

Федеральное государственное  образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Инженерно-строительный институт
Кафедра сопротивления материалов

Сопротивление материалов

Сборник домашних заданий. Часть 2

*Учебно-методическое пособие
для бакалавров и специалистов технических направлений*



Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
2014

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Нагрузки:

P – сосредоточенная сила, кН;

M – сосредоточенная пара сил (момент), кН·м;

q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки, кН/м.

Обозначение осей:

x – продольная ось стержня;

y, z – главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня.

Геометрические характеристики поперечного сечения стержня:

F – площадь поперечного сечения стержня, см²;

S_y, S_z – статические моменты сечения относительно осей y и z , см³;

J_y, J_z – осевые моменты инерции относительно осей y и z , см⁴;

J_p – полярный момент инерции, см⁴;

W_y, W_z – осевые моменты сопротивления сечения относительно осей y и z , см³;

W_p – полярный момент сопротивления сечения, см³;

i_y, i_z – радиусы инерции, см.

Внутренние силовые факторы:

N – продольная сила, кН;

$Q_y, Q_z, (Q)$ – поперечные силы, кН;

$M_y, M_z, (M)$ – изгибающие моменты, кН·м;

M_x – крутящий момент, кН·м.

Напряжения:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, (\sigma)$ – нормальные напряжения, МПа;

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, (\tau)$ – касательные напряжения, МПа;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, (\sigma_{\text{гл}})$ – главные напряжения, МПа.

Деформации и перемещения:

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, (\varepsilon)$ – относительные продольные деформации;

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, (\gamma)$ – угловые деформации (углы сдвига);

$\Delta l, (u)$ – абсолютная деформация стержня при осевом растяжении-сжатии (перемещение точек вдоль оси x), см;

φ – угол закручивания стержня (вала) при кручении.

Характеристики материала:

$\sigma_{\text{пл}}$ – предел пропорциональности, МПа;

σ_T – предел текучести, МПа;

σ_B – предел прочности, МПа;

$[\sigma]$, $[\tau]$ – допускаемые напряжения, МПа;

E – модуль нормальной упругости (модуль Юнга), МПа;

G – модуль касательной упругости (модуль сдвига), МПа;

ν – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона);

α – коэффициент линейного температурного расширения материала, 1/град.

ГЛАВА 1

ДОМАШНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Общие указания к выполнению индивидуальных задач

Индивидуальные задачи выдаются каждому студенту для самостоятельного решения с целью закрепления пройденного материала. Студент сначала должен ознакомиться с соответствующим разделом лекционного курса, осмыслить физическую картину явления, понять вывод расчетных формул и принятые буквенные обозначения. После изучения теоретического материала можно приступить к решению задачи.

Полученную задачу студент должен выполнять в специально заведенной тетради к следующему аудиторному занятию и предъявлять результат решения преподавателю, ведущему групповые занятия.

Исходные данные, в которые входят схема конструкции, ее размеры, характеристики материала и т.д., студент выбирает из указанной в задании таблицы, в строке, номер которой соответствует порядковому номеру студента в групповом журнале преподавателя.

З а д а ч а 1

Определение перемещений в балках методом начальных параметров

Методом начальных параметров определить прогиб в точке B (рис. 1) и угол поворота этого сечения. Точка B расположена в середине участка длиной s . Исходные данные взять из табл. 1. Жесткость балки при изгибе принять равной $EJ = 2 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

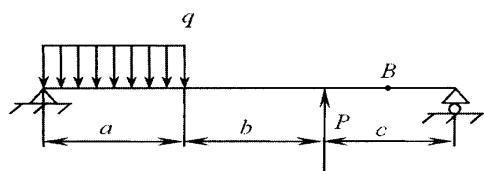
Таблица 1

№ п/п	Номер схемы	а	в	с	Р	q	М	Ответ
		м			кН	кН/м	кНм	ν_B
								мм
1	1	1,5	2,0	0,6	40,0	20	-	1,66
2	1	1,6	2,1	0,7	37,5	19	-	2,20
3	1	1,7	2,2	0,8	35,0	18	-	2,72
4	1	1,8	2,3	0,9	32,5	17	-	3,19
5	1	1,9	2,4	1,0	30,0	16	-	3,57
6	2	1,8	1,6	0,8	-	24	100	4,48
7	2	1,9	1,7	0,9	-	22	90	4,60
8	2	2,0	1,8	1,0	-	20	80	4,44
9	2	2,1	1,9	1,1	-	18	70	4,00
10	2	2,2	2,0	1,2	-	16	60	3,28

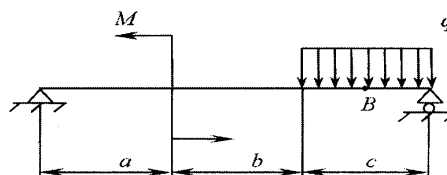
Окончание табл.1

№ п/п	Номер схемы	а	в	с	Р	q	М	Ответ
		м			кН	кН/м	кНм	ν_B
								мм
11	3	1,2	1,5	1,3	30	18	-	-3,38
12	3	1,4	1,6	1,4	29	17	-	-4,05
13	3	1,6	1,7	1,5	28	16	-	-4,78
14	3	1,8	1,8	1,6	27	15	-	-5,55
15	3	2,0	1,9	1,7	26	14	-	-6,36
16	4	1,3	0,8	1,8	-	16	150	-1,26
17	4	1,5	0,9	1,9	-	14	140	-1,44
18	4	1,7	1,0	2,0	-	12	130	-1,57
19	4	1,9	1,1	2,1	-	10	120	-1,64
20	4	2,1	1,2	2,2	-	8	110	-1,64
21	5	1,2	1,3	0,8	56	13	-	8,11
22	5	1,3	1,4	0,9	54	12	-	5,71
23	5	1,4	1,5	1,0	52	11	-	2,67
24	5	1,5	1,6	1,1	50	10	-	-0,57
25	5	1,6	1,7	1,2	48	9	-	-3,37
26	6	0,9	1,2	1,0	-	14	120	134
27	6	1,0	1,3	1,2	-	13	110	130
28	6	1,1	1,4	1,4	-	12	100	116
29	6	1,2	1,5	1,6	-	11	90	89,4
30	6	1,3	1,6	1,8	-	10	80	51,7

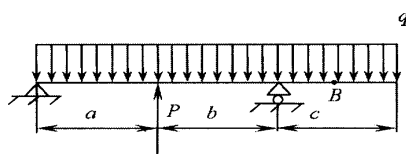
1



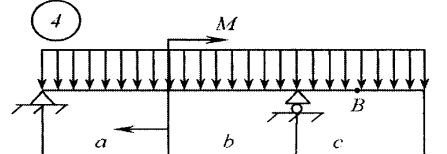
2



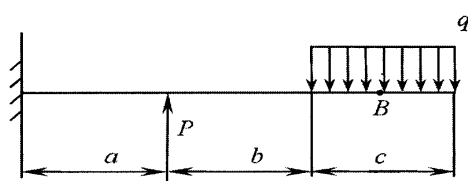
3



4



5



6

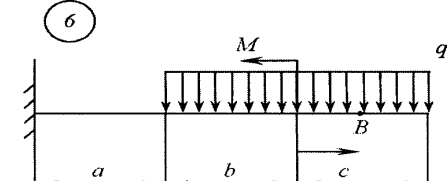


Рис. 1.

