ТЕМА 7 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

Задача 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
3. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$
4. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$
5. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx$
6. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$
7. $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$
8. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$
9. $6xdx - 6ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$
10. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$
11. $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$
12. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$
13. $2xdx - 2ydy = x^2 dy - 2xy^2 dx$
14. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$
15. $(e^x+8)dy - ye^x dx = 0$
16. $\sqrt{5+y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$
17. $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$
18. $y\ln y + xy' = 0$
19. $(1+e^x)y' = ye^x$
20. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$

Задача 2.

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения:

1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$
2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$
3. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$
4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$
5. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$
6. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$
7. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$
8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$

9. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$

10. $xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$

11. $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$

12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$

13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$

14. $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$

15. $y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$

16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$

17. $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$

18. $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$

19. $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$

20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

Задача 3.

Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка методом Лагранжа или Бернулли:

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2$; $y(1) = 0$
2. $y' - y \cdot \mathrm{ctg} x = 2x \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$; $y(0) = 0$
4. $y' + y \cdot \mathrm{tg} x = \cos^2 x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$; $y(-1) = \frac{3}{2}$
6. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1)$; $y(0) = 1$
7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$; $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$; $y(1) = 1$
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$; $y(0) = \frac{2}{3}$
11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5$; $y(2) = 4$
12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x$; $y(1) = e$
13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$; $y(1) = 1$

14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$; $y(1) = 4$

15. $y' + \frac{2}{x} y = x^3$; $y(1) = -\frac{5}{6}$

16. $y' + \frac{y}{x} = 3x$; $y(1) = 1$

17. $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$; $y(1) = 3$

18. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$; $y(1) = 1$

19. $y' + \frac{3}{x} y = \frac{2}{x^3}$; $y(1) = 1$

20. $y' + 2xy = -2x^3$; $y(1) = e^{-1}$

Задача 4.

Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения первого порядка методом Лагранжа или Бернулли, выбрав предварительно какая переменная x или y более удобна как аргумент, а какая как функция:

1. $y^2 dx + \left(x + e^{\frac{2}{y}} \right) dy = 0$; $y\big|_{x=e} = 2$
2. $\left(y^4 e^y + 2x \right) y' = y$, $y\big|_{x=0} = 1$
3. $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$, $y\big|_{x=1} = e$
4. $2\left(4y^2 + 4y - x \right) y' = 1$, $y\big|_{x=0} = 0$
5. $\left(\cos 2y \cos^2 y - x \right) y' = \sin y \cos y$, $y\big|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{3}$
6. $(x \cos^2 y - y^2) y' = y \cos^2 y$; $y\big|_{x=\pi} = \frac{\pi}{4}$
7. $e^{y^2} (dx - 2xydy) = ydy$, $y\big|_{x=0} = 0$
8. $(104y^3 - x) y' = 4y$, $y\big|_{x=8} = 1$
9. $dx + (xy - y^3) dy = 0$; $y\big|_{x=-1} = 0$
10. $(3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x) y' = y$; $y\big|_{x=16} = \frac{\pi}{4}$
11. $8(4y^3 + xy - y) y' = 1$; $y\big|_{x=0} = 0$
12. $(2 \ln y - \ln^2 y) dy = ydx - xdy$; $y\big|_{x=4} = e^2$
13. $2(x + y^4) y' = y$; $y\big|_{x=-2} = -1$
14. $y^3 (y-1) dx + 3xy^2 (y-1) dy = (y+2) dy$; $y\big|_{x=\frac{1}{4}} = 2$
15. $2y^2 dx + (x + e^{\frac{1}{y}}) dy = 0$; $y\big|_{x=e} = 1$

16. $(xy+\sqrt{y})dy+y^2dx=0$; $y\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=4$

17. $\sin 2ydx=(\sin^2 2y-2\sin^2 y+2x)dy$; $y\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$

18. $(y^2+2y-x)y'=1$; $y\big|_{x=2}=0$

19. $2y\sqrt{y}dx-(6x\sqrt{y}+7)dy=0$; $y\big|_{x=-4}=1$

20. $dx=(\sin y+3\cos y+3x)dy$; $y\Big|_{x=e^{\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{\pi}{2}$

Задача 5.

