b)$ означает, что $a\le x<b$;

Если $a=-\infty$ или $b=+\infty$, то:

$(-\infty;b)$ – интервал. $x\in(-\infty;b)$ означает, что $x<b$;

$(a;+\infty)$ – интервал. $x\in(a;+\infty)$ означает, что $x>a$;

$(-\infty;+\infty)$ – интервал. $x\in(-\infty;+\infty)$ означает, что $-\infty<x<+\infty$;

Далее мы введем понятия *окрестностей* на числовой оси.

Определение 1

Окрестностью радиуса $h>0$ *конечной точки* x_0 или h – окрестностью точки x_0 называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x_0-h<x<x_0+h$, т. е. множество $(x_0-h;\,x_0+h)$ (рис. 4.1).

Обозначается: $U_h(x_0)$.

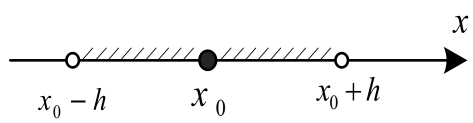


Рис. 4.4. Окрестность конечной точки

Из определения следует, что если $x \in U_h(x_0)$, то x удовлетворяет неравенству

$|x - x_0| < h$, или $-h < x - x_0 < h$, или $x_0 - h < x < x_0 + h$.

Определение 2

Пусть $h > 0$. h*–окрестностью точки* $(+\infty)$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > h$, т. е. множество $(h; +\infty)$ (рис. 4.2), которое обозначается $U_h(+\infty)$.

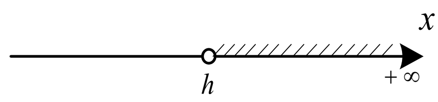


Рис. 4.2. Окрестность точки $(+\infty)$

Из определения следует, что если $x \in U_h(+\infty)$, то x удовлетворяет неравенству $x > h$ (рис. 4.2).

Определение 3

Пусть $h > 0$ h*–окрестностью точки* $(-\infty)$ называется множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x < -h$, т. е. множество $(-\infty; -h)$ (рис. 4.3), которое обозначается $U_h(-\infty)$.

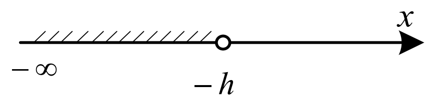


Рис. 4.3. Окрестность точки $(-\infty)$

Из определения следует, что: $x \in U_h(-\infty) \Leftrightarrow x < -h$.

Определение 4

Пусть $h > 0$. Проколотой h–окрестностью конечной точки x_0 называется множество чисел x, для которого справедливо $x \in U_h(x_0)$ и $x \neq x_0$ (рис. 4.4) и которое обозначается $\dot{U}_h(x_0)$.

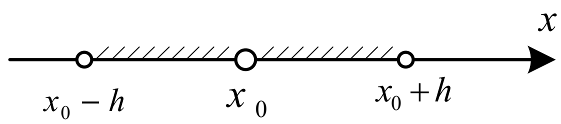


Рис. 4.4. Проколотая окрестность конечной точки

Из определения следует, что:

$$x \in \overset{\bullet}{U}_h(x_0) \Leftrightarrow |x - x_0| < h,\ x \neq x_0 \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < h\,.$$

Определение 5

Точка x_0 называется *предельной точкой множества* X, если в любой проколотой окрестности точки x_0 находится хотя бы один элемент данного множества X.

ЗАМЕЧАНИЕ

Предельная точка может принадлежать множеству, но может ему и не принадлежать. Например, для множеств $(1;\,2)$ и $[1;\,2]$ точки 1 и 2 являются предельными точками.

Определение 6

Точка, принадлежащая множеству и не являющаяся его предельной точкой, называется *изолированной*.

Например, во множестве натуральных чисел N каждая конечная точка является изолированной. Множество N имеет единственную предельную точку $x_0 = +\infty$. Действительно, в любой окрестности точки $x_0 = +\infty$, т.е. в окрестности $U_h(+\infty) = (h;\, +\infty)$ находится бесконечное множество натуральных чисел (рис. 4.5).

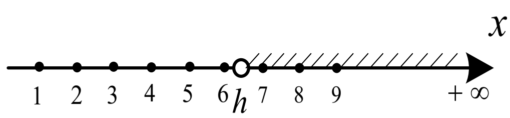


Рис. 4.5. Предельная точка множества натуральных чисел

4.2. Определение предела функции

Пусть задана функция $f(x)$, X – её область определения, x_0 – предельная точка множества X.

Определение

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой окрестности U_ε точки A найдётся такая окрестность U_δ точки x_0, что для всех x из области определения X и найденной проколотой окрестности $\dot{U}_\delta$ точки x_0 значения функции $f(x)$ попадают в окрестность U_ε точки A (рис. 4.6).

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$.

Запишем это определение в другой форме, используя символы:
$\forall$ – для любого; $\exists$ – существует (найдётся); $:$ – такая, что; $\Rightarrow$ – следует; $\Leftrightarrow$ – равносильно.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \iff$$

$$\forall U_\varepsilon(A)\, \exists U_\delta(x_0) : \forall x \in \dot{U}_\delta\,(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

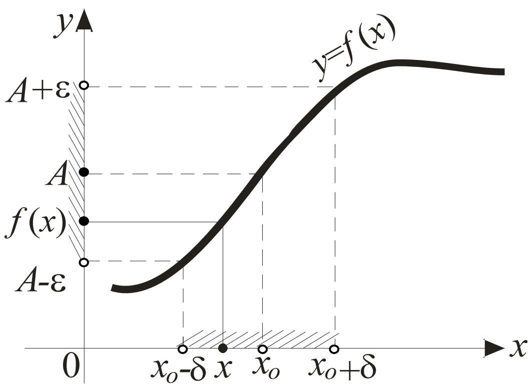


Рис. 4.6. Конечный предел в конечной точке

4.3. Односторонние пределы

Правосторонней $h-$ *окрестностью* точки x_0 называется множество точек x, таких, что $x \in (x_0;\ x_0 + h)$, где $h > 0$ (рис. 4.7).

Обозначение: $U_h^+(x_0)$.

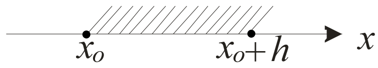


Рис. 4.7. Правосторонняя окрестность

Левосторонней $h-$*окрестностью* точки x_0 называется множество точек x, таких ,что $x \in (x_0 - h; x_0)$, где $h > 0$ (рис. 4.8).

Обозначение: $U_h^-(x_0)$.

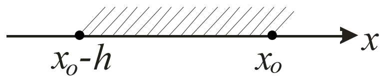


Рис. 4.8. Левосторонняя окрестность

Определение 1

Число A называется *правосторонним пределом* функции $f(x)$ при $x \to x_0 + 0$ (x стремится к x_0 справа), если для любой окрестности U_ε точки A найдётся такая окрестность U_δ точки x_0, что для всех x из области определения X и найденной правосторонней окрестности точки x_0 соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в заданную окрестность точки A, т.е.

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \iff$$

$$\forall U_\varepsilon(A)\ \exists\, U_\delta(x_0) : \forall x \in U_\delta^+(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Например, $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_2 x = -\infty$ (рис. 4.9), поскольку

$$\forall U_\varepsilon(-\infty) \quad \exists U_\delta(0): \forall x \in U_\delta^+(0) \cap X \Rightarrow \log_2 x \in U_\varepsilon(-\infty). \quad (2)$$

Областью определения функции является множество $(0+\infty)$, для которого 0 есть предельная точка. Поскольку $U_\delta^+(0) = (0;\delta)$, $U_\varepsilon(-\infty) = (-\infty; -\varepsilon)$, то формула (2) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $0 < x < \delta$ выполняется неравенство $\log_2 x < -\varepsilon$ (рис. 4.9).

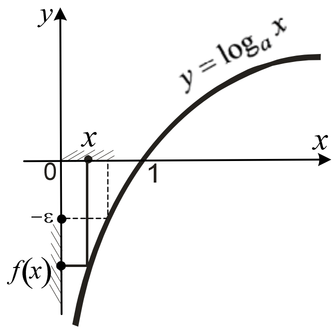


Рис. 4.9. Правосторонний предел функции

Определение 2

Число A называется *левосторонним пределом* функции $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ (x стремится к x_0 слева), если для любой окрестности U_ε точки A найдётся такая окрестность U_δ точки x_0, что для всех x из области определения X и найденной левосторонней окрестности точки x_0 соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в заданную окрестность точки A.

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall U_\varepsilon(A) \ \exists U_\delta(x_0): \forall x \in U_\delta^-(x_0) \cap X \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A). \qquad (1)$$

4.4. Арифметические операции над функциями, имеющими конечный предел

При вычислении пределов функций необходимо знать следующие теоремы:

$$\lim_{x\to x_0} C = C, \text{ где } C = const; \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0} Cf(x) = C \lim_{x\to x_0} f(x), \text{ где } C = const. \quad (2)$$

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, то

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B; \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B; \qquad (4)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ где } B \neq 0; \qquad (5)$$

$$\lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}. \qquad (6)$$

Кроме того, мы будем пользоваться тем, что для основных элементарных функций $f(x)$ в любой точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right). \qquad (7)$$

Например, $\lim\limits_{x\to 1} (3x^2 + 5x - 1) = 3\left(\lim\limits_{x\to 1} x\right)^2 + 5\lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 1 =$
$= 3\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 1 = 7$.

Теоремами (1) – (7) можно пользоваться и в том случае, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. При этом следует руководствоваться действиями на расширенной числовой оси.

4.5. Действия на расширенной числовой оси

Расширим систему вещественных чисел, добавив к ним два символа $-\infty$ и $+\infty$, которые назовём *бесконечно удалёнными точками* числовой оси. Определим для этих символов следующие действия.

1) Если $x \in R$ и является конечным числом, то:

$$x \pm \infty = \pm\infty\,;\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty\,;\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,.$$

Действие $(+\infty) + (-\infty)$ не определено. Говорят, что в данном случае имеется неопределенность вида $[\infty - \infty]$.

2) Если $x \in R$ и является конечным числом, то:

$$x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ при } x > 0 \text{ и } x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ при } x < 0\,;$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty\,;\ (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty\,;\ (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty\,.$$

Действие $0 \cdot (\pm\infty)$ не определено. Говорят, что в данном случае имеется неопределенность вида $[0 \cdot \infty]$.