З а д а ч а 2

Определение перемещений в балках и рамах по способу Мора-Верещагина

По формуле Мора с использованием приема Верещагина вычислить прогиб балки (рис. 2) в точке B и угол поворота в точке C . Для рам необходимо определить горизонтальное смещение точки B и угол поворота в точке C . Исходные данные взять из табл. 2. Жесткость балки или рамы принять равной $EJ = 4 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2$.

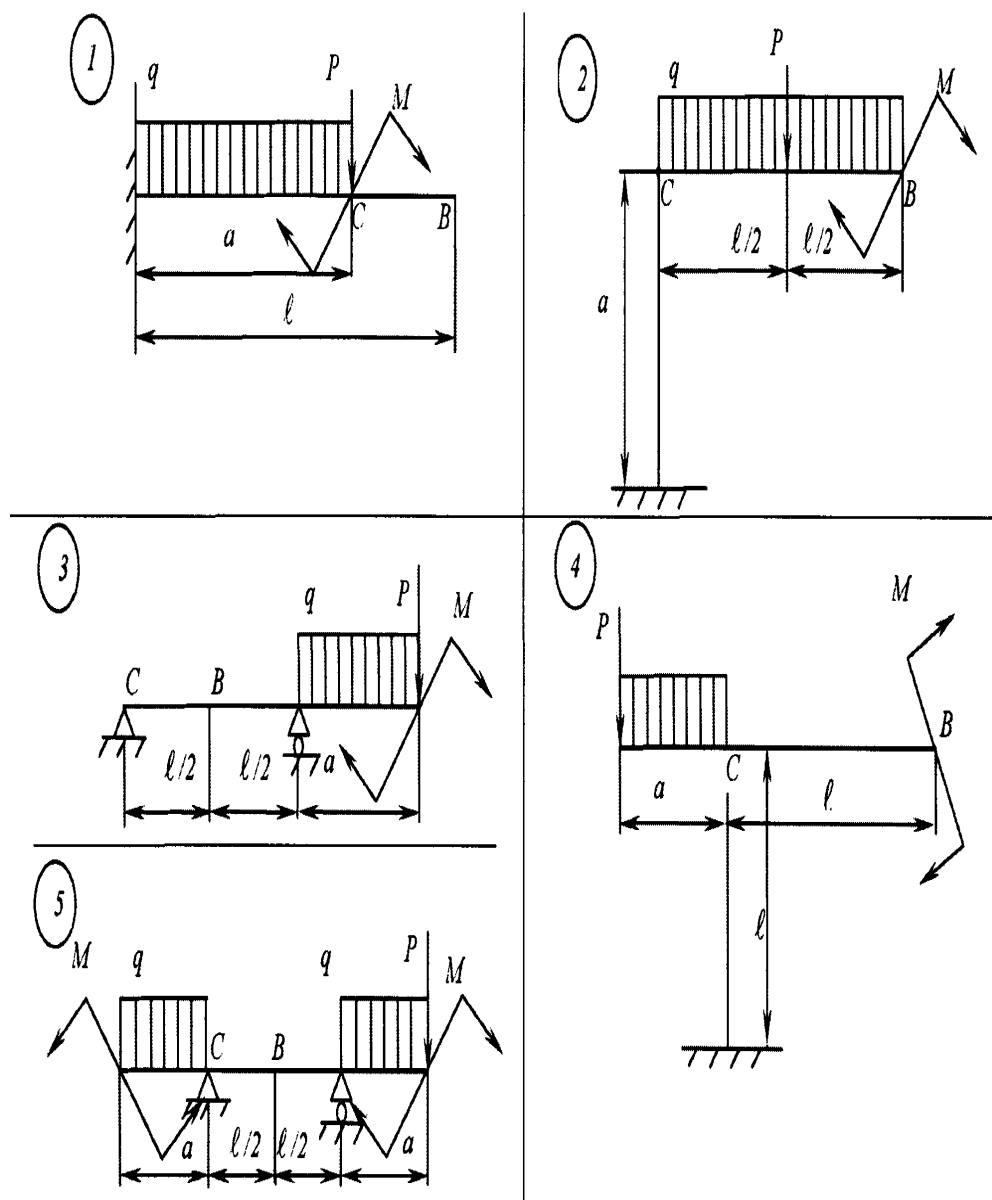


Рис. 2.

Таблица 2

№ п/п	Номер схемы	ℓ	а	Р	М	q	Ответ	
		м		кН	кНм	кН/м	ν_B	$\theta_C \cdot 10^2$
							см	
1	1	3,2	1,1	20	0	0	0,857	0,302
2	1	3,3	1,2	30	0	0	1,57	0,540
3	1	3,4	1,3	0	60	0	5,36	1,95
4	1	3,5	1,4	0	80	0	7,84	2,80
5	1	3,6	1,5	0	0	13	0,589	0,183
6	1	3,7	1,6	0	0	14	0,788	0,239
7	2	1,2	2,7	20	0	0	1,09	0,810
8	2	1,3	2,8	30	0	0	1,91	1,36
9	2	1,4	2,9	0	60	0	6,30	4,35
10	2	1,5	3,0	0	80	0	9,00	6,00
11	2	1,6	3,1	0	0	13	2,00	1,29
12	2	1,7	3,2	0	0	14	2,59	1,62
13	3	2,5	0,8	20	0	0	0,156	0,125
14	3	2,6	0,9	30	0	0	0,285	0,219
15	3	2,7	1,0	0	60	0	0,683	0,506
16	3	2,8	1,1	0	80	0	0,980	0,700
17	3	2,9	1,2	0	0	13	0,123	0,085
18	3	3,0	1,3	0	0	14	0,166	0,111
19	4	2,1	1,7	20	0	0	1,87	1,78
20	4	2,2	1,8	30	0	0	3,27	2,97
21	4	2,3	1,9	0	60	0	3,97	3,45
22	4	2,4	2,0	0	80	0	5,76	4,80
23	4	2,5	2,1	0	0	13	2,24	1,79
24	4	2,6	2,2	0	0	14	2,86	2,20
25	5	2,7	1,6	20	0	0	0,729	1,08
26	5	2,8	1,7	30	0	0	1,25	1,78
27	5	2,9	1,8	0	60	0	1,58	2,17
28	5	3,0	1,9	0	80	0	2,25	3,00
29	5	3,1	2,0	0	0	13	0,781	1,01
30	5	3,2	2,1	0	0	14	0,988	1,23

З а д а ч а 3

Статически неопределимые балки

Методом сил раскрыть статическую неопределимость балки (рис. 3) и построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Исходные данные взять из табл. 3.

