

РГЗ по теме "Дифференциальные уравнения"

Задача 1.

Задание: Дано дифференциальное уравнение: $y' = \varphi(x, y)$.
С помощью изоклин начертить (приближенно) решение этого ДУ.

Теория.

Решение уравнения $y' = \varphi(x, y)$, проходящее через точку (x_0, y_0) , должно иметь в этой точке производную, равную $\varphi(x_0, y_0)$, т.е. иметь касательную, тангенс угла наклона которой к оси Ox в этой точке равен $\varphi(x_0, y_0)$.

Изоклиной называется геометрическое место точек плоскости Oxy , в которых наклон касательных к решениям ДУ один и тот же. Уравнение изоклины имеет вид $\varphi(x, y) = C$, где C — постоянная. Отметив на плоскости Oxy углы наклона касательной вдоль изоклин, получаем **поле направлений**, с помощью которого можно приближенно построить **интегральные кривые** (т.е. графики решений данного ДУ).

Пример решения задачи.

$$y' + y = x^2.$$

Выразим производную: $y' = x^2 - y$.

Найдем геометрическое место точек, где производная сохраняет постоянное значение: $y' = C \Leftrightarrow x^2 - y = C$. Таким образом, **изоклинами** данного ДУ будут параболы $y = x^2 - C$. Построим изоклины для $C = 0, \pm 1, \pm 2$ (рис.1).

Отметим на каждой изоклине угол наклона касательной к интегральной кривой: $\operatorname{tg} \alpha = -2$ на параболе $y = x^2 + 2$; $\operatorname{tg} \alpha = -1$ на $y = x^2 + 1$ и т.д. (рис.2).

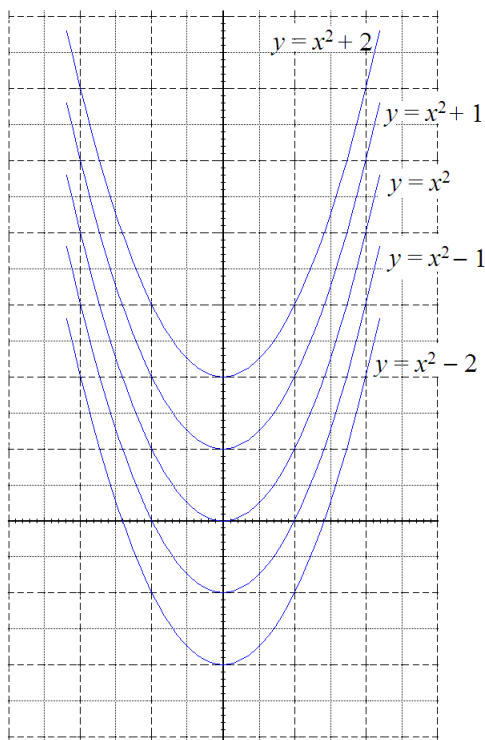


Рис.1. Изоклины

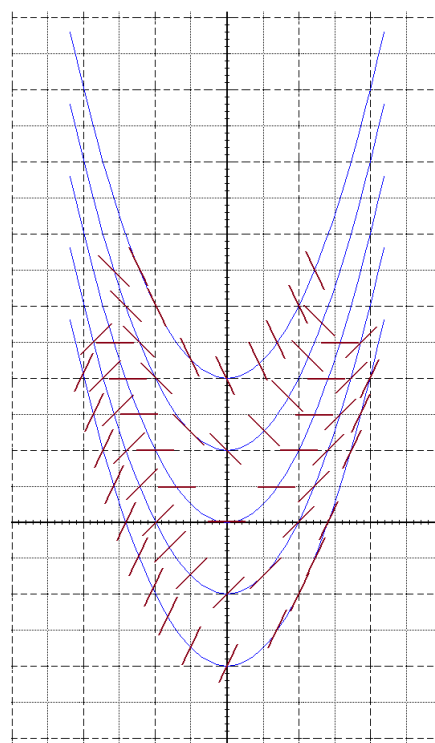


Рис.2. Поле направлений

Теперь построим (схематично) несколько кривых, которые в точках пересечения с изоклинами имеют соответствующие углы наклона касательных (рис.3).

Примечание. В работе достаточно нарисовать только итоговый рисунок.

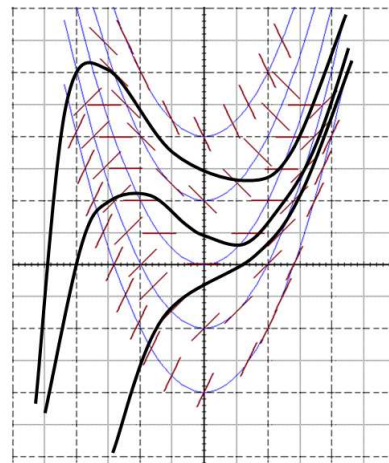


Рис.3. Интегральные кривые

Варианты.

1. $2(y + y') = x + 3.$

2. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2} - 1.$

3. $xy' = 2y.$

4. $(y^2 + 1)y' = y - x.$

5. $yy' + x = 0.$

6. $(x^2 + y^2)y' + 4y = 0.$

7. $y + y' = (x - y')^3.$

8. $xy' + y = 0.$

9. $y' = \frac{y}{x + y}.$

10. $y' = x - e^y.$

11. $(x^2 + y^2)y' = 4x.$

12. $y' = y - \ln x.$

13. $x^2 + y^2 + 6xy' = 0.$

14. $y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}.$

15. $(x^2 + y^2)y' = 6y.$

16. $2y + y' = x + 1.$

17. $(x^2 + y^2)y' + 2x = 0.$

18. $2y' = x^2 + y^2.$

19. $xy' = 3y - 2.$

20. $(y^2 + 1)y' = x - y.$

21. $yy' - 2x = 0.$

22. $y + y' = (x + y')^2.$

23. $xy' + 3y = 0.$

24. $y' = \frac{y}{x - y}.$

25. $y' = x + e^y.$

26. $x^2 - y^2y' = 1.$

27. $(x^2 + y^2)y' = 4x.$

28. $x^2 + y^2 + 6xy' = 0.$

29. $y' = \frac{y - 2x}{x + 2y}.$

30. $x^2 + y^2 + 2yy' = 0.$