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка в полных дифференциалах:

1. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$
2. $\left(3x^2+\dfrac{2}{y}\cos\dfrac{2x}{y}\right)dx-\dfrac{2x}{y^2}\cos\dfrac{2x}{y}dy=0$
3. $\left(3x^2+4y^2\right)dx+\left(8xy+e^y\right)dy=0$
4. $\left(2x-1-\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\left(2y-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$
5. $(y^2+y\sec^2 x)dx+(2xy+\operatorname{tg}x)dy=0$
6. $(3x^2y+2y+3)dx+(x^3+2x+3y^2)dy=0$
7. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy=0$
8. $[\sin 2x-2\cos(x+y)]dx-2\cos(x+y)dy=0$
9. $\left(xy^2+\dfrac{x}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\dfrac{x^2}{y^3}\right)dy=0$
10. $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx-\dfrac{2y}{x^3}dy=0$
11. $\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx-\left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+2y\right)dy=0$
12. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$
13. $\dfrac{1+xy}{x^2y}dx+\dfrac{1-xy}{xy^2}dy=0$
14. $\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x+y^2}{y^2}dy=0$
15. $\dfrac{y}{x^2}dx-\dfrac{xy+1}{x}dy=0$
16. $\left(xe^x+\dfrac{y}{x^2}\right)dx-\dfrac{1}{x}dy=0$

17. $\left(10xy-\frac{1}{\sin y}\right)dx+\left(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3\right)dy=0$

18. $\left(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x\right)dx-\frac{xdy}{x^2+y^2}=0$

19. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0$

20. $(y^3+\cos x)\,dx+(3xy^2+e^y)\,dy=0$

ТЕМА 7 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

Для выполнения задания необходимо проработать лекционный материал и материал практических занятий по теме Дифференциальные уравнения.

Рекомендуется также использовать материалы пособия [4], и справочные материалы данного сборника.

На первом этапе решения каждой задачи следует определить тип дифференциального уравнения. Затем, используя соответствующий метод или общую формулу, найти общее решение. Решение задача Коши, если она поставлена, находится на основе общего решения.

Ниже приводятся примеры решения типовых для данного задания задач. Эти примеры, конечно, не могут охватить всех деталей и тонкостей, которые могут возникнуть при решении каждой конкретной задачи.

Задача 1.

Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$2x(\sin y+2)dx-\sqrt{x^4+1}\cos y dy=0. \qquad (1)$$

Решение

Это уравнение с разделяющимися переменными, то есть уравнение вида

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0.$$

Для разделения переменных разделим уравнение на $N_1(x)M_2(y)=(\sin y+2)\sqrt{x^4+1}\neq 0$,

$$\frac{2xdx}{\sqrt{x^4+1}}-\frac{\cos y\,dy}{\sin y+2}=0.$$

Получили уравнение с разделенными переменными, то есть уравнение вида

$$P(x)dx+Q(y)dy=0.$$

Его общее решение находится интегрированием

$$\int P(x)dx+\int Q(y)dy=C.$$

Находим общее решение полученного уравнения с разделенными переменными

$$\int\frac{2xdx}{\sqrt{x^4+1}}-\int\frac{\cos y\,dy}{\sin y+2}=C$$

$$\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{(x^2)^2+1}}-\int\frac{d(\sin y+2)}{\sin y+2}=C$$

$$\ln|x^2+\sqrt{x^4+1}|-\ln|\sin y+2|=C; \quad \ln\left|\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{\sin y+2}\right|=C$$

$$\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{\sin y+2}\right|=\ln C_1; \quad \left|\frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{\sin y+2}\right|=C_1; \quad \frac{x^2+\sqrt{x^4+1}}{\sin y+2}=\pm C_1,$$

где $\pm C_1$ - произвольная постоянная. Переобозначим ее через C и получим

$$x^2+\sqrt{x^4+1}=C(\sin y+2). \qquad (2)$$

Это общее решение (общий интеграл) заданного уравнения.