Таблица 3

№ п/п	Номер схемы	ℓ	a	P	M	q	Ответ: R_A
		м	м	кН	кНм	кН/м	кН
1	1	2,3	1,6	50	0	0	-27,9
2	1	2,4	1,7	60	0	0	-34,5
3	1	2,5	1,8	0	120	0	-66,4
4	1	2,6	1,9	0	140	0	-74,9
5	1	2,7	2,0	0	0	10	-4,47
6	1	2,8	2,1	0	0	20	-9,60
7	2	2,9	2,2	50	0	0	35,1
8	2	3,0	2,3	60	0	0	42,7
9	2	3,1	2,4	0	120	0	47,0
10	2	3,2	2,5	0	140	0	53,1
11	2	3,3	2,6	0	0	10	14,4
12	2	3,4	2,7	0	0	20	29,7
13	3	3,0	0,9	50	0	0	-22,5
14	3	3,1	1,0	60	0	0	-29,0
15	3	3,2	1,1	0	120	0	-56,2
16	3	3,3	1,2	0	140	0	-63,6
17	3	3,4	1,3	0	0	10	-37,3
18	3	3,5	1,4	0	0	20	-8,4
19	4	2,6	1,5	50	0	0	93,3
20	4	2,7	1,6	60	0	0	113,0
21	4	2,8	1,7	0	120	0	62,3
22	4	2,9	1,8	0	140	0	72,4
23	4	3,0	1,9	0	0	10	28,0
24	4	3,1	2,0	0	0	20	59,3
25	5	2,3	1,2	50	0	0	6,52
26	5	2,4	1,3	60	0	0	8,12
27	5	2,5	1,4	0	120	0	12,0
28	5	2,6	1,5	0	140	0	13,5
29	5	2,7	1,6	0	0	10	1,18
30	5	2,8	1,7	0	0	20	2,58

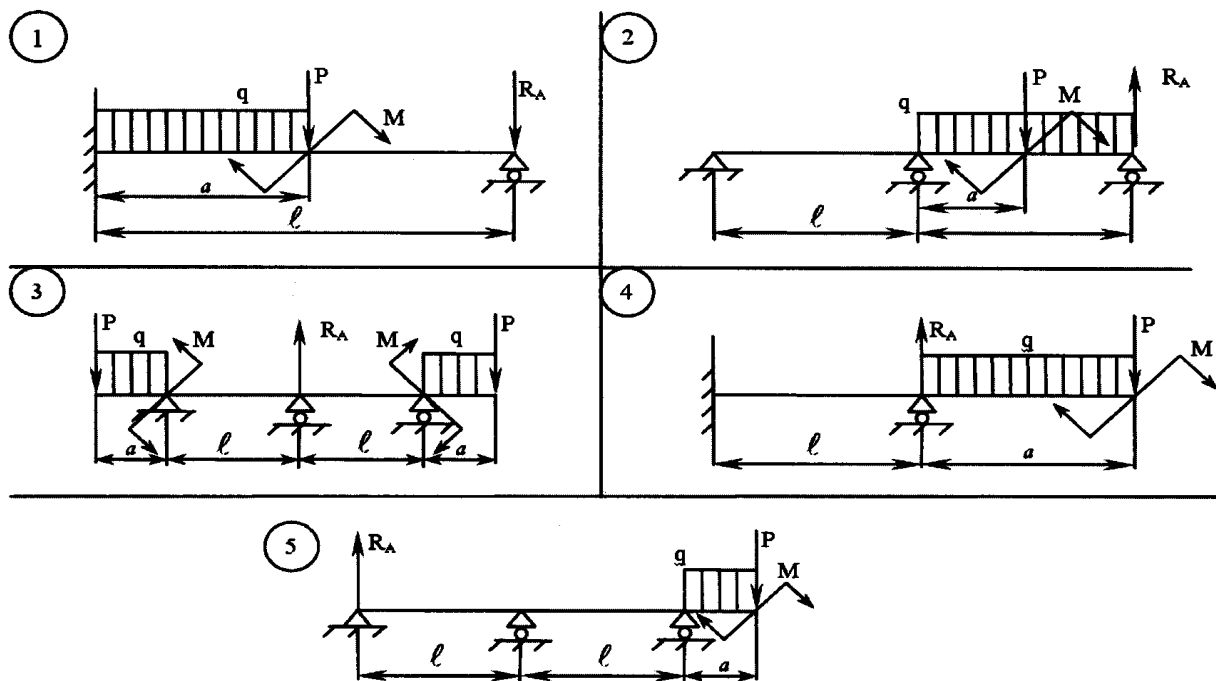


Рис. 3.

Задача 4

Статически неопределимые рамы

Методом сил раскрыть статическую неопределимость рамы (рис. 4) и построить эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил.

Исходные данные взять из табл. 4.

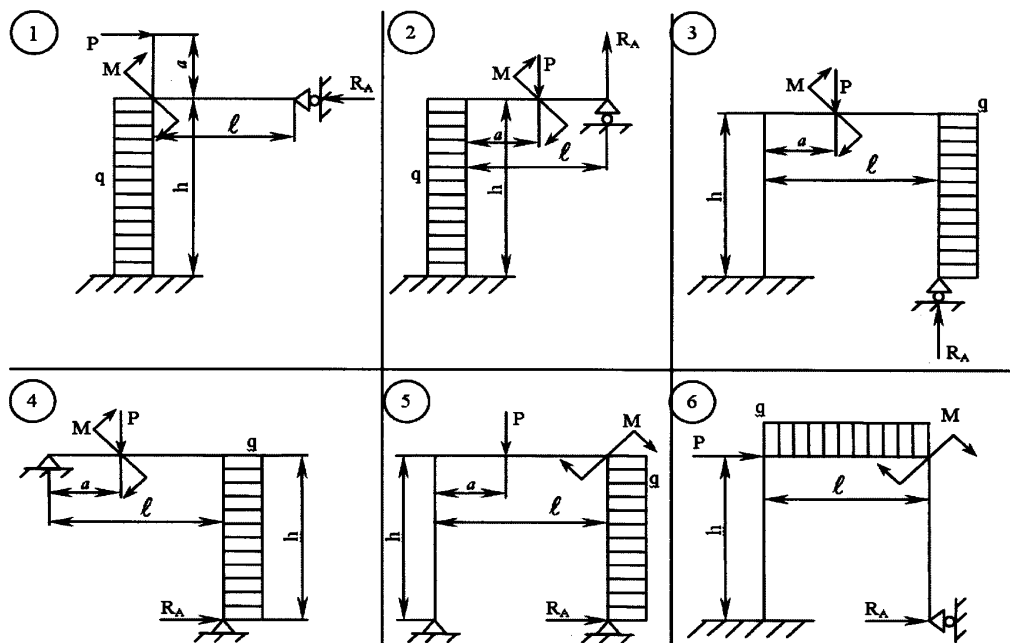


Рис. 4.

Таблица 4

№ п/п	Номер схемы	ℓ	h	a	P	M	q	Ответ: R_A
		м			кН	кНм	кН/м	кН
1	1	2,5	3,2	0,8	30	0	0	41,2
2	1	2,6	3,3	0,9	40	0	0	56,4
3	1	2,7	3,4	1,0	0	160	0	70,6
4	1	2,8	3,5	1,1	0	0	15	19,7
5	1	2,9	3,6	1,2	0	0	16	21,6
6	2	2,8	4,1	0,9	30	0	0	-93,9
7	2	2,9	4,2	1,0	40	0	0	-13,6
8	2	3,0	4,3	1,1	0	160	0	-52,3
9	2	3,1	4,4	1,2	0	0	15	-12,6
10	2	3,2	4,5	1,3	0	0	16	-13,6
11	3	2,8	3,1	1,2	30	0	0	-9,90
12	3	2,9	3,2	1,3	40	0	0	-13,8
13	3	3,0	3,3	1,4	0	160	0	-54,2
14	3	3,1	3,4	1,5	0	0	15	-31,2
15	3	3,2	3,5	1,6	0	0	16	-34,2
16	4	2,6	3,2	1,3	30	0	0	2,05
17	4	2,8	3,3	1,4	40	0	0	2,92
18	4	3,0	3,4	1,5	0	160	0	2,76
19	4	3,2	3,5	1,6	0	0	15	-22,8
20	4	3,4	3,6	1,7	0	0	16	-25,1
21	5	3,2	3,7	1,6	30	0	0	1,83
22	5	3,4	3,8	1,7	40	0	0	2,56
23	5	3,6	3,9	1,8	0	160	0	-11,9
24	5	3,8	4,0	1,9	0	0	15	-43,5
25	5	4,0	4,1	2,0	0	0	16	-47,5
26	6	2,3	2,8	-	30	0	0	3,36
27	6	2,4	2,9	-	40	0	0	4,46
28	6	2,5	3,0	-	0	160	0	47,4
29	6	2,6	3,1	-	0	0	15	8,47
30	6	2,7	3,2	-	0	0	16	9,43
					-	-	-	-
					-	-	-	-