3) Если $x \in R$ и является конечным числом, то:

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0\,;\ \frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \text{ при } x > 0 \text{ и } \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \text{ при } x < 0\,;$$

$$\frac{x}{+0} = +\infty \text{ и } \frac{x}{-0} = -\infty \text{ при } x > 0\,;\ \frac{x}{+0} = -\infty \text{ и } \frac{x}{-0} = +\infty$$

$$\text{при } x < 0\,.$$

Действия $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ не определены. Говорят, что в данном случае имеются неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Следовательно, использование теорем о пределах может привести к неопределенным выражениям $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Например:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(e^{1-x}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 1}1-\lim\limits_{x\to 1}x}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to 1}x\right)=$

$=e^{1-1}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=1\cdot\infty=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}x^2+3\lim\limits_{x\to 0}x+1}{2\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}x}=$

$=\dfrac{0+3\cdot 0+1}{2\cdot 0-0}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Из приведенных решений примеров видно, что на практике в простейших случаях вычисление предела сводится к подстановке в данное выражение значения $x=x_0$. Результат подстановки записывают в квадратных скобках. Если при вычислении предела получится неопределенное выражение, то его нужно преобразовать так, чтобы неопределенность «устранилась».

Задача 4.1

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$.

Решение

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}=\frac{9+6-15}{9-9}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

В результате получилось неопределенное выражение. Чтобы «раскрыть» эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на множители.

По формуле разности квадратов $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ преобразуем знаменатель:

$$x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3).$$

Учитывая свойство корней квадратного уравнения, т.е. теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

найдем корни квадратичной функции $x^2 + 2x - 15$ в числителе дроби. Поскольку $a = 1$, $c = -15$, а один корень функции уже известен: $x_1 = 3$, то второй корень определяется из соотношения: $x_1 \cdot x_2 = -15$ или $3 \cdot x_2 = -15$. Следовательно, $x_2 = -5$.

Используя разложение квадратичной функции на линейные множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни функции, представим

$$x^2 + 2x - 15 = (x-3) \cdot (x+5).$$

Тогда

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3) \cdot (x+5)}{(x-3) \cdot (x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Из решения задачи ясно, что неопределенность была вследствие того, что в числителе и знаменателе был одинаковый множитель $x - 3$, который обращал числитель и знаменатель в ноль. После сокращения дроби на этот множитель получилось определенное выражение.

Задача 4.2

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x+12} - 3}{x^3 + 27}$.

Решение

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+12} - 3}{x^3 + 27} = \frac{\sqrt{-3+12} - 3}{-27 + 27} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Разложить выражение под знаком предела на множители в данном случае «мешает» иррациональность. Поэтому сначала избавимся от нее, умножая числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x+12}+3$.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+12}-3}{x^3+27}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{x+12}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+12}+3\right)}{\left(x^3+27\right)\cdot\left(\sqrt{x+12}+3\right)}.$$

В числителе получится разность квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, а в знаменателе можно заменить множитель $\sqrt{x+12}+3$ на его предел: $\lim\limits_{x\to-3}\left(\sqrt{x+12}+3\right)=3+3=6$.

Сумму кубов x^3+27 разложим на множители, учитывая формулы:

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right),$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Тогда $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)\left(x^2-3x+9\right)$. Поэтому

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+12}-3}{x^3+27}=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{x+12}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+12}+3\right)}{\left(x^3+27\right)\cdot\left(\sqrt{x+12}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{\left(\sqrt{x+12}\right)^2-3^2}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)\cdot6}==\lim_{x\to-3}\frac{x+12-9}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)\cdot6}=$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)\cdot6}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{\left(x^2-3x+9\right)\cdot6}=$$

$$=\frac{1}{(9+9+9)\cdot6}=\frac{1}{27\cdot6}=\frac{1}{162}.$$

4.6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой (б.м.) в точке* x_0 или при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Определение 2

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой (б.б.) в точке* x_0 или при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Теорема 1

Если $\alpha(x)$ б.м. в точке x_0, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – б.б. в точке x_0 и если $f(x)$ б.б. в точке x_0, то $\frac{1}{f(x)}$ – б.м. в точке x_0.

Например: функция $\alpha(x) = x^2$ является бесконечно малой в точке $x_0 = 0$ и является бесконечно большой при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$, а функция $\frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{x^2}$ является бесконечно большой в точке $x_0 = 0$ и является бесконечно малой при $x \to \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Определение 3

Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если существуют числа m и M, такие, что при всех допустимых значениях x справедливо неравенство $m < f(x) < M$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной в окрестности*, если это неравенство выполняется только в некоторой окрестности U_δ.

Например, функция $f(x) = \sin x$ ограничена, т.к. $-1 \le \sin x \le 1$, а функция $f(x) = x^2$ может быть ограничена только в некоторой окрестности:

в окрестности $U_\delta(0)$, т.е. при $-\delta < x < \delta$, ее значения $0 < x^2 < \delta^2$, в окрестности $U_\delta(2)$, т.е. при $2-\delta<x<2+\delta$, ее значения $(2-\delta)^2<x^2<(2+\delta)^2$

Теорема 2

Произведение функции, б.м. в точке x_0, на ограниченную функцию (ограниченную в окрестности) является б.м. функцией в той же точке.

Например, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x\cdot\dfrac{1}{x}=0$, т. к. $\sin x$ – ограниченная для всех x, а $\dfrac{1}{x}$ – б.м. в точке $\pm\infty$.

Теорема 3

Произведение конечного числа бесконечно малых функций является б.м. функцией в той же точке.

Теорема 4

Произведение конечного числа бесконечно больших функций является б.б. функцией в той же точке.

Теорема 5

Сумма конечного числа функций, б.м. в точке x_0, является б.м. функцией в той же точке.

Теорема 6

Сумма конечного числа функций, б.б. в одной точке, и имеющих одинаковый знак, является б.б. того же знака в той же точке.

Теорема 7

Сумма функции, б.б. в точке x_0, и функции, ограниченной в окрестности точки x_0 является б.б. функцией в той же точке.

4.7. Сравнение бесконечно малых функций

Определение 1

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. в точке x_0, тогда, если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0, & \textit{то}\quad \alpha(x)-\textit{б.м. более высокого порядка,}\\ \infty, & \textit{то}\quad \beta(x)-\textit{б.м. более высокого порядка,}\\ C\neq 0,\neq\infty, & \textit{то}\ \alpha(x)\ \textit{и}\ \beta(x)\ \textit{б.м. одного порядка.}\end{cases}$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми*.

Например, если сравнить $\alpha(x)=x^2-1$ и $\beta(x)=x-1$ в точке $x=1$, то $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$ и поэтому $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ

Чаще всего сравнение б.м. ясно из их записи. *Например*, при $x\to 0$ б.м. x^5 – б.м. более высокого порядка, чем б.м. x^2.

Определение 2

Две б.м. функции называются *эквивалентными* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Эквивалентность б.м. функций обозначается:

$$\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x).$$

Теорема 1

Если $\alpha(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\beta(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\alpha(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\beta(x)\right),$$

т.е. под знаком предела любой сомножитель, являющийся б.м., можно заменить на эквивалентную ему б.м.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
$\operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \ln a$
$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$\operatorname{arctg} x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$	$(1+x)^{\mu} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \mu x$

При использовании таблицы эквивалентных б.м. следует понимать, что:

1) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, но $e^{3x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 3x$ и $e^{x-2} - 1 \underset{x\to 2}{\sim} x - 2$.

2) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, но $\ln\left(1 - x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$ и

$\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

При замене б.м. на эквивалентные б.м. следует учитывать, что:

4. Сумма функций, б.м. в точке x_0, разного порядка эквивалентна б.м. меньшего порядка.

Например:

a) $x^3 + 2x \underset{x\to 0}{\sim} 2x$;

b) $1 - \cos 2x + \operatorname{tg} x = (1 - \cos 2x) + \operatorname{tg} x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2 + x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

2. Сумму б.м. функций одного порядка можно заменять на сумму эквивалентных им б.м., если в результате не получится ноль. В этом случае следует разложить заданное выражение на множители.

Например, $3x^3 + \sin\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} 3x^3 + x^3 = 4x^3$.

Однако, $\operatorname{tg} x - \sin x$ не эквивалентно $x - x = 0$. Поэтому

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \sin x \cdot \left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} x \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

Задача 4.3.a

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{x^2} - 1}{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}$.

Решение

Если использовать теоремы о пределах, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{x^2} - 1}{x \cdot \operatorname{arctg} 2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ получается неопределенность. Заменим б.м. на эквивалентные им б.м., используя таблицу.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x \cdot \operatorname{arctg} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \ln 3}{x \cdot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \ln 3}{2x^2} = \frac{\ln 3}{2}.$$

Задача 4.3.b

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos 2x}{\ln(1-7x)}$.

Решение

Если использовать теоремы о пределах, то $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos 2x}{\ln(1-7x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ получается неопределенность. В числителе дроби прибавим и вычтем единицу, а затем заменим б.м. на эквивалентные им б.м., используя таблицу.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^2} - 1\right) + (1 - \cos 2x)}{\ln(1-7x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{1}{2}(2x)^2}{-7x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x^2}{-7x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-7x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{-7} = \frac{0}{-7} = 0 .$$

4.8. Сравнение бесконечно больших функций

Определение 1

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.б. в точке x_0. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0, & \textit{то} \quad \beta(x) - \textit{б.б. более высокого порядка,} \\ \infty, & \textit{то} \quad \alpha(x) - \textit{б.б. более высокого порядка,} \\ C \neq 0, \neq \infty, & \textit{то} \ \alpha(x) \ \textit{и} \ \beta(x) \, \textit{б.б. одного порядка.} \end{cases}$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми*.

Например, $\alpha(x) = x^3$ – б.б. более высокого порядка, чем $\beta(x) = 2x$, поскольку

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^3}{2x} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty .$$

Определение 2

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.б. в точке x_0. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* б.б. что обозначается, как $\beta(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$.

Теорема 1

Если $\alpha(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \beta(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\alpha(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\beta(x)\right),$$

т.е. под знаком предела любой сомножитель, являющийся б.б., можно заменить на эквивалентную ему б.б.

При замене б.б. на эквивалентные б.б. следует учитывать, что:

4. Сумма функций, б.б. в точке x_0, разного порядка эквивалентна б.б. высшего порядка.

Например, $x^3 + 2x^2 - 3x \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$.

2. Сумма функции, б.б. в точке x_0, и ограниченной эквивалентна этой б.б.

Например, $-2x^4 + 2\sin x - \cos\sqrt{x} + 3 \underset{x\to\infty}{\sim} -2x^4$.

3. Сумму б.б. функций одного порядка можно заменять на сумму эквивалентных им б.б., если в результате не получится ноль. В этом случае следует разложить заданное выражение на множители.