Ответ: общим решением дифференциального уравнения (1) является функция (2).

Замечание. В дальнейшем если $\ln|\varphi(x)| = C$, то сразу переходим к эквивалентному уравнению $\varphi(x) = C$.

Задача 2.

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y^3 + 2xy^2 - 2x^2 y}{2(yx^2 - 2x^3)} \qquad (1)$$

Решение

Разделим числитель и знаменатель правой части на x^3. Тогда получим:

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}}{2\left(\frac{y}{x} - 2\right)}.$$

Таким образом, заданное уравнение является однородным, то есть уравнением вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Применяем метод замены неизвестной функции. Полагаем $z = \frac{y}{x}$, тогда

$$y = zx, \quad y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{z^3 + 2z^2 - 2z}{2(z-2)}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{z^3 + 2z^2 - 2z}{2(z-2)} - z = \frac{z^3 + 2z}{2(z-2)}.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2(z-2)dz}{z^3 + 2z}$$

$$\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{(z-2)dz}{z^3 + 2z} = C.$$

Интеграл $\int \frac{(z-2)dz}{z^3 + 2z}$ вычислим, разложив правильную рациональную дробь, стоящую под знаком интеграла, на простейшие дроби.

$$\frac{z-2}{z^3 + 2z} = \frac{z-2}{z(z^2+2)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2 + 2}.$$

Приводим дроби, стоящие в правой части, к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$A(z^2 + 2) + (Bz + C)z = z - 2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях z:

$$\left.\begin{array}{r|l} z^2 & A + B = 0 \\ z & C = 1 \\ z^0 = 1 & 2A = -2, \quad A = -1, \quad B = 1 \end{array}\right\}$$

$$\frac{z-2}{z^3 + 2z} = -\frac{1}{z} + \frac{z+1}{z^2+2}$$

Подставляем это выражение в решение уравнения и получаем:

$$\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{(z-2)dz}{z^3 + 2z} = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dz}{z} - 2\int \frac{(z+1)dz}{z^2+2} =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{zdz}{z^2+2} - 2\int \frac{dz}{z^2+2} + 2\int \frac{dz}{z} =$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(z^2+2)}{z^2+2}-2\int\frac{dz}{z^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}+2\int\frac{dz}{z}=$$

$$=\ln|x|-\ln(z^2+2)-\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+2\ln|z|=C,\quad z=\frac{y}{x}.$$

Используя свойства логарифма, преобразуем это выражение:

$$\ln\left(\frac{|x|\,z^2}{z^2+2}\right)-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)=C$$

$$\ln\left(\frac{|x|\,y^2}{y^2+2x^2}\right)-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{2}x}\right)=C. \qquad (2)$$

Это общее решение (общий интеграл) заданного уравнения.

Ответ: общим решением однородного дифференциального уравнения (1) является функция (2).

Задача 3.

Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения первого порядка методом Лагранжа или Бернулли:

$$y'+\operatorname{tg}x\cdot y=\cos^3 x;\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}. \qquad (1)$$

Решение

Уравнение линейное, неоднородное:

$$y'+p(x)\cdot y=q(x);\quad p(x)=\operatorname{tg}x;\quad q(x)=\cos^3 x.$$

Для его интегрирования применим метод вариации произвольной постоянной Лагранжа. Соответствующее этому уравнению линейное однородное уравнение имеет вид

$$y'+\operatorname{tg}x\cdot y=0.$$

Интегрируем это уравнение, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{dx}+\operatorname{tg}x\cdot y=0;\quad \frac{dy}{y}+\operatorname{tg}x\cdot dx=0;$$

$$\ln|y|-\ln|\cos x|=C;\quad \ln\left|\frac{y}{\cos x}\right|=C;\qquad \frac{y}{\cos x}=C.$$

Получили $y=C\cos x$ - общее решение однородного уравнения. Ищем общее решение неоднородного уравнения согласно методу Лагранжа в виде $y=C(x)\cos x$. Для нахождения $C(x)$ подставляем это выражение в исходное неоднородное уравнение.