З а д а ч а 5

Косой изгиб

Для деревянной балки (сосна, $E = 10^4$ МПа), изображенной на рис. 5, требуется: а) построить эпюры моментов M_y и M_z ; б) вычислить напряжения в опасном сечении и построить эпюру распределения напряжений по сечению; в) определить положения нейтральной оси; г)

определить составляющие перемещений v_y и v_z , точки B вдоль осей и полное перемещение v . Исходные данные взять из табл. 5.

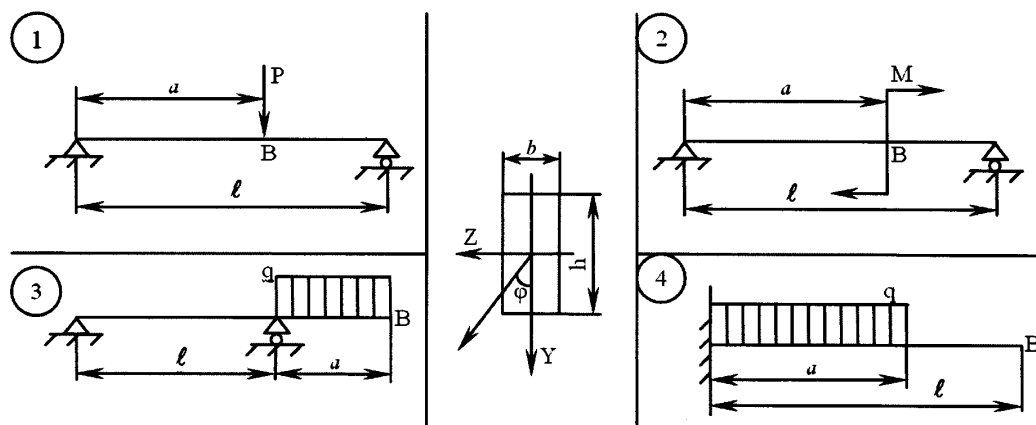


Рис. 5.

Таблица 5

№ п/п	Номер схемы	ℓ	a	P	M	q	b	h	θ	Ответ V_B
		<i>м</i>		<i>кН</i>	<i>кНм</i>	<i>кН/м</i>	<i>см</i>		<i>град</i>	<i>см</i>
1	1	3,0	1,3	8	-	-	10	14	10	1,21
2	1	2,9	1,2	9	-	-	10	15	15	0,859
3	1	2,8	1,1	10	-	-	10	16	20	0,586
4	1	2,7	1,0	11	-	-	10	17	25	0,347
5	1	2,6	0,9	12	-	-	10	18	30	0,116
6	1	2,5	0,8	13	-	-	10	19	35	0,115
7	1	2,4	0,7	14	-	-	10	20	40	0,335
8	2	2,60	1,10	-	4,0	-	9	12	10	0,274
9	2	2,55	1,05	-	4,5	-	9	13	15	0,177
10	2	2,50	1,00	-	5,0	-	9	14	20	0,101
11	2	2,45	0,95	-	5,5	-	9	15	25	0,0323
12	2	2,40	0,90	-	6,0	-	9	16	30	0,0396
13	2	2,35	0,85	-	6,5	-	9	17	35	0,118
14	2	2,30	0,80	-	7,0	-	9	18	40	0,204
15	3	2,50	1,00	-	-	10,0	8	10	10	8,30
16	3	2,45	0,95	-	-	10,5	8	11	15	5,79
17	3	2,40	0,90	-	-	11,0	8	12	20	4,33
18	3	2,35	0,85	-	-	11,5	8	13	25	3,45
19	3	2,30	0,80	-	-	12,0	8	14	30	2,86
20	3	2,25	0,75	-	-	12,5	8	15	35	2,39
21	3	2,20	0,70	-	-	13,0	8	16	40	1,99
22	4	2,70	1,20	-	-	12,0	10	15,0	10	3,12
23	4	2,65	1,15	-	-	11,5	10	15,5	15	2,55
24	4	2,60	1,10	-	-	11,0	10	16,0	20	2,13
25	4	2,55	1,05	-	-	10,5	10	16,5	25	1,81
26	4	2,50	1,00	-	-	10,0	10	17,0	30	1,54
27	4	2,45	0,95	-	-	9,5	10	17,5	35	1,30
28	4	2,40	0,90	-	-	9,0	10	18,0	40	1,09
29	4	2,35	0,85	-	-	8,5	10	18,5	45	0,89
30	4	2,30	0,80	-	-	8,0	10	19	50	0,71

Задача 6

Совместное действие изгиба и растяжения (сжатия).

Внецентренное растяжение (сжатие)

Для бруса, изображенного на рис. 6, построить эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих моментов. В опасном сечении вычислить наибольшие нормальные напряжения.

Исходные данные взять из табл. 6.