Например, $\sqrt{9x+3} + \sqrt{9x+5} \underset{x\to\infty}{\sim} 3\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = 6\sqrt{x}$, но $\sqrt{9x+3} - \sqrt{9x+5}$ нельзя заменять на эквивалентные б.б., т.к. в результате получается ноль. Поэтому

$$\sqrt{9x+3} - \sqrt{9x+5} = \frac{\sqrt{9x+3} - \sqrt{9x+5}}{1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{9x+3} - \sqrt{9x+5}\right)\cdot\left(\sqrt{9x+3} + \sqrt{9x+5}\right)}{\sqrt{9x+3} + \sqrt{9x+5}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{9x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{9x+5}\right)^2}{\sqrt{9x+3} + \sqrt{9x+5}} = \frac{9x+3-9x-5}{\sqrt{9x+3} + \sqrt{9x+5}} =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{9x+3} + \sqrt{9x+5}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{-2}{3\sqrt{x} + 3\sqrt{x}} = \frac{-2}{6\sqrt{x}} = -\frac{1}{3\sqrt{x}}.$$

Задача 4.4 а

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 5}{3x + \sqrt{x}}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+5}{3x+\sqrt{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3}=+\infty,$$

поскольку $x^3-2x+5 \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$ и $3x+\sqrt{x} \underset{x\to\infty}{\sim} 3x$.

Задача 4.4.b

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^3+5}{3-x^4}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3+5}{3-x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{-x^4}=-3,$$

поскольку $3x^4+2x^3+5 \underset{x\to\infty}{\sim} 3x^4$ и $3-x^4 \underset{x\to\infty}{\sim} -x^4$.

4.9. Непрерывность функции в точке и на промежутке

Определение 1

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Определение непрерывной функции можно переписать в виде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$, то есть под знаком непрерывной функции можно переходить к пределу.

Определение 2

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если она определена в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ (или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$).

Определение 3

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого интервала $(a; b)$, то функция называется непрерывной на этом интервале.

Определение 4

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a; b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a; b)$, и непрерывна справа в точке a и слева в точке b.

4.10. Непрерывность элементарных функций. Свойства непрерывных функций

Теорема 1

Все элементарные функции и их суперпозиции непрерывны на их области определения.

Теорема 2

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывны в этой же точке их сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0) \neq 0$).

Теорема 3

Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = g(x_0)$, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

4.11. Графики основных элементарных функций

1. Линейная функция

Графиком линейной функции $y = kx + b$, где $\operatorname{tg}\alpha = k$ является прямая (рис. 4.10)

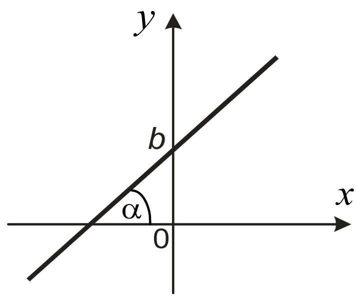


Рис. 4.10. График линейной функции

2. Квадратичная функция

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ является парабола с вершиной в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$; x_1 и x_2 – корни функции (рис. 4.11).

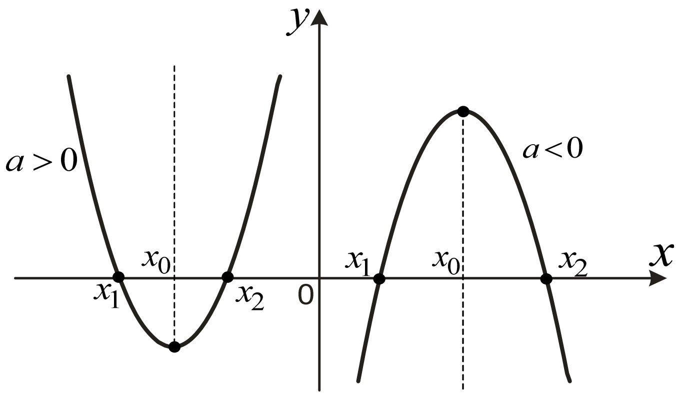


Рис. 4.11. График квадратичной функции

3. Обратная пропорциональная зависимость

График обратной пропорциональной зависимости $y = \dfrac{k}{x}$ – это гипербола, асимптотами которой являются координатные оси (рис. 4.12).

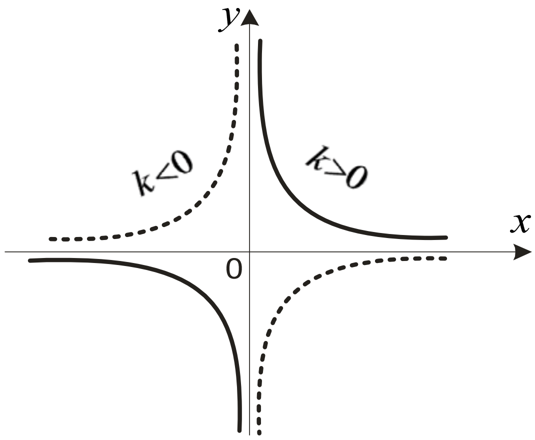


Рис. 4.12. График обратной пропорциональной зависимости

4. Показательная функция

Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ (рис. 4.13).

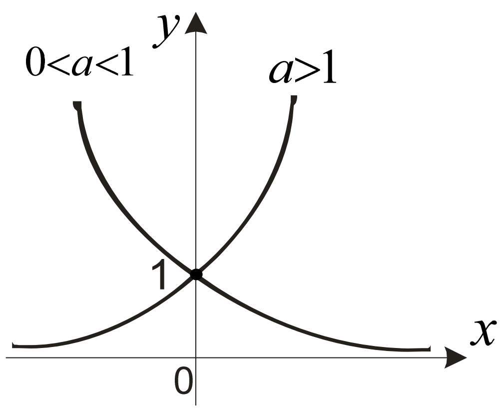


Рис. 4.13. График показательной функции

5. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ (рис. 4.14).

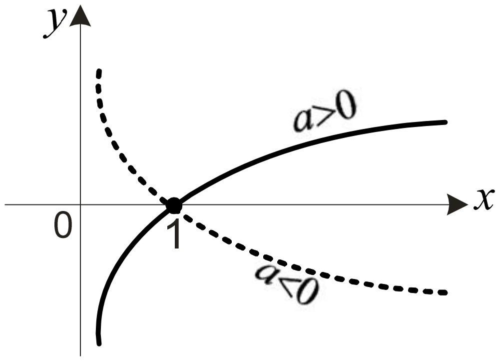


Рис. 4.14. График логарифмической функции

6. Тригонометрические функции

Тригонометрические функции $y = \sin x$ (рис. 4.15) и $y = \cos x$ (рис. 4.16) – периодические функции с периодом $T = 2\pi$; это ограниченные функции $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$.

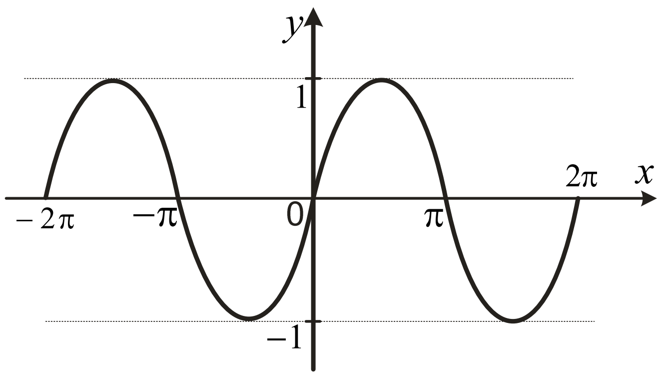


Рис. 4.15. График функции $y = \sin x$

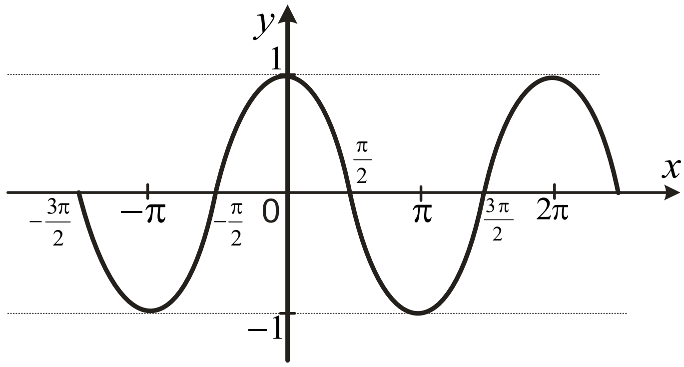


Рис. 4.16. График функции $y = \cos x$

Тригонометрические функции $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (рис. 4.17) и $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (рис. 4.18) – это периодические функции с периодом $T = \pi$; функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена в точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена в точках $x = \pi k$.

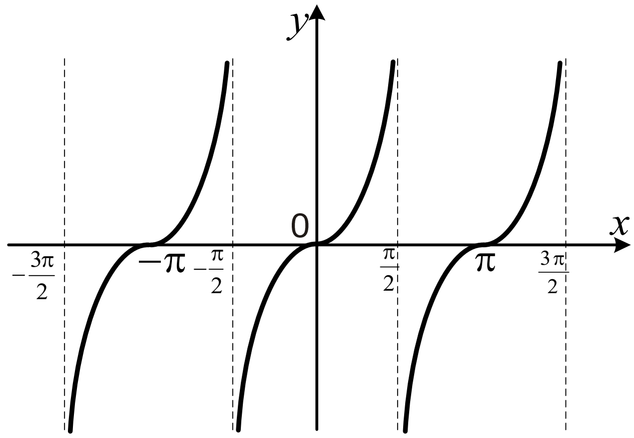


Рис. 4.17. График функции $y = \operatorname{tg} x$

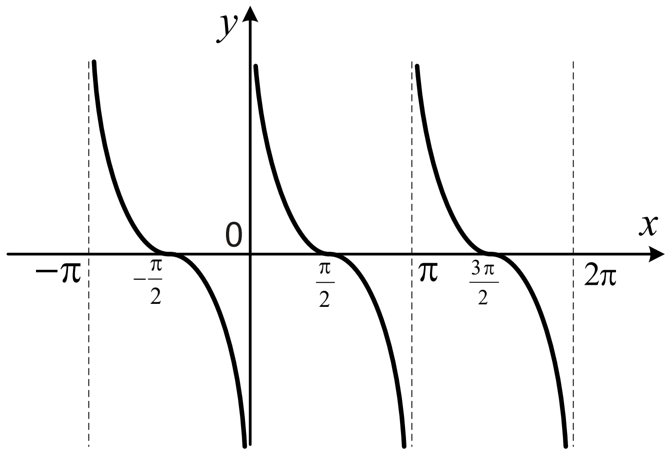


Рис. 4.18. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

4.11. Классификация точек разрыва

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что она *терпит в этой точке разрыв.*

Чтобы классифицировать точки разрыва функции дадим определение непрерывной в точке функции в развернутом виде.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если:

1) $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0;

2) существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

3) эти пределы равны и равны значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Если в точке x_0 хотя бы одно из условий непрерывности нарушается, точка x_0 является *точкой разрыва* данной функции.