$$C'(x)\cos x-C(x)\sin x+\operatorname{tg}x\,C(x)\cos x=\cos^3 x$$

$$C'(x)\cos x-C(x)\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}C(x)\cos x=\cos^3 x$$

Сокращение слагаемых, содержащих $C(x)$ подтверждает правильность решения однородного уравнения.

$$C'(x)\cos x=\cos^3 x;\quad C'(x)=\cos^2 x;\quad C(x)=\int\frac{(1+\cos 2x)dx}{2}+C$$

$$C(x)=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx+C;\quad C(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C.$$

Подставляя $C(x)$ в выражение для *y,* получим

$$y=\cos x\left(\frac{2x+\sin 2x+C}{4}\right)$$ - общее решение.

Для решения задачи Коши подставим в общее решение начальные условия $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ и найдем соответствующее значение C :

$$\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}+\sin\pi+C}{4}\right);\quad \frac{\pi}{4}=1\left(\frac{\pi+0+C}{4}\right);\quad C=0.$$

Подставляя найденное значение C в общий интеграл, получим решение поставленной задачи Коши

$$y=\frac{\cos x(2x+\sin 2x)}{4}. \qquad (2)$$

Ответ: частным решением неоднородного дифференциального уравнения первого порядка (1) является функция (2).

Задача 4.

Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения первого порядка методом Лагранжа или Бернулли, определив предварительно какая переменная является аргументом, а какая - функцией:

Случай 1. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} ydx+(2x-3y\sin^2 y-y^2\sin 2y)dy=0; \\ \left.y\right|_{x=\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi}{4} \end{cases}. \qquad (1)$$

Решение

Уравнение нелинейно относительно y, т.к. y входит в уравнение под знаком синуса. Нетрудно убедиться, что оно не является ни однородным, ни уравнением с разделяющимися переменными. Оказывается, что это уравнение линейно, если считать y независимой переменной, а $x=x(y)$ - неизвестной функцией.

Тогда получим, разделив уравнение на y и dy

$$y'_x=\frac{1}{x'_y};\quad x'_y=\frac{dx}{dy};\quad x'_y+2\frac{x}{y}=3\sin^2 y+y\sin 2y;$$

$$p(y)=\frac{2}{y};\quad q(y)=3\sin^2 y+y\sin 2y.$$

Найдем сначала общее решение этого уравнения, используя формулу общего решения линейного уравнения: $y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right)$, заменяя соответственно y на x и наоборот.

$$x(y)=e^{-\int\frac{2}{y}dy}\left(\int e^{\int\frac{2}{y}dy}\left(3\sin^2 y+y\sin 2y\right)dy+C\right)=$$

$$=e^{-2\ln|y|}\left(\int e^{2\ln|y|}\left(3\sin^2 y+y\sin 2y\right)dy+C\right)=$$

$$=e^{-\ln y^2}\left(\int e^{\ln y^2}\left(3\sin^2 y+y\sin 2y\right)dy+C\right)=\begin{vmatrix} e^{\ln a}=a \\ e^{-\ln a}=\frac{1}{a}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{y^2}\left(\int y^2(3\sin^2 y+y\sin 2y)dy+C\right)=$$

$$=\frac{1}{y^2}\left(\int(3y^2\sin^2 y+y^3\sin 2y)dy+C\right)=\frac{1}{y^2}\left(\int(y^3\sin^2 y)'dy+C\right)=$$

$$=\frac{1}{y^2}\left(y^3\sin^2 y+C\right)=\frac{y^3\sin^2 y+C}{y^2}$$

Получили $x=\dfrac{y^3\sin^2 y+C}{y^2}$ - общий интеграл исходного уравнения.

Для решения задачи Коши подставим в общий интеграл начальные условия $y\Big|_{x=\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{8}=\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3\sin^2\frac{\pi}{4}+C}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2};\quad \frac{\pi^3}{128}=\frac{\pi^3}{128}+C;\quad C=0.$$

Подставляя найденное значение C в общий интеграл, получим решение поставленной задачи Коши

$$x=y\sin^2 y. \qquad (2)$$

Ответ: решением задачи (1) является функция (2).