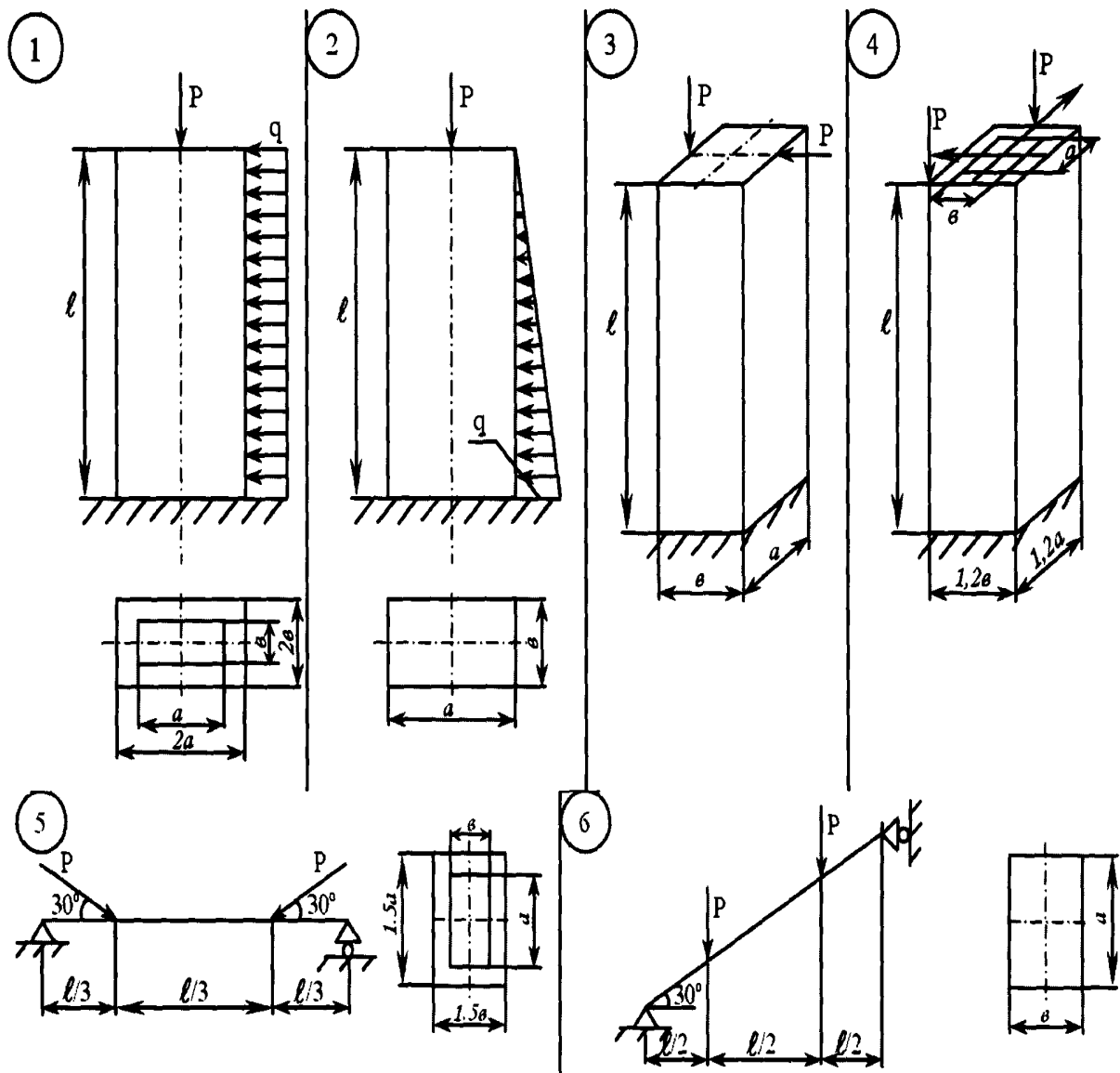


Рис. 6.

Таблица 6

№ п/п	Номер схемы	ℓ	a	b	P	q	Ответ $\sigma_{\max}$
		м	см		кН	кН/м	МПа
1	1	5,0	20	15	100	0,10	-1,28
2	1	4,5	19	14	110	0,11	-1,55
3	1	4,0	18	13	120	0,12	-1,89
4	1	3,5	17	12	130	0,13	-2,31
5	1	3,0	16	11	140	0,14	-2,83
6	2	4,6	18	14	200	0,30	-10,7
7	2	4,5	17	18	210	0,29	-9,12
8	2	4,4	16	12	220	0,28	-15,0
9	2	4,3	15	11	230	0,27	-18,0
10	2	4,2	14	10	240	0,26	-21,8
11	3	1,5	25	20	180	-	-180
12	3	1,4	24	19	190	-	-205
13	3	1,3	23	18	200	-	-233
14	3	1,2	22	17	210	-	-266
15	3	1,1	21	16	220	-	-303
16	4	1,2	50	40	120	-	-5,14
17	4	1,3	55	45	130	-	-4,50
18	4	1,4	60	50	140	-	-4,00
19	4	1,5	65	60	150	-	-3,30
20	4	1,6	70	65	160	-	-3,01
21	5	3	20	10	20	-	-6,23
22	5	2,9	19	9	21	-	-7,77
23	5	2,8	18	8	22	-	-9,83
24	5	2,7	17	7	23	-	-12,7
25	5	2,6	16	6	24	-	-16,7
26	6	3,8	18	12	26	-	-41,1
27	6	3,7	17	11	25	-	-47,0
28	6	3,6	16	10	24	-	-54,3
29	6	3,5	15	9	23	-	-63,8
30	6	3,4	14	8	22	-	-76,4

З а д а ч а 7

Колебания упругих систем

Для упругой системы, изображенной на рис. 7, определить частоту собственных колебаний ω и вычислить наибольшее напряжения в опасном

сечении, возникающие при работе двигателя, с учетом сопротивления (коэффициент сопротивления – n). Масса двигателя – Q , число оборотов – m_1 , неуравновешенный груз – P . Поперечное сечение стержня пружины и балки – круглое, диаметром d , материал – сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа).

Исходные данные взять из табл. 7.

Таблица 7

№ п/п	Номер схемы	a	b	d	Q	P	m ₁	n	Ответ	
									ω	σ(τ)
		м	см	Н	об/мин	1/с	1/с	МПа		
1	1	3,0	2,0	2,5	5200	400	1200	2	115	58,9
2	1	3,1	2,1	2,6	5300	450	1300	3	116	48,8
3	1	3,2	2,2	2,7	5400	500	1400	4	117	43,8
4	1	3,3	2,3	2,8	5500	550	1500	5	118	40,3
5	1	3,4	2,4	2,9	5600	600	1600	6	119	37,5
6	2	-	0,05	1,0	700	240	180	3,2	66,2	97,9
7	2	-	0,06	1,1	720	250	185	3,3	58,2	98,4
8	2	-	0,07	1,2	740	260	186	3,47	53,1	88,9
9	2	-	0,08	1,3	760	270	187	3,5	49,5	83,9
10	2	-	0,09	1,4	780	280	188	3,6	46,9	78,9
11	3	0,8	-	3,1	100	160	330	2,7	72,2	84,1
12	3	0,9	-	3,2	110	170	325	2,8	61,5	99,2
13	3	1,0	-	3,3	120	180	320	2,9	53,4	117,6
14	3	1,1	-	3,4	130	190	315	3,0	47,2	141,2
15	3	1,2	-	3,5	140	200	310	3,1	42,3	173,4
16	4	1,6	0,7	3,6	420	80	160	3,2	32,0	80,8
17	4	1,7	0,8	3,7	430	90	170	3,3	28,1	92,7
18	4	1,8	0,9	3,8	440	100	180	3,4	25,0	108,4
19	4	1,9	1,0	3,9	450	110	190	3,5	22,6	130,6
20	4	2,0	1,1	4,0	460	120	200	3,6	20,7	140,1
21	5	1,6	1,1	1,2	2700	60	760	2,1	93,2	45,6
22	5	1,7	1,2	1,3	2600	59	770	2,2	99,6	36,9
23	5	1,8	1,3	1,4	2500	58	780	2,3	106	30,3
24	5	1,9	1,4	1,5	2400	57	790	2,4	113	25,2
25	5	2,0	1,5	1,6	2300	56	800	2,5	119	21,2
26	6	0,8	2,1	2,6	120	23	132	4,3	15,6	75,6
27	6	0,9	2,2	2,7	115	22	133	4,4	14,8	71,5
28	6	1,0	2,3	2,8	110	21	134	4,5	14,3	66,8
29	6	1,1	2,4	2,9	105	20	135	4,6	13,9	61,9
30	6	1,2	2,5	3,0	100	19	136	4,7	13,7	57,2