1. Устранимый разрыв

Точка x_0 является точкой *устранимого разрыва*, если существуют конечные односторонние равные между собой пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

При этом функция не определена в точке x_0 или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Например, функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \begin{cases} x + 2, & x \neq 2, \\ \textit{не определена}, & x = 2 \end{cases}$

имеет устранимый разрыв в точке $x_0 = 2$ (рис. 4.19).

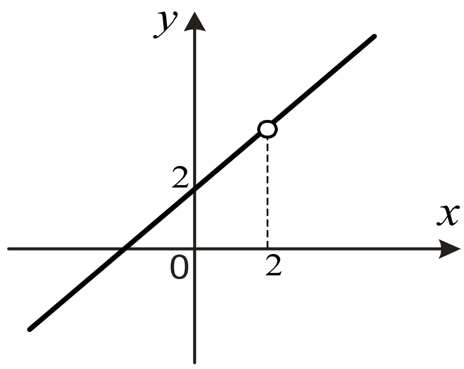


Рис. 4.19. Устранимый разрыв

2. Неустранимый разрыв первого рода

Точка x_0 является точкой *неустранимого разрыва 1 рода*, если существуют конечные односторонние не равные между собой пределы, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

Например, функция $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1} \cdot x^2$, которую с учетом

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

можно представить в виде $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1, \\ -x^2, & x < 1 \end{cases}$ имеет неустранимый разрыв 1 рода в точке $x_0 = 1$ (рис. 4.20).

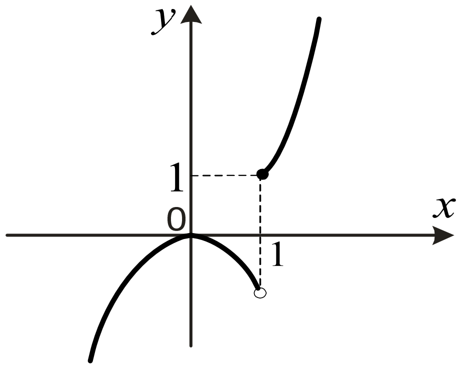


Рис. 4.20. Неустранимый разрыв 1 рода

3. Неустранимый разрыв второго рода

Если в точке x_0 хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞, то точка x_0 называется *точкой неустранимого разрыва второго рода*.

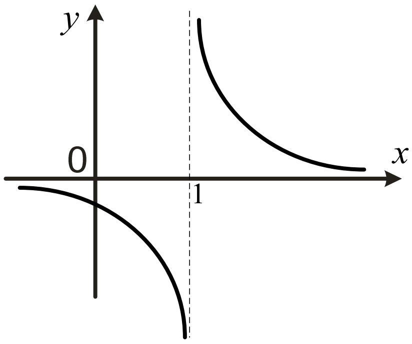


Рис. 4.21. Неустранимый разрыв 2 рода

Например, функция $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ имеет неустранимый разрыв второго рода в точке $x_0=1$ (рис. 4.21). При построении графика учли, что график функции $y=f(x-a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом на a вправо при $a>0$ и влево при $a<0$.

Задача 4.5

Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ 4-x^2, & 0<x\le 2, \\ \ln(x-2), & x>2 \end{cases}$ на непрерывность:

Решение

Изобразим график этой функции (рис. 4.22). Точками разрыва функции $f(x)$ являются точки: $x_1=0$ и $x_2=2$. Чтобы выяснить характер разрыва в этих точках, определим в них односторонние пределы, которые ясны из построенного графика функции.

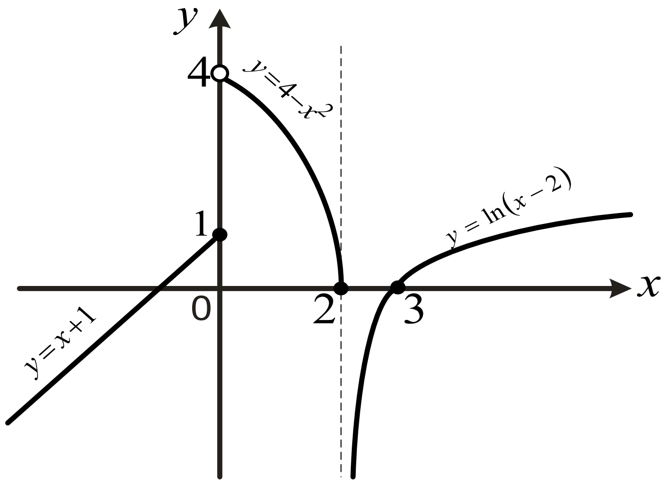


Рис. 4.22. График заданной функции

1) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1\\ \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(4-x^2)=4\end{array}\right\}\Rightarrow$ точка $x_1=0$ – точка неустранимого разрыва 1 рода.

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)=0\\ \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$ точка $x_2=2$ – точка

неустранимого разрыва 2 рода.

Следует отметить, что в точках разрыва функция непрерывна слева, так как

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=1=f(0).$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2}(4-x^2)=0=f(2).$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3

Задача 4. Вычислите предел функции

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 + 8}$.

2. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 7x^2 + 6x}$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^3 - 3x - 2}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x + x^5}$.

5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x}$.

6. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$.

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - x^3 + x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

10. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x}$.

11. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 2x^2 - 3x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^4 + x^2 - 2}$.

13. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

14. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$.

15. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

16. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$.

17. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\left(x^3 - 2x - 1\right)^2}{x^3 + 1}$.

18. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$.

19. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^4 - 4x^2}$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 4x^2}{5x^3 + 8x^2}$.

21. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$.

22. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 5x - 6}{3x^3 - 7x^2 + 2x}$.

23. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+2x^3+x^2}{x^4-2x^2+1}$.

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-6x+8}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^2-1}{x^2+x^5}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^3-24}{4x^2-5x-6}$.

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

28. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{(x^2-x-2)^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

30. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$.

31. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$.

32. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}$.

33. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-1}$.

34. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

35. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

36. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

Задача 2. Вычислите предел функции

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-\sqrt{x+6}}$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-\sqrt{x+2}}$.

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-2}{x^2+3x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{2x-x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}+2}{x+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{25-2x}-3}{x-8}$.

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-4}$.

14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{2x+3}-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{8+x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{3x^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-(1+x)}{3x}$.

18. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^3+8}$.

19. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x^2-64}$.

20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x^3+8}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{1+x}-1}$.

23. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x^2-1}$.

24. . $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{3+x}-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+2x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x+x^2}-2}{x+x^2}$.

31. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5+2x}-3}{x^2-4}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{3x+2x^2}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+2x}-3}{3x}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^3+2x^2}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+2x}-2}{3x+x^2}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x^3+2x}$.

Задача 3. Вычислите предел функции

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x}{\sin 6x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(x+2\pi)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+7x)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi+x)}{\sin(2\pi-x)}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{\ln(1+2\operatorname{tg}3x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{\arcsin 2x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+0{,}5)]}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin^2 3x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}8x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{1-\cos\frac{3x}{2}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin^2\sqrt{x}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1-\cos\sqrt{x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x+\sin x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{\sin^2 8x}$.

23. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin \pi x}-e^{-\sin 3\pi x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-2\sin x}{x\cdot\ln(1+2\sin x)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(3^{2x}-1)}{3^{\sin 2x}-1}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{x\ln(1-\sin x)}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x^2+\sin^3 x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{5^x-1}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{x^2}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{arctg} 2x}{e^{x^3}-1}$.

34. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2+3x}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_2(1-2x^2)}{e^{3x^2}-1}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$.

Задача 4. Вычислите предел функции

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-1}}{3x+4}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+25}{x^3+3x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}+3x-1}{\sqrt{x}+4}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt[3]{1-x^3}}{3x+2}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2+4}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x+x^2}+2x}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sqrt{x+1}-\sqrt{1+4x}}{\sqrt[3]{x^3+3}}$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+6}+2x}{x+2}$.

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{25+9x}+3x}{4x+2}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6}+2x}{3x+2}$.

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5+9x^4}+3x}{4x^2+2}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+3x}{5x+2}$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5+4x^4}+x}{3x^2+2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x^3}{x^3-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^3+8x}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x+x^3}{3x^3-2x}$.

20. . $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2}{1-x^3+x}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x}{x^3+2x}$.

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+x^2}{\sqrt{1+x^4}+1}$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-5x^3}{x^4+x^3+1}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+x^2}{\sqrt{1+x^6}+x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5}{x-\sqrt{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x-1}{\sqrt{x^2+3}+3x}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}+4x}{\sqrt[3]{x}+2x}$.

28. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+x}{x}$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9+4x^2}-3}{\sqrt[3]{x^3+4}+4x}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x+2}{x+x^2}$.

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt[3]{1+x^3}}{3x+7}$.

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^3+2x}{x+x^2}$.

33. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+\sqrt{1+x^4}}{3x^2+7}$.

34. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^3+2x}{x+x^2}$.

35. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+\sqrt{1+x}}{2x^2+1}$.

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2+2}{x-x^3}$.

Задача 5. Исследуйте функцию $f(x)$ на непрерывность. Установите тип точек разрыва и изобразите график функции.

1. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0; \\ x^3, & 0<x\le 2; \\ \dfrac{1}{2-x}, & x>2. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & x<0; \\ 4e^x, & 0<x\le 4; \\ \dfrac{1}{x-4}, & x>4. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+3}, & x<-3; \\ x+3, & -3\le x\le 0; \\ x^2, & x>0. \end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x<0; \\ -x^3, & 0<x<2; \\ x+3, & x\ge 2. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0; \\ x+1, & 0<x\le 2; \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2. \end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-1; \\ |x|, & |x|\le 1; \\ \ln(x-1), & x>1. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 3, & x<-3; \\ |x|, & -3\le x\le 3; \\ 6-x, & x>3. \end{cases}$ 8. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{x^2}, & 0<x<\dfrac{1}{2}; \\ 4, & x>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x\le 0; \\ \cos x, & 0<x\le \pi; \\ \dfrac{1}{x-\pi}, & x>\pi. \end{cases}$ 10. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2; \\ x^2-6x+11, & 2<x<4; \\ 2x-5, & x>4. \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le -1; \\ \dfrac{1}{x}, & -1<x<0; \\ -2x^2+x, & x\ge 0. \end{cases}$ 12. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, & x<-2; \\ 0, & -2\le x<0; \\ \sin x, & 0<x<\infty. \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0; \\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\frac{\pi}{2}; \\ x, & x\ge\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 14. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x<1; \\ 2x+2, & 1<x\le 3; \\ \lg(x-3), & x>3. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} 3, & x<-3; \\ |x|, & -3<x\le 3; \\ \ln(x-3), & x>3. \end{cases}$ 16 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0; \\ \cos x, & 0<x<\pi; \\ \frac{\pi}{x}, & x\ge\pi. \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} x^3, & -\infty<x<0; \\ x^2+1, & 0\le x<4; \\ \lg(x-4), & x>4. \end{cases}$ 18. $f(x)=\begin{cases} 2, & x<-2; \\ |x|, & |x|<2; \\ \dfrac{1}{x-2}, & x>2. \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, & x<-1; \\ |x|, & -1\le x\le 1; \\ 1-x^2, & x>1. \end{cases}$ 20. $f(x)=\begin{cases} |x|, & x\le 2; \\ \lg(x-2), & x>2. \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} 4^x, & x<1; \\ 5-x^2, & 1<x\le 4; \\ \lg(x-4), & x>4. \end{cases}$ 22. $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<5; \\ 3x+4, & x\ge 5. \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} -1, & x\le -\pi/2; \\ \operatorname{tg} x, & -\pi/2<x<0; \\ x, & x>0. \end{cases}$ 24. $f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x, & x<0; \\ x+1, & 0<x\le 3; \\ \lg(x-3), & x>3. \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x<0; \\ \cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 26. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, & x<-2; \\ |x|, & |x|<2; \quad 5 \\ x, & x>2. \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} x^2-x, & x<1; \\ 2-x, 1<x\le 4; \\ \dfrac{1}{x-4}, & x>4. \end{cases}$ 28. $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x\le 3; \\ 8x-x^2-15, 3<x\le 5; \\ 2x-12, & x>5. \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, x<1; \\ x+1, 1\le x<2; \\ 7-x^2, x>2. \end{cases}$ 30. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ 4x-x^2-3, 0<x\le 2; \\ 2x-4, & x>2. \end{cases}$

31. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, x<0; \\ 3x+1, 0\le x<2; \\ 4-x^2, x\ge 2. \end{cases}$ 32. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le -1; \\ x-x^2+2, -1<x\le 3; \\ \dfrac{1}{x-3}, & x>3. \end{cases}$

33. $f(x)=\begin{cases} -x^2, x<0; \\ x+1, 0\le x\le 2; \\ \ln(x-2), x>2. \end{cases}$ 34. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\le 2; \\ 4, & 2<x<3; \\ x+1, & x>3. \end{cases}$

35. $f(x)=\begin{cases} 2x, x<0; \\ x^2+1, 0\le x<2; \\ \ln(x-2), x>2. \end{cases}$ 36. $f(x)=\begin{cases} -x, x<1; \\ x^2+1, 1\le x<2; \\ \ln(x-1), x>2. \end{cases}$

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Дифференцирование функций одной переменной

Производная и ее геометрический смысл

Определение 1

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке (a,b) и пусть точка $x_0\in(a,b)$, а число Δx такое, что новая точка $x_0+\Delta x\in(a,b)$. *Приращением* Δy *функции* $f(x)$ в точке x_0 называется разность значений функции в точках $x_0+\Delta x$ и x_0, т.е.

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

При этом число Δx называется *приращением аргумента.*

Определение 2

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке (a,b) и пусть точка $x_0\in(a,b)$, а число Δx такое, что точка $x_0+\Delta x\in(a,b)$. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения приращения функции (Δy) к приращению аргумента (Δx) при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует и конечен.

Для производной используются обозначения $f'(x_0)$, или просто y'. Итак:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или, учитывая определение 1,

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 (рис. 5.1).

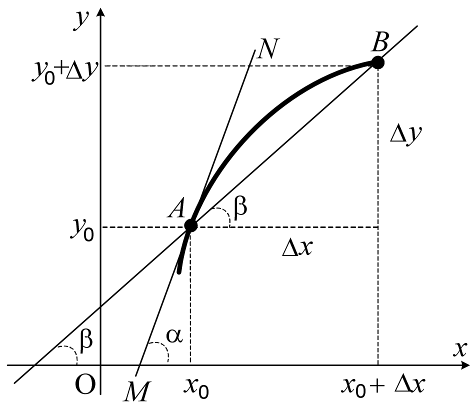


Рис. 5.1. Геометрический смысл производной

Определение 3

Если у функции $y = f(x)$ существует конечный

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется *производной в точке* $x_0 = 0$ *справа*.

Если у функции $y = f(x)$ существует конечный

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется *производной в точке* $x_0 = 0$ *слева.*

Производные справа и слева называются *односторонними* производными.

ЗАМЕЧАНИЕ

Для функции $y = |x|$ существуют и конечны односторонние производные. При этом производная справа равна 1, а производная слева равна -1 (рис. 5.2).

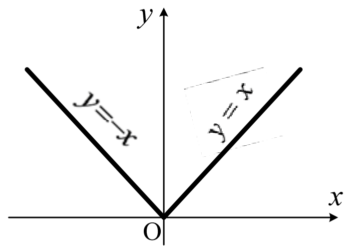


Рис. 5.2. График функции $y = |x|$

Правила дифференцирования

Теорема 1

Если функция $f(x)$ тождественно равна постоянной, то производная от нее тождественно равна нулю, то есть, если $f(x) \equiv c$, то $f'(x) \equiv 0$.

Теорема 2

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то функция $y = f(x) \pm g(x)$ тоже дифференцируема в точке x и ее производная вычисляется по правилу:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x).$$

Теорема 3

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то функция $y = f(x) \cdot g(x)$ тоже дифференцируема в точке x и ее производная вычисляется по правилу:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Следствие

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, а c – конечное число, то функция $y = c \cdot f(x)$ тоже дифференцируема в точке x и при этом

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Теорема 4

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x и $g(x) \neq 0$, то функция $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ тоже дифференцируема в точке x и ее производная вычисляется по правилу:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Теорема 5

Если функция $y(x)$ монотонна на промежутке $(a;b)$ и дифференцируема в точке $x \in (a;b)$, то существует обратная функция $x = x(y)$, которая дифференцируема в точке y и ее производная определяется из соотношения

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Теорема 6

Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x и функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = u(x)$, то суперпозиция функций (сложная функция) $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная по переменной x вычисляется по правилу:

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x,$$

при этом нижние индексы показывают, по какой переменной берется производная.

ЗАМЕЧАНИЕ

Правило дифференцирования суперпозиции функций (сложной функции) следует понимать так, что если требуется вычислить производную от функции $y = \sin^2 x$, то следует иметь в виду, что вычисляется производная суперпозиции функций $y = u^2$, где $u = \sin x$. Тогда следует вычислить производную $y'_u = \left(u^2\right)'_u = 2u$ и производную $u'_x = (\sin x)'_x = \cos x$. Далее по правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = 2u \cdot u'_x = 2\sin x \cdot \cos x .$$

Из теорем данного параграфа можно сформулировать следующие правила дифференцирования:

1. $(c)' = 0$.
2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$.
3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$.
5. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$.
6. $y'_x = \left(f(u(x))\right)'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Производные основных элементарных функций

Производные основных элементарных функций известны из школьного материала. Рассмотрим функции, которые в школьном курсе не изучались.

Гиперболических функции и их производные

Гиперболическими называются следующие функции:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ – *гиперболический синус;* $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ – *гиперболический косинус*; $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ – *гиперболический тангенс*; $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ – *гиперболический котангенс.*

Для гиперболических функций справедливы соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x; \quad 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x;$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1; \quad 1 + \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad 1 + \operatorname{cth}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Для производных гиперболических функций справедливы соотношения:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Доказательство

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}' x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{ch}' x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} =$$

$$\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

так как $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{th} x}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{th}^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Производные основных элементарных функций приведены в таблице 1.

Таблица 1. Производные основных элементарных функций

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	

При вычислении производных элементарных функций следует использовать таблицу производных и правила дифференцирования.

Например, функция $y = \sqrt{(\cos(3x-2))}$ является суперпозицией трех функций $y = u^{\frac{1}{2}}$, где $u = \cos(3x-2)$. Если использовать теорему 6, то:

$$y' = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \cdot u' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos(3x-2)\right)' \cdot (3x-2)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cos^{-\frac{1}{2}}(3x-2) \cdot \left(-\sin(3x-2)\right) \cdot 3$$

или

$$y' = -\frac{3\sin(3x-2)}{2\sqrt{\cos(3x-2)}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Производная степенной функции $y = \sqrt{x}$ очень часто встречается в задачах. Рекомендуем ее запомнить $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Производная степенной функции $y = \frac{1}{x}$ очень часто встречается в задачах. Рекомендуем ее запомнить $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Задача 5.1

Вычислите производную функции $y = \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{(3-2x)^2}$.

Решение

По правилу дифференцирования частного функций (теорема 4):

$$y' = \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{(3-2x)^2}\right)' = \frac{\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)' \cdot (3-2x)^2 - \sqrt{1+\sqrt[3]{x}} \cdot \left((3-2x)^2\right)'}{(3-2x)^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\left(\sqrt[3]{x}\right)' \cdot (3-2x)^2 - \sqrt{1+\sqrt[3]{x}} \cdot 2 \cdot (3-2x)(3-2x)'}{(3-2x)^4} =$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'\cdot(3-2x)^2-\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\cdot 2\cdot(3-2x)(3-2x)'}{(3-2x)^4}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot(3-2x)^2-\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\cdot 2\cdot(3-2x)(-2)}{(3-2x)^4}.$$

Задача 5.2

Вычислите производную функции

$$y=\ln(x^2+1)\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}-\operatorname{tg}^2 x.$$

Решение

По правилам дифференцирования произведения функций (теорема 3) и суммы функций (теорема 2):

$$y'=\left(\ln(x^2+1)\right)'\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}+\ln(x^2+1)\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}\right)'-\left(\operatorname{tg}^2 x\right)'=$$

$$=\frac{1}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}+\ln(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\left(\frac{x}{x-1}\right)'-$$

$$-2\operatorname{tg}x\cdot\left(\operatorname{tg}x\right)'=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}+$$

$$+\ln(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}-2\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2x}{x^2+1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1}-\ln(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-$$

$$-2\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Дифференциал. Формула дифференциала

Определение 4

Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, принадлежащей ее области определения и пусть Δx приращение аргумента x в точке x_0. *Дифференциалом* dy в точке x_0 называется число, определяемое формулой:

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Следует понимать, что дифференциал является функцией двух переменных x и Δx.