Случай 2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$xy'+y=xy^2\ln^3 x;\quad y(1)=4. \qquad (3)$$

Разделим уравнение на x и получим уравнение Бернулли

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)y^{\alpha}.$$

$$y'+\frac{y}{x}=y^2\ln^3 x;\quad p(x)=\frac{1}{x};\quad q(x)=\ln^3 x;\quad \alpha=2.$$

Применим для его интегрирования метод вариации произвольной постоянной Лагранжа:

$$y'+\frac{y}{x}=0;\quad \frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0;\quad \frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0;$$

$$\ln|x|+\ln|y|=C;\quad \ln|xy|=C;$$

$$xy=C;\quad y=\frac{C}{x}.$$

Будем искать решение исходного уравнения Бернулли в виде $y=\frac{C(x)}{x}$.

Для нахождения $C(x)$ подставим это выражение в исходное уравнение Бернулли

$$\frac{C'(x)}{x}-\frac{C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=\frac{C^2(x)\ln^3 x}{x^2};\quad C'(x)=\frac{C^2(x)\ln^3 x}{x}$$

$$\frac{dC(x)}{C^2(x)}=\frac{\ln^3 x}{x}dx;\quad \int\frac{dC(x)}{C^2(x)}=\int\frac{\ln^3 x}{x}dx+C;$$

$$\int\frac{dC(x)}{C^2(x)}=\int\ln^3 x\,d(\ln x)+C;\quad -\frac{1}{C(x)}=\frac{\ln^4 x}{4}+C;$$

$$C(x)=\frac{4}{-4C-\ln^4 x}$$

Переобозначив $-4C$ через C, получим $C(x)=\frac{4}{C-\ln^4 x}$.

Подставляем найденное значение $C(x)$ в выражение для $y=\frac{C(x)}{x}$ и находим

$$y=\frac{4}{x(C-\ln^4 x)}.$$

Получили общее решение заданного уравнения Бернулли.

Для решения задачи Коши подставим в общее решение начальные условия $y(1)=4$:

$$4=\frac{4}{1(C-\ln^4 1)};\quad C=1.$$

Подставляя найденное значение C в общее решение, получим решение поставленной задачи Коши

$$y=\frac{4}{x(1-\ln^4 x)}. \qquad (4)$$

Ответ: решением задачи Коши (3) является функция (4).

Задача 5.

Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка в полных дифференциалах:

Случай 1. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$(3x^2+4x^4y^3)dx+(6y^5+4x^3y^4)dy=0\,. \qquad (1)$$

Решение

$$M(x,y)=3x^2+4x^4y^3; \quad N(x,y)=6y^5+4x^3y^4.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=16x^3y^3; \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=16x^3y^3$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,.$$

Имеем уравнение в полных дифференциалах. Применим для его интегрирования метод восстановления функции двух переменных $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y); \quad U(x,y)=\int M(x,y)dx=\int(3x^2+4x^4y^3)dx=$$

$$=x^3+x^4y^4+C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y); \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+x^4y^4+C(y)\right)=4x^4y^3+C_y'(y)=6y^5+4x^3y^4$$

$$C_y'(y)=6y^5; \quad C(y)=\int 6y^5dy+C; \quad C(y)=y^6.$$

Подставляем найденное выражение $C(y)$ в $U(x,y)$.

$$U(x,y)=x^3+x^4y^4+y^6$$

Общее решение уравнения в полных дифференциалах записывается в виде $U(x,y)=C$, Где $U(x,y)$ - функция, полный дифференциал которой имеет вид $M(x,y)dx+N(x,y)dy$.

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид

$$x^3+x^4y^4+y^6=C\,. \qquad (2)$$

Ответ: общее решение дифференциального уравнения (1) представляется функцией (2).