Примечание. τ только для схемы 2

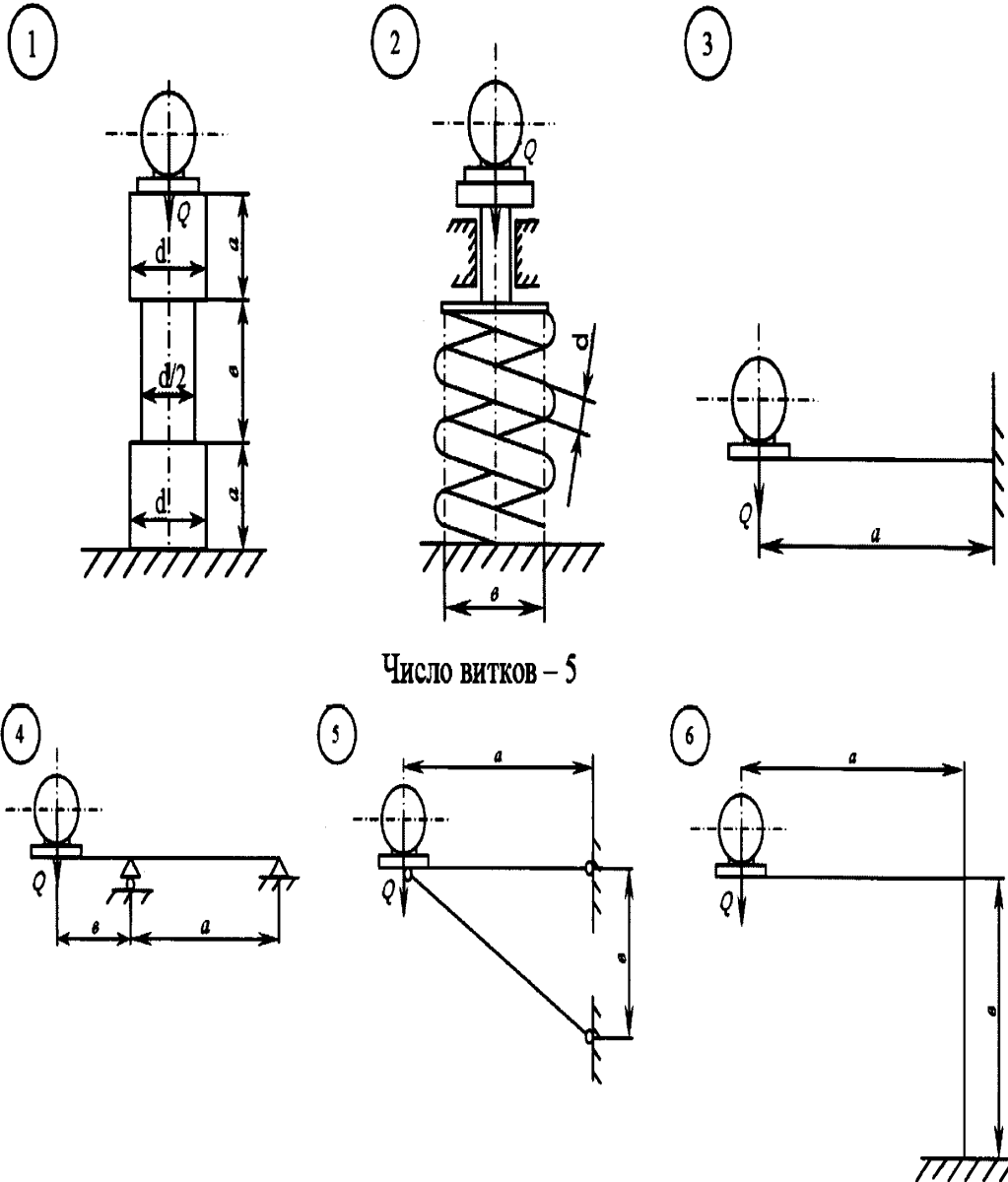


Рис. 7.

Задача 8

Напряжения и перемещения при ударной нагрузке

На упругую систему, изображенную на рис. 7, с высоты H падает груз Q (на чертеже показан груз после соприкосновения с упругой системой). Требуется определить напряжения в опасном сечении σ_o и вертикальное перемещения точки приложения груза δ_o . Массой упругой системы пренебречь. Исходные данные взять из табл. 8.

Таблица 8

№ п/п	Номер схемы	а	в	д	Q	Н	Ответ	
		м		см	Н	см	σ_o	δ_o
							МПа	см
1	6	0,8	2,1	2,6	120	5,0	159,2	11,6
2	6	0,9	2,2	2,7	115	5,5	153,3	12,8
3	6	1,0	2,3	2,8	110	6,0	146,5	13,8
4	6	1,1	2,4	2,9	105	6,5	139,3	14,6
5	6	1,2	2,5	3,0	100	7,0	131,9	15,3
6	1	3,0	2,0	2,5	520	4,0	71,8	0,251
7	1	3,1	2,1	2,6	530	5,0	76,0	0,277
8	1	3,2	2,2	2,7	540	6,0	79,1	0,301
9	1	3,3	2,3	2,8	550	7,0	81,4	0,321
10	1	3,4	2,4	2,9	560	8,0	83,1	0,341
11	2	-	0,05	1,0	300	2,1	235	0,738
12	2	-	0,06	1,1	320	2,2	208	0,892
13	2	-	0,07	1,2	340	2,3	188	1,033
14	2	-	0,08	1,3	360	2,4	171	1,16
15	2	-	0,09	1,4	380	2,5	158	1,28
16	3	1,2	-	3,1	80	1,2	111,3	1,72
17	3	1,3	-	3,2	90	1,3	118,2	2,08
18	3	1,4	-	3,3	100	1,4	124,5	2,46
19	3	1,5	-	3,4	110	1,5	130,2	2,87
20	3	1,6	-	3,5	120	1,6	136,4	3,30
21	4	1,6	0,7	1,8	40	1,0	124,2	3,70
22	4	1,7	0,8	1,9	50	1,1	144,6	5,07
23	4	1,8	0,9	2,0	60	1,2	162,6	6,58
24	4	1,9	1,0	2,1	70	1,3	178,4	8,21
25	4	2,0	1,1	2,2	80	1,4	192,1	9,92
26	5	1,8	1,3	1,2	270	3,2	99,0	0,288
27	5	1,9	1,4	1,3	260	3,3	88,1	0,272
28	5	2,0	1,5	1,4	250	3,4	79,0	0,257
29	5	2,1	1,6	1,5	240	3,5	71,2	0,244
30	5	2,2	1,7	1,6	230	3,6	64,4	0,234

ГЛАВА 2

ДОМАШНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Указания к выполнению расчетно-графических работ

При изучении курса «Сопротивление материалов» студенты выполняют ряд расчетно-графических работ (РГР) и домашние индивидуальные задачи, номера которых определяет преподаватель.

Количество РГР и задач зависит от специальности и количества часов, отведенных в учебном плане на изучение курса. Целью заданий является сознательное усвоение теоретического материала и приобретение практических навыков решения задач.

Исходные данные для выполнения РГР, в которые входят схемы конструкций, размеры, характеристики материала и т.д., студенты выбирают из соответствующих таблиц согласно шифру. Шифр строится следующим образом: выписывается личный номер студента, состоящий из номера группы, например 2506, и порядкового номера студента по списку в журнале преподавателя, например 03. Под ним записываются первые шесть букв русского алфавита.

2	5	0	6	0	3
а	б	в	г	д	е

Из каждого столбца таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, выбирается число, стоящее в той строке, номер которой совпадает с номером буквы из шифра.

В данных указаниях приводятся краткие теоретические сведения и основные формулы, необходимые для выполнения заданий. Пособие ни в коей мере не заменяет учебник, поэтому перед выполнением заданий прочитайте соответствующий раздел одного из учебников, которые приведены в списке литературы.