Например, значение дифференциала функции $f(x) = \ln(x+1)$ в точке $x_0 = 0$ при $\Delta x = 0{,}01$ вычисляется следующим образом:

$$f'(x) = (\ln(x+1))' = \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' = \frac{1}{x+1} \cdot 1 .$$

$$f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1 .$$

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}01 .$$

В произвольной точке x формула дифференциала имеет вид:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x .$$

Поскольку для функции $y = x$ в любой точке производная $f'(x) = 1$, то дифференциал для нее совпадает с ее приращением, то есть $dy = dx = \Delta x$. Учитывая это, формулу для дифференциала записывают в виде:

$$dy = f'(x) \cdot dx .$$

Из определения и формулы дифференциала следует, что при вычислении дифференциала справедливы правила, аналогичные правилам дифференцирования.

Правила дифференцирования

– $d(c) \equiv 0$, если $c = \text{const}$.

– $d\left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot d\left(f(x)\right)$, если $c = \text{const}$.

– $d\left(f(x) \pm g(x)\right) = d\left(f(x)\right) \pm d\left(g(x)\right)$.

– $d\left(f(x) \cdot g(x)\right) = d\left(f(x)\right) \cdot g(x) + f(x) \cdot d\left(g(x)\right)$.

– $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{d\left(f(x)\right) \cdot g(x) - f(x) \cdot d\left(g(x)\right)}{g^2(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Производные высших порядков

Определение 5

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точках x_0 и $x_0 + \Delta x$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *второй производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается y'' или $f''(x_0)$. При этом функция $y = f(x)$ называется *дважды дифференцируемой* в точке x_0.

Аналогично определяются производные более высокого порядка $f'''(x_0)$, $f^{iv}(x_0)$, …., $f^{(n)}(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ

Из определения производных высших порядков следует, что вторая производная – это производная от первой производной, третья производная – это производная от второй производной, и так далее.

Задача 5.3

Вычислить вторую производную y'' функции $y = \dfrac{x}{e^x}$ в произвольной точке x.

Решение

Сначала вычислим первую производную, используя правило дифференцирования частного двух функций:

$$y' = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1\cdot e^x - x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}.$$

Упростим это выражение $y' = \frac{e^x\cdot(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$ и вычислим вторую производную.

$$y'' = \left(\frac{1-x}{e^x}\right)' = \frac{(1-x)' e^x - (1-x)\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} = \frac{-e^x - (1-x)\cdot e^x}{e^{2x}}.$$

Полученное выражение можно упростить.

$$y'' = \frac{-e^x(1+1-x)}{e^{2x}} = \frac{-(2-x)}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}.$$

Дифференциалы высших порядков

Определение 6

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x. *Дифференциалом второго порядка* от функции $f(x)$ или *вторым дифференциалом* в точке x называется дифференциал от ее первого дифференциала $d(dy)$. Второй дифференциал обозначается d^2y.

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка d^3y, четвертого порядка d^4y, и так далее.

Формула второго дифференциала

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и x независимая переменная, то формула для второго дифференциала имеет вид:

$$d^2y = f''(x)\cdot(dx)^2.$$

Аналогично, если x независимая переменная, то формула для дифференциала n –го порядка имеет вид:

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot (dx)^n .$$

Например, дифференциал второго порядка для функции $y = e^{\sin x}$ вычисляется следующим образом.

Вычислим первую производную: $y' = e^{\sin x} \cdot \cos x$. Затем, вычислив вторую производную

$$y'' = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x),$$

проведем в полученном выражении все упрощения $y'' = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right)$. Используя формулу второго дифференциала $d^2 y = y'' \cdot (dx)^2$, запишем второй дифференциал в виде:

$$d^2 y = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right) \cdot (dx)^2 .$$

Правила Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и если выполняется условие $f(x_0) = g(x_0) = 0$, причем $f'(x_0) \neq 0$ или $g'(x_0) \neq 0$, то существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Можно доказать правило Лопиталя в общем виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Это замечание позволяет применять правило Лопиталя несколько раз, то есть для дважды дифференцируемых в окрестности $U_\delta(x_0)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ предел их отношения равен:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)} ,$$

в том случае, когда $f''(x_0) \neq 0$ или $g''(x_0) \neq 0$.

Если же $f''(x_0) = g''(x_0) = 0$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ – трижды дифференцируемы в окрестности $U_\delta(x_0)$, то правило применяется еще раз, и так далее, до тех пор, пока не устранится неопределенность.

Задача 5.4.a

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + e^{-x} - 1}{x^2}$, используя правило Лопиталя.

Решение

Используем правило Лопиталя три раза:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + e^{-x} - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x}}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Правило Лопиталя справедливо и в том случае, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

Задача 5.4.b

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$, используя правило Лопиталя.

Решение

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x}.$$

Поскольку $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Задача 5.4.c

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}3x}$, используя правило Лопиталя.

Решение

$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}3x} = \left[0^0\right]$. Такой вид неопределенности раскрывается с помощью основного логарифмического тождества $a = e^{\ln a}$. Представим сложно–показательную функцию под знаком предела в виде:

$$(\sin x)^{\operatorname{tg}3x} = \left(e^{\ln(\sin x)}\right)^{\operatorname{tg}3x} = e^{\ln(\sin x)\cdot\operatorname{tg}3x}.$$

Затем вычислим предел показателя

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}3x\cdot\ln(\sin x)\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-\frac{3}{\sin^2 3x}} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x\cdot\cos x}{\sin x}.$$

$\cos x \underset{x\to 0}{\to} 1$, а бесконечно малые при $x\to 0$ функции $\sin^2 3x$ и $\sin x$ можно заменить под знаком предела эквивалентными бесконечно малыми функциями $(3x)^2$ и x. Учитывая это, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}3x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2\cdot 1}{x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{x} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}(9x) = 0.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}3x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\sin x\cdot\operatorname{tg}3x} = e^0 = 1$.

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной на замкнутом промежутке функции

Функция, непрерывная на замкнутом промежутке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Эти значения могут достигаться в точках, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)=\infty$, а также на концах промежутка.

Для функции, график которой показан на рисунке 5.3, точками, в которых может достигаться наименьшее или наибольшее значения, являются точки:

1. x_1 и x_2 – в этих точках $f'(x)=\infty$ (касательная перпендикулярна оси Ox).
2. x_3 – в этой точке $f'(x)=0$, точка минимума (касательная параллельна оси Ox).
3. $x=a$ и $x=b$ – концы промежутка.

Из рисунка ясно, что функция достигает наибольшего значения на левом конце промежутка в точке $x=a$ и наименьшего – в точке минимума x_3.

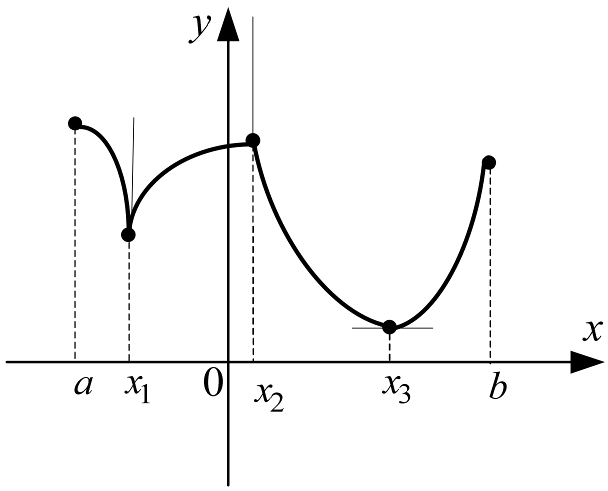


Рис. 5.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

ЗАМЕЧАНИЕ

Точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)=\infty$, называются «подозрительными на экстремум» или критическими.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a;b]$, нужно:

– найти все ее критические точки;

– вычислить значения функции во всех критических точках;

– вычислить значения $f(a)$ и $f(b)$;

– среди полученных чисел найти самое большое и самое маленькое.

Задача 5.5

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{x^2}$ на промежутке $[-8,8]$.

Решение

Заданная функция непрерывна на всей числовой оси. Производная функции равна

$$f'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Производная $f'(x)=0$ при $x=\pm1$ и производная $f'(x)=\infty$ при $x=0$. Вычислим значения функции в этих точках: $f(\pm1)=-\frac{2}{3}$. $f(0)=0$. Значения функции на концах заданного промежутка равны: $f(\pm8)=17\frac{1}{3}$. Следовательно, наибольшее значение функции равно $17\frac{1}{3}$ при $x=\pm8$, наименьшее значение функции равно $-\frac{2}{3}$ при $x=\pm1$.

5.2. Дифференцирование функций двух и нескольких переменных

Дифференцирование функции двух переменных

Если функция $z=f(x,y)$ определена на множестве D точек плоскости и точка $M_0(x_0,y_0)\in D$, то частной производной функции $z=f(x,y)$ по переменной x в точке M_0 называется предел:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

а частной производной функции $z=f(x,y)$ по переменной y в точке M_0 называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

если эти пределы существует и конечны.

ЗАМЕЧАНИЕ

Из определения следует, что при дифференцировании функции двух переменных по переменной x следует считать y постоянной. При дифференцировании функции двух переменных по переменной y постоянной следует считать x. Все правила дифференцирования, а также таблица производных при этом остаются справедливыми.

Например, для функции $z=x^y$, являющейся степенной относительно переменной x и показательной относительно переменной y, частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\cdot\ln x.$$

Задача 5.6

Вычислить частные производные функции двух переменных $\dfrac{1-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Решение

По правилу дифференцирования частного двух функций и по таблице производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(1-xy)'_x\cdot\sqrt{x^2+y^2}-(1-xy)\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{-y\sqrt{x^2+y^2}-(1-xy)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{-y\sqrt{x^2+y^2}-(1-xy)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-y\left(x^2+y^2\right)-(1-xy)\cdot x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=$$

$$=\frac{-yx^2-y^3-x+x^2y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=-\frac{y^3+x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}},$$

или после упрощений

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\cdot\left(x^2+y^2\right)+(1-xy)\cdot x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=-\frac{y\cdot x^2+y^3+x-x^2y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}=$$

$$=-\frac{y^3+x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}.$$

Поскольку переменные x и y входят в аналитическое выражение функции симметрично, то частную производную по переменной y можно получить, заменяя в частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ x на y, а y на x, т.е. $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+x^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$.