Случай 2. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$e^{xy}\left(y\ln(x+y)+\frac{1}{x+y}\right)dx+e^{xy}\left(x\ln(x+y)+\frac{1}{x+y}\right)dy=0; \qquad (3)$$

$$y(-1)=3$$

Решение

Уравнение нелинейно относительно y и x. Оно не является ни однородным, ни уравнением с разделяющимися переменными. Обозначим

$$M(x,y)=e^{xy}\left(y\ln(x+y)+\frac{1}{x+y}\right);$$

$$N(x,y)=e^{xy}\left(x\ln(x+y)+\frac{1}{x+y}\right).$$

Убедимся, что выполняется специальное соотношение

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\,.$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=e^{xy}\left(xy\ln(x+y)+\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)=$$

$$=e^{xy}\left(xy\ln(x+y)-\frac{1}{(x+y)^2}+1\right)$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^{xy}\left(yx\ln(x+y) + \frac{y}{x+y} + \frac{x}{x+y} - \frac{1}{(x+y)^2} \right) =$$

$$= e^{xy}\left(xy\ln(x+y) - \frac{1}{(x+y)^2} + 1 \right)$$

Следовательно, это уравнение в полных дифференциалах. Применим для нахождения его общего решения формулу

$$U(x,y) = C, \text{ где } U(x,y) = \int_{x_1}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_1}^{y} N(x_1,y)dy\,,$$

Эта формула соответствует восстановлению функции $U(x,y)$ по ее полному дифференциалу $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ с помощью вычисления криволинейного интеграла 2-го рода, который при условии $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ не зависит от пути интегрирования. При этом интегрирование ведется по указанному на рис 1 специальному пути.

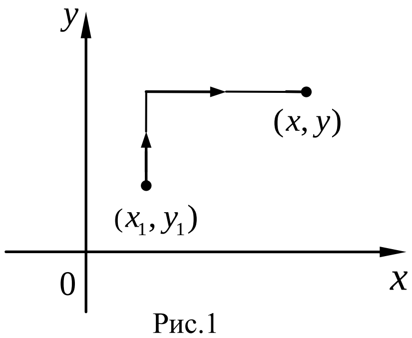

Рис.1

Выбор x_1, y_1 определяется возможностью их подстановки в функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ и максимальным упрощением этих функций.
Положим $x_1 = 0,\ y_1 = 1$. (Взять $x_1 = 0,\ y_1 = 0$, например, нельзя, так как $\ln 0$ не существует.)

$$\int_0^x e^{xy}\left(y\ln(x+y) + \frac{1}{x+y} \right)dx + \int_1^y e^{0y}\left(0\ln(0+y) + \frac{1}{0+y} \right)dy = C$$

$$\int_0^x e^{xy}\left(y\ln(x+y) + \frac{1}{x+y} \right)dx + \int_1^y \frac{1}{y}\,dy = C;$$

$$\int_0^x \left(e^{xy}\ln(x+y) \right)'_x dx + \int_1^y \frac{1}{y}\,dy = C; \quad e^{xy}\ln(x+y)\Big|_{x=0}^{x=x} + \ln y\Big|_{y=1}^{y=y} = C$$

$$e^{xy}\ln(x+y) - \ln y + \ln y = C; \quad e^{xy}\ln(x+y) = C.$$

Получили $e^{xy}\ln(x+y) = C$ - общий интеграл заданного уравнения.

Для нахождения решения задачи Коши подставим в общий интеграл начальные условия $y(-1) = 3$:

$$e^{-1\cdot 3}\ln(-1+3) = C; \quad C = e^{-3}\ln 2.$$

Таким образом, решением поставленной задачи Коши является функция

$$e^{xy}\ln(x+y) = e^{-3}\ln 2\,. \qquad (4)$$

Ответ: решением задачи Коши (3) является функция (4).

Замечание. Для получения общего решения можно использовать аналогичную формулу

$U(x,y)=C,$ где $U(x,y)=\int\limits_{x_1}^{x} M(x,y_1)dx+\int\limits_{y_1}^{y} N(x_1,y)dy$.