Обращайте внимание на единицы измерения величин, входящих в формулы. Не забывайте писать, в каких единицах получен результат. Рекомендуемые единицы измерения приведены в перечне используемых обозначений. При этом полезно иметь в виду, что $1 \text{ МПа} = 0,1 \text{ кН/см}^2$. Арифметические вычисления следует выполнять с точностью до трех значащих цифр – точностью, достаточной для инженерных расчетов.

РГР выполняются на стандартных листах формата А4 (210×297 мм), которые затем сброшюровываются и снабжаются титульным листом. Перед решением задачи необходимо выписать из таблицы исходные данные и нарисовать в масштабе расчетную схему, изменив направления нагрузок на противоположные, если их значения в таблице заданы отрицательными. Все расчеты должны сопровождаться краткими пояснениями.

Небрежно оформленные и выполненные не по своему шифру работы к защите не принимаются!

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 1 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК И РАМ МЕТОДОМ СИЛ

Общие указания

Данная работа состоит из двух частей.

В первой части для статически неопределимой балки необходимо подобрать сечение в виде двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям, а затем, определив максимальный прогиб, сделать проверку на жесткость.

Во второй части рассчитывается рама, которая дважды статически неопределима. В этой задаче необходимо подобрать сечение, состоящее из двух равнобоких уголков, из условия прочности по нормальным напряжениям.

Для раскрытия статической неопределимости используем *метод сил*. В основе метода лежит способ определения перемещений в балке – *правило Мора-Верещагина*. Во второй части при определении прогибов при расчете по условию жесткости используется метод начальных параметров.

Таким образом, перед выполнением работы необходимо обратиться к разделам «Уравнение изогнутой оси балки по методу начальных параметров», «Метод Мора», «Графический способ вычисления интеграла Мора – правило (способ) Верещагина», «Расчет статически неопределимых балок методом сил».

Основные теоретические сведения по этим разделам приведены ниже.

Основные теоретические сведения

1. Метод начальных параметров

Уравнение изогнутой оси по методу начальных параметров в общем виде имеет следующий вид:

$$EJ_z v = EJ_z v_0 + EJ\theta_0 \cdot x + M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + q_0 \frac{x^4}{4!} + \sum_{i=1}^k \left| \begin{array}{l} \Delta M_i \frac{(x-c_i)^2}{2} + \Delta Q_i \frac{(x-c_i)^3}{3!} + \Delta q_i \frac{(x-c_i)^4}{4!} \end{array} \right|_{x > c_i}, \quad (1.1)$$

где EJ_z – жесткость балки; v_0, v – начальный и текущий прогибы; θ_0, θ – начальный и текущий углы поворота; M_0, Q_0 и q_0 – усилия в начале координат; $\Delta M_i, \Delta Q_i$ и Δq_i – скачки в эпюрах; c_i – координата приложения сосредоточенных усилий или координата начала распределенной нагрузки.

Уравнение углов поворота сечений получается дифференцированием.

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + M_0 \cdot x + Q_0 \frac{x^2}{2!} + q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum_{i=1}^k \left|_{x > c_i} + M_i(x - c_i) + \right. \\ \left. + Q_i \frac{(x - c_i)^2}{2!} + q_i \frac{(x - c_i)^3}{3!} \right. \quad (1.2)$$

Знак $\left|_{x > c_i}$ указывает, что слагаемое следует учитывать, если $x > c_i$.

k – число промежуточных границ между началом и концом балки.

При выводе уравнений (1.1) и (1.2) считали, что распределенная нагрузка действует от точки $x = c_4$ до конца балки. Если такая нагрузка действует на участке от $x = c_4$ до $x = c_5$, то ее можно рассматривать как результат наложения двух нагрузок, показанных на рис. 1.2. В уравнения обязательно добавляются слагаемые, учитывающие действие компенсирующей нагрузки (см. пример 2).

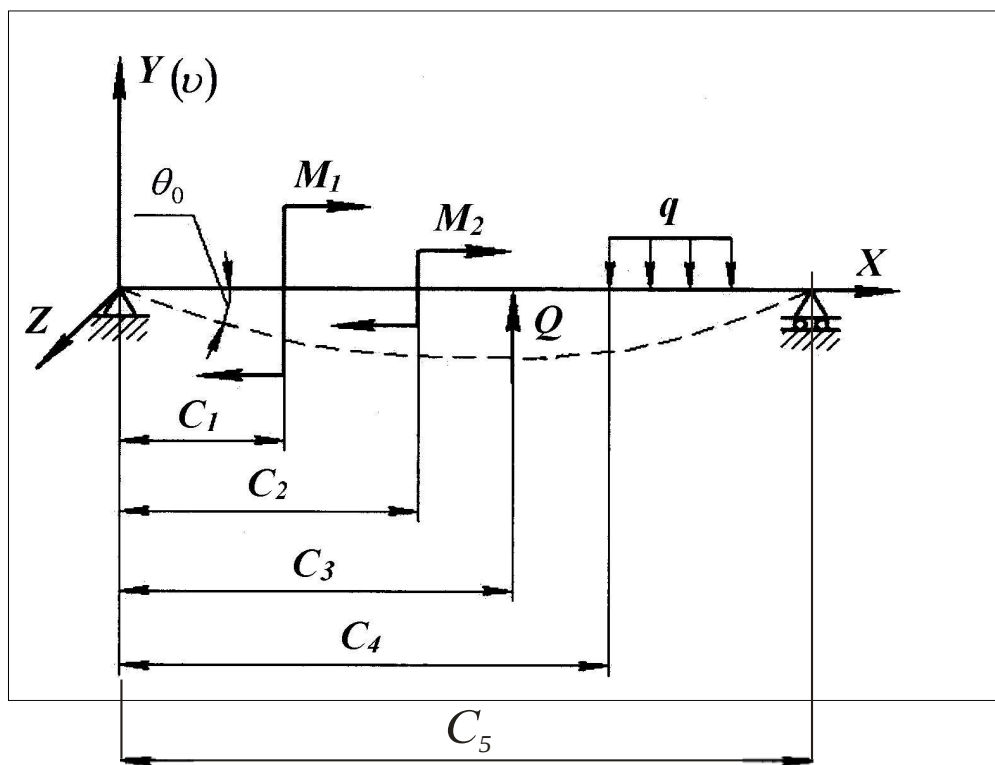


Рис. 1.1.

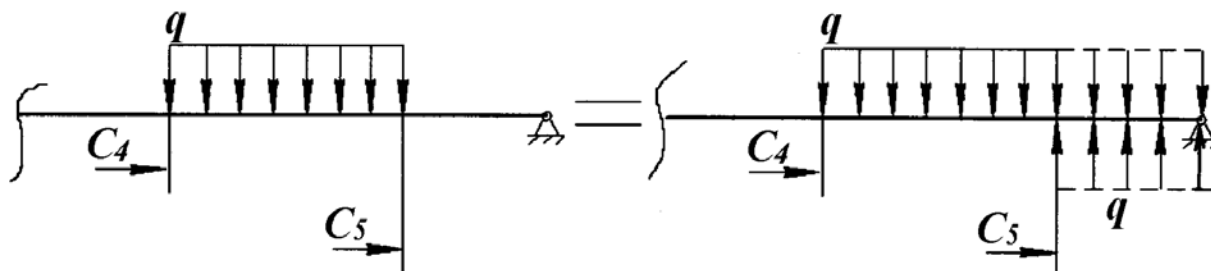


Рис. 1.2.