Дифференцирование функции нескольких переменных

Аналогично определяются и вычисляются частные производные функций трех и более переменных.

Например, частные производные функции трех переменных $w=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+x^2yz$ имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{y}(x)'+0+\left(x^2\right)'yz=\frac{1}{y}+2xyz,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' + \frac{1}{z}(y)' + x^2(y)'z = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} + x^2 z,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 + y \cdot \left(\frac{1}{z}\right)' + x^2 y \cdot (z)' = -\frac{y}{z^2} + x^2 y.$$

Дифференциал функций двух и нескольких переменных

Дифференциал функции двух переменных $z = f(x, y)$, имеющей в точке $M_0(x_0, y_0)$ конечные частные производные имеет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y,$$

где $\Delta x, \Delta y$ – приращения аргументов x и y.

Поскольку $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$ для независимых переменных x и y, то дифференциал функции двух переменных, вычисленный в произвольной точке (x, y), записывается в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \cdot dy.$$

Если функция n переменных $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет конечные частные производные в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ из ее области определения, то *дифференциалом функции* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке M_0 и называется число dw, которое определяется формулой:

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(M_0) \cdot \Delta x_i$$

или

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot dx_i$$

для независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ в произвольной точке $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $v = g(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функции n переменных, то при вычислении дифференциалов справедливы следующие правила:

1. $d(c \cdot u) = c \cdot du$, где $c = const$;
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3. $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$;
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u \cdot dv - v \cdot du}{v^2}$;
5. $df(v) = f'_v \cdot dv$.

Эти правила удобно использовать при вычислении дифференциалов сложных функций. *Например*, дифференциал функции трех переменных $u = 3^{xyz}$ имеет вид:

$$du = \left(3^{xyz}\right)'_{xyz} \cdot d(xyz) = 3^{xyz} \cdot \ln 3 \cdot (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz).$$

Производные высших порядков

Пусть функция $f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ имеет частные производные в точке $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0\right)$ из ее области определения. Будем называть их частными производными первого порядка. Так как они являются функциями тех же переменных, что и данная функция, то у каждой из них могут существовать частные производные по любому из этих аргументов.

Полученные таким образом частные производные называются частными производными второго порядка.

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ можно составить четыре частных производных второго порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{y^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=z''_{xy}\,;\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=z''_{yx}\,.$$

Аналогично даются строгие определения для остальных частных производных второго порядка. Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка, и.т.д.

Задача 5.7

Вычислить все частные производные второго порядка для функции $z=x\cdot y^2+\cos(xy)$.

Решение

Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2-\sin(xy)\cdot y;\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy-\sin(xy)\cdot x\,.$$

Частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\cos(xy)\cdot y^2;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x-\sin(xy)\cdot x^2\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2y-\cos(xy)\cdot xy-\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=2y-\cos(xy)\cdot yx-\sin(xy).$$

Из решения задачи ясно, что так называемые смешанные производные равны, т.е. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема

Если функция $z=f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, причем смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Дифференциалы высших порядков

Рассматривая первый дифференциал

$$dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot dx_i$$

как функцию переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ при фиксированных $dx_1, dx_2, ..., dx_n$, определяют *дифференциал второго порядка* или *второй дифференциал*, как дифференциал от ее первого дифференциала. Второй дифференциал обозначают $d^2 w$, для него справедлива формула:

$$d^2 w = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot dx_i \cdot dx_j .$$

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$, учитывая независимость частных производных от порядка дифференцирования в точках их непрерывности, справедливо:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot (dx)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot (dy)^2 .$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Дифференциал третьего порядка или третий дифференциал – это дифференциал от второго дифференциала, и так далее. При этом важно понимать, что для существования дифференциала n –го порядка функция должна иметь дифференцируемые частные производные по всем переменным до производных $(n-1)$-го порядка. Такие функции называются n раз дифференцируемыми.

Легко показать, что для функции двух переменных $z = f(x, y)$ формула для третьего дифференциала имеет вид:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \cdot (dx)^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \cdot (dx)^2 dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \cdot dx(dy)^2 +$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \cdot (dy)^3 .$$

Например, третий дифференциал $d^3 z$ функции $z = \cos(x - 5y)$ вычисляется следующим образом:

Первый дифференциал $dz = -\sin(x - 5y) \cdot (dx - 5\,dy)$. Поскольку выражение $dx - 5dy$ не зависит от переменных x и y, то второй дифференциал имеет вид $d^2 z = -\cos(x - 5y) \cdot (dx - 5dy)^2$, а третий дифференциал

$$d^3 z = \sin(x - 5y) \cdot (dx - 5dy)^3 \text{ или}$$

$$d^3z = \sin(x-5y)\cdot\left((dx)^3 - 15(dx)^2 dy + 75dx(dy)^2 - 125(dy)^3\right).$$

Формулы для второго дифференциала функции двух переменных $z = f(x, y)$ удобно записывать в символическом виде:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^2 z ,$$

где под записью $\frac{\partial}{\partial x}$ понимается операция взятия частной производной по переменной x, а под записью $\frac{\partial}{\partial y}$ понимается операция взятия частной производной по переменной y.

В общем случае для дифференциала n – го порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$ справедлива формула:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^n z .$$

Задача 5.8

Найти первый и второй дифференциал функции

$w = x^3 z + y^2 z^2 + z e^{xy}$.

Решение

Формула первого дифференциала:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz .$$

Поскольку

$\frac{\partial w}{\partial x} = 3x^2 z + z e^{xy} y$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2yz^2 + z e^{xy} x$, $\frac{\partial w}{\partial z} = x^3 + 2y^2 z + e^{xy}$,

то

$dw = \left(3x^2 z + z e^{xy} y\right)dx + \left(2yz^2 + z e^{xy} x\right)dy + \left(x^3 + 2y^2 z + e^{xy}\right)dz$.

Формула второго дифференциала:

$$d^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(dz)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} dydz .$$

Вычислим вторые производные:

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6xz + z e^{xy} y^2$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2z^2 + z e^{xy} x^2$, $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2y^2$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = ze^{xy}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 3x^2 + e^{xy} y, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 4yz + xe^{xy}.$$

Поэтому:

$$d^2 w = \left(6xz + ze^{xy} y^2\right)(dx)^2 + \left(2z^2 + ze^{xy} x^2\right)(dy)^2 + 2y^2 (dz)^2 +$$
$$+ 2ze^{xy} dxdy + 2\left(3x^2 + e^{xy} y\right)dxdz + 2\left(4yz + xe^{xy}\right)dydz.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4

Задача 1. Вычислите производную заданной функции

1. $y = \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}$.

2. $y = \dfrac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$.

3. $y = 3\,\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(x-2)^2}$.5.

4. $y = 3\,\dfrac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{x+1}$.

5. $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$.

6. $y = \dfrac{\sqrt[3]{3x^5 - 2x}}{x+7}$.

7. $y = \dfrac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.

8. $y = \dfrac{4 + 3x^3}{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.

9. $y = \dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

10. $y = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

11. $y = \dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

12. $y = \dfrac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{8-x^3}}$.

13. $y = \dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

14. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{2x+1}$.

15. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x^4}}{4x+5}$.

16. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x^3+3}$.

17. $y=\dfrac{2x^4+x^2}{\sqrt{1-x^3}}$.

18. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x+2}$.

19. $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+x^2}$.

20. $y=\dfrac{2\sqrt{2x+3}}{x^2}$.

21. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{4x^2}$.

22. $y=\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

23. $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+5}}$.

24. $y=\dfrac{1-x^2}{\sqrt[5]{x^3+2x}}$.

25. $y=\dfrac{\sqrt{2-x^5}}{5x^2-2x}$.

26. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

27. $y=\dfrac{\sqrt{2x^2+x^5}}{x^3-5x}$.

28. $y=\dfrac{\sqrt{x^3-3x}}{\sqrt{x^3}+x}$.

29. $y=\dfrac{x^4-3x+5}{\sqrt{x}-4}$.

30. $y=\dfrac{1+x^{\frac{3}{4}}}{(1-3x)^2}$.

31. $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^3-2}$.

32. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

33. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x^2-x}$.

34. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+3x^3}}{\sqrt{x}+2}$.

35. $y=\dfrac{x^3-x+2}{\sqrt{x^3}+x}$.

36. $y=\dfrac{1+x^{\frac{3}{4}}}{(1-3x)^2}$.

Задача 2. Вычислите производную заданной функции

1. $y=(6x+5)\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}-x$.

2. $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$.

3. $y=\ln(\operatorname{tg}x+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x})$.

4. $y=\operatorname{arctg}x+\dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+4}$.

5. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x}$.

6. $y=6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{6+x}{2}$.

7. $y=\arcsin\sqrt{x+1}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

8. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

9. $y=\dfrac{x}{4}\sqrt{x-x^2}+\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{3}$.

10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{2x+3}$.

11. $y=\dfrac{4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{4}{x}$.

12. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{6x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

13. $y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

14. $y=\dfrac{3e^{\operatorname{ctg}^2 x}}{\sqrt{x}}+2\sin^2 x$.

15. $y=3^{\cos^2 2x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+\operatorname{tg}3x$.

16. $y=\sqrt{x}\cdot e^{\cos x}-\dfrac{\ln(1+x)}{2-x}$.

17. $y=e^{\operatorname{tg}2x}-\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

18. $y=\ln\left(\sqrt{x}-2^{x^2}\right)-3^{\sin x}$.

19. $y=\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\sin^2 x$.

20. $y=\operatorname{tg}^3 x-\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

21. $y=\sqrt{5x-x^2}+\arcsin\sqrt{\dfrac{x-1}{3}}$.

22. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}3x}{\sqrt{x}}-3^{\arccos\sqrt{x}}$.

23. $y=e^{\cos 2x}+\arcsin\sqrt{x}$.

24. $y=\dfrac{\arccos x}{2x^2}-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

25. $y=\sqrt{8x-x^2}-9\arccos\sqrt{x}$.

26. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\ln\dfrac{1-x^3}{\sqrt{2x+1}}$.

27. $y = e^{-\operatorname{tg} 3x} \cdot \arccos \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

28. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} + \dfrac{1}{3x\sqrt{x}}$.

29. $y = \sqrt{x(2-x)} + \cos^2 \sqrt{\frac{x}{2}}$.

30. $y = \dfrac{2\cos x}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} - \log_3^2 (x+1)$.

31. $y = e^{-\operatorname{tg} 3x} \cdot \arccos (x+2)$.

32. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

33. $y = e^{-2x} \sqrt{x} + \arccos \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

34. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}} - \log_5^2 (x+1)$.

35. $y = 3^{3x} \cdot \sqrt{x^3} - \arccos (x+3)$.

36. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln \dfrac{x^3 + 3}{\sqrt{x+2}}$.

Задача 3. Найдите вторую производную заданной функции

1. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$.

2. $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 1}$.

3. $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$.

4. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

5. $y = \arcsin \sqrt{x}$.

6. $y = \ln\left(x^2 + 1 \right)$.

7. $y = \dfrac{x^2}{x - 3}$.

8. $y = \dfrac{2 - x^2}{x + 1}$.

9. $y = x e^{-x}$.

10. $y = x \operatorname{arctg} x$.

11. $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

12. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

13. $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

14. $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

15. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

16. $y = e^{2x} \sin 3x$.

17. $y=e^{-x}\cos 2x$.

18. $y=\left(x^2+5\right)\ln\left(x^2+5\right)$.

19. $y=xe^{3x}$.

20. $y=\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x$.

21. $y=\dfrac{2x}{x^2+4}$.

22. $y=\dfrac{x^2+1}{x+3}$.

23. $y=xe^{-x^2}$.

24. $y=\ln^2(x+1)$.

25. $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.

26. $y=\dfrac{x^2}{x+5}$.

27. $y=\sin^3 x$.

28. $y=\operatorname{arctg}^2 x$.

29. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

30. $y=x\ln\left(1+x^2\right)$.

31. $y=\sin^2 4x$.

32. $y=\operatorname{arctg}(x+2)$.

33. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

34. $y=xe^{-2x^2}$.

35. $y=x^2\cdot\ln x$.

36. $y=x^2e^{-x}$.

Задача 4. Вычислите предел, используя правило Лопиталя

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}-4x}{x-\sin x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{1-\cos 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\cos x-x}{\ln(1+x)-x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$.

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{ctg} x-1}{\sin 4x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln\left(x^2-x\right)}{\ln\left(3^x-3\right)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\ln\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\ln\sin 2\pi x}{\ln \operatorname{tg} \pi x}$.

9. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln\sin 2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\sin x}{\ln(1+\cos x)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x-1{,}5x^2}{\sin x - x}$.

12. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{1+\cos 3x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\ln\left(1+x^2\right)-x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\pi}{2\arcsin\frac{x}{2}-\pi}$.

15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\arccos\frac{x}{2}}{2\arcsin\frac{x}{2}-\pi}$.

16. $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{\cos x \ln(x-3)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}+\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

18. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln(x+3)}{\ln\left(x^2+x\right)}$.

19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x\ln x}$.

20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{\ln\left(x^2+2\right)}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1+0} \ln x\cdot\ln(x-1)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^{2\cos x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{arctg} 2x)^{2\sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to \pi} (\operatorname{ctg} x)^{\pi-x}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} (1-\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} (2\sin x)^{\frac{2}{\ln x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{3}{x}}$.

30. $\lim\limits_{x\to0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

31. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin\pi x}{1+\cos\frac{\pi x}{2}}$.

32. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{6}}{\sin\left(e^x-e^3\right)}$.

33. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

34. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(2x^2+1\right)}{\ln\left(3x^2+4\right)}$.

35. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}$.

36. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+x\right)}{\ln\left(3x^2+2\right)}$.

Задача 5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

1. $y=\sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $x\in[-3,4]$.

2. $y=\dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$, $x\in[-3,3]$.

3. $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$, $x\in[-1,5]$.

4. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$, $x\in[0,1]$.

5. $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$, $x\in[2,4]$.

6. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$, $x\in[-1,6]$.

7. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $x\in[-2,1]$.

8. $y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13$ $x\in[2,5]$.

9. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, $x\in[0,4]$.

10. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$, $x\in[-4,-1]$.

11. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $x\in[1,5]$.

12. $y=\frac{x^2}{2}+2x+\frac{8}{x-2}+5$, $x\in[-2,1]$.

13. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$, $x\in[-1;3]$.

14. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\in[0;4]$.

15. $y=x+2\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$.

16. $y=x^4-2x^2+5$, $x\in[-2;2]$.

17. $y=\sqrt[3]{100-x^2}$, $x\in[-6;8]$.

18. $y=\dfrac{10x}{1+x^2}$, $x\in[0;3]$.

19. $y=-\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$, $x\in[-5,1]$.

20. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$, $x\in[-4,2]$.

21. $y=x-4\sqrt{x+2}+8$, $x\in[-1,7]$.

22. $y=2\sqrt{x-1}-x+2$, $x\in[1,5]$.

23. $y=\dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$, $x\in[-2,\ 1]$.

24. $y=\dfrac{2\left(-x^2+7x-7\right)}{x^2-2x+2}$, $x\in[1,4]$.

25. $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$, $x\in[-1,2]$.

26. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$, $x\in[-3,3]$.

27. $y=x-4\sqrt{x}+5$, $x\in[1,9]$.

28. $y=2\sqrt{x}-x$, $x\in[0,4]$.

29. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$, $x\in[0,6]$.

30. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$, $x\in[1,4]$.

31. $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$, $x\in[-1,5]$.

32. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\in[0,4]$.

33. $y=-3x^4+6x^2-1$, $x\in[-2,2]$.

34. $y=x^3-3x+3$, $x\in[-3;1{,}5]$.

35. $y=\sin 2x-x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

36. $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$, $x\in[-1,2]$.

Задача 6. Вычислите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ **.**

1. $z=\cos\left(x^2y^2\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2y)$.

2. $z=e^{2x}-\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{y}}$.

3. $z=\ln(y-x)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

4. $z=\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}-\arcsin\sqrt{x}$.

5. $z=e^{xy^2}+\arcsin\sqrt{xy}$.

6. $z=\cos xy+\operatorname{arctg}\sqrt{xy}$.

7. $z=\operatorname{arctg}(xy)+\cos\frac{x}{y}$.

8. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)+\sin\frac{x}{y}$.

9. $z=\ln\sqrt{y-x}-\operatorname{arctg}\frac{y}{2x}$.

10. $z=3^{xy}+\arccos\sqrt{xy}$.

11. $z=5^{xy}+\arccos\left(xy^2\right)$.

12. $z=\sin\frac{x}{y}-\ln(x\sqrt{y})$.

13. $z=\sqrt{x^3y}-\arccos(x-2y)$.

14. $z=\operatorname{tg}\frac{y}{x}-\frac{1}{4}\sqrt{xy}$.

15. $z=x^3+\arccos\frac{\sqrt{y}}{x}$.

16. $z=\ln(x-y)+\operatorname{tg}(xy)$.

17. $z=\operatorname{tg}\sqrt{xy}-x\cdot 4^{2y^2}$.

18. $z=\cos(xy)-x^2\operatorname{tg}y$.

19. $z=\operatorname{tg}(1-xy)-\arcsin(xy)$.

20. $z=\operatorname{tg}\frac{y}{x}+3^{y^2}\operatorname{arctg}x$.

21. $z=x-\sqrt{xy}-\operatorname{arctg}(xy)$.

22. $z=\operatorname{ctg}\frac{y}{x}+\sqrt{x}\operatorname{arctg}y$.

23. $z=\sin\frac{y}{x}+y^3\operatorname{arctg}x$.

24. $z=\operatorname{tg}\left(xy^2\right)-y\operatorname{arctg}x$

25. $z=\operatorname{tg}\left(x^2y\right)-y^3\arccos x$.

26. $z=\operatorname{tg}(xy)+\sqrt{y}\sin x$.

27. $z=\operatorname{ctg}\frac{y}{x}-\frac{\arcsin y}{x^2}$.

28. $z=\cos(yx)+x\operatorname{arctg}y$.

29. $z=\cos(xy)-\operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}$.

30. $z=x\ln y+\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{x}}$.

31. $z=\sin\left(x+y^2\right)-y\sqrt{x}$.

32. $z=\operatorname{tg}\frac{y}{x}+\sqrt{x}\cdot e^{2y}$.

33. $z=\operatorname{ctg}(xy)-x^2\sqrt{x+y}$.

35. $z=\sin(yx)+\ln^2\dfrac{x}{\sqrt{y}}$.

35. $z=\cos(xy)-\ln\left(x^2+y^2\right)$.

36. $z=\ln(x+y)+\operatorname{tg}\dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

Задача 7. Вычислите все частные производные второго порядка для функции $u(x,\ y)$

1. $u=(x+y)e^{x+y}$.

2. $u=(x+2y)e^{x-y}$.

3. $u=x^4y^5+\frac{x}{y}$.

4. $u=y\sin(2x-y)$.

5. $u=x^2e^{xy}$.

6. $u=e^{x-y}\cdot x$.

7. $u=(x-2y)\sin(xy)$.

8. $u=\sin^2(x-2y)$.

9. $u=\cos(x-y)x$.

10. $u=\frac{x}{y}$.

11. $u=\frac{y^2}{3x}$.

12. $u=\frac{x}{x-y}$.

13. $u=e^{x^2+y^2}$.

14. $u=(x-y)e^{x^2+y}$.

15. $u=e^{x-y}\left(x-2y^2\right)$.

16. $u=\cos^2(x-2y)$.

17. $u=xy^6-\cos(x^4y^3)$.

18. $u=\sin^2(3x+y)$.

19. $u=(x+y)e^{\frac{x}{y}}$.

20. $u=(x+y)e^{\frac{2y}{x}}$.

21. $u=(x-y)e^{\frac{x}{y}}$.

22. $u=\frac{2x}{y-1}$.

23. $u=\sin\left(\frac{x}{y}\right)\left(x^2+y^2\right)$.

24. $u=\cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(x^2-y^2\right)$.

25. $u=(2x+y)\cos(xy)$.

26. $u=3xy\sin(x-y)$.

27. $u = y\ln(x+y)$.

28. $u = e^{2x-3y}(x-4y)$.

29. $u = \frac{1}{3}\sin^2(xy)$.

30. $u = \frac{y}{x} + x^4\sqrt{y}$.

31. $u = (x^2+y^2)\sin(xy)$.

32. $u = x^2 y\sin(x+2y)$.

33. $u = y^2\ln(x-y)$.

34. $u = e^{xy}(x^2-y^2)$.

35. $u = \frac{1}{2}\cos^2(xy)$.

36. $u = \dfrac{y}{\sqrt{x}} + \dfrac{y^2}{x}$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 1 – 3, М., изд. Дрофа, 2004.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике. М., Физматлит, 2001.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М., Физматлит, 2005.

Дополнительная литература

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, ч. 1 – М, Айрис-пресс, 2006.
5. Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты. СПб, Питер, 2009.

ОГЛАВЛЕНИЕ