Порядок составления уравнения

1. Выбираем систему координат. Система координат правая – начало координат на левом краю балки.
2. Записываем граничные условия в начале координат для перемещений и усилий.
3. Записываем уравнение (1.1) с учетом известных перемещений и усилий в начале координат (п. 2).
4. Определяем, если это необходимо, неизвестные перемещения в начале координат из граничных условий, используя уравнение (1.1) (п. 3).;
5. Окончательно записываем уравнение изогнутой оси балки, подставив в него перемещения в начале координат.

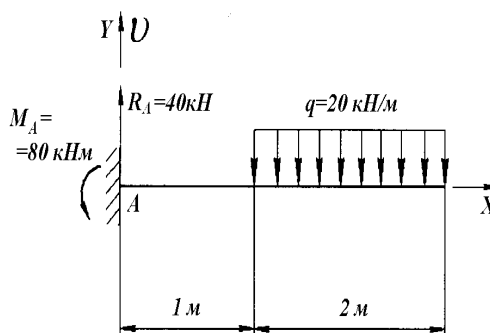
Правило знаков

1. Ось ν направлена вверх, поэтому положительный прогиб откладываем вверх, отрицательный вниз.
2. Знаки усилий определяем по правилу, принятому при построении эпюр Q и M .

П р и м е р ы

1. Консольная балка

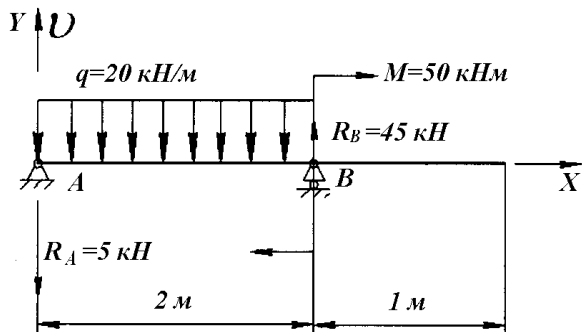
Граничные условия	
$x = 0$	$x = 1\text{ м}$
$\nu_0 = 0$	$\Delta q = -20\text{ кН/м}$
$\theta_0 = 0$	
$M_0 = -80\text{ кНм}$	
$Q_0 = +40\text{ кН}$	
$q_0 = 0$	



$$EJv = M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + \left| \Delta q_1 \frac{(x-1)^4}{24} \right|_{x>1};$$

$$EJv = -80 \frac{x^2}{2} + 40 \frac{x^3}{6} - \left| 20 \frac{(x-1)^4}{24} \right|_{x>1}.$$

2. Двухопорная балка



Граничные условия

$x = 0$	$x = 2\text{ м}$
$v_0 = 0$	$\Delta M_1 = 50 \text{ кНм}$
$\theta_0 \neq 0$	$\Delta Q_1 = 45 \text{ кН}$
$M_0 = 0$	$\Delta q_1 = 20 \text{ кН/м}$
$Q_0 = -5 \text{ кН}$	
$q_0 = -20 \text{ кН/м}$	

$$EJ_z v = EJ\theta_0 \cdot x + Q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 \frac{x^4}{24} + \left| + \Delta M_1 \frac{(x-2)^2}{2} + \Delta Q_1 \frac{(x-2)^3}{6} + \Delta q_1 \frac{(x-2)^4}{24} \right|_{x>2};$$

$$EJ_z v = EJ\theta_0 \cdot x - 5 \frac{x^3}{6} - 20 \frac{x^4}{24} + \left| + 50 \frac{(x-2)^2}{2} + 45 \frac{(x-2)^3}{6} + 20 \frac{(x-2)^4}{24} \right|_{x>2}.$$

Определяем θ_0 из условия: $x = 2 \text{ м}$, $v = 0$

$$0 = EJ\theta_0 \cdot 2 - 5 \cdot \frac{2^3}{6} - 20 \cdot \frac{2^4}{24};$$

$$EJ\theta_0 = +53,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Окончательно

$$EJ_z v = 53,33 \cdot x - 5 \frac{x^3}{6} - 20 \frac{x^4}{24} + \left| + 50 \frac{(x-2)^2}{2} + 45 \frac{(x-2)^3}{6} + 20 \frac{(x-2)^4}{24} \right|_{x>2}.$$

2. Правило Мора-Верещагина (графический способ вычисления интеграла Мора)

Кроме метода начальных параметров существует эффективный универсальный метод определения перемещений в балках, рамах и упругих конструкциях произвольной конфигурации – метод Мора. Упругое перемещение Δ (либо прогиб v , либо угол поворота сечения θ) определяется по формуле:

$$\Delta = \int_l \frac{M_p \bar{M}}{EJ} dx, \quad (1.3)$$

где M_p – изгибающий момент от заданной нагрузки; $\bar{M}$ – изгибающий момент от единичной силы, приложенной в той точке, в которой определяется перемещение.

Упрощение операций интегрирования возможно для конструкций с прямолинейной осью постоянной жесткости и основано на том, что эпюры от единичных усилий на прямолинейных участках оказываются линейными. Рассматривая эту процедуру применительно к участку балки, преобразуем интеграл Мора с учетом этой особенности. На рис. 1.3 сверху показан участок балки с эпюрой M_p общего вида, а внизу эпюра $\bar{M}$, представляющая собой линейную функцию. В результате несложного расчета (подробности смотри в учебнике) установлено, что интеграл произведения двух функций M_p и $\bar{M}$ численно равен площади эпюры M_p , умноженной на величину момента, взятого с эпюры $\bar{M}$ в сечении, соответствующем центру тяжести эпюры M_p .

$$\Delta = \int_l \frac{M_p \bar{M}}{EJ_z} dx = \frac{\omega \cdot m}{EJ_z}. \quad (1.4)$$

Δ – обобщённое перемещение: либо прогиб v , либо угол поворота θ . Если вычисляем прогиб, то в этой точке по направлению искомого прогиба к ненагруженной балке прикладываем единичную силу $\bar{P}=1$ и строим эпюру $\bar{M}$. Если вычисляем угол поворота θ , то к ненагруженной балке в этой точке по направлению искомого углового перемещения прикладываем единичный момент $\bar{M}=1$ и строим эпюру $\bar{M}$.

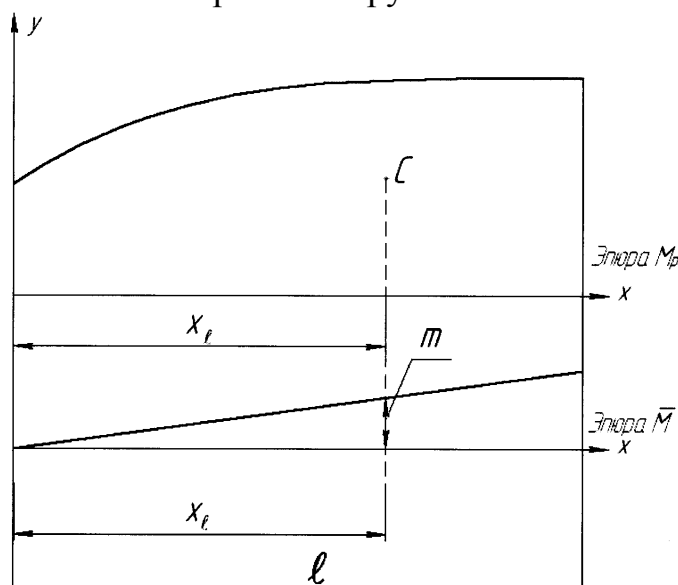


Рис. 1.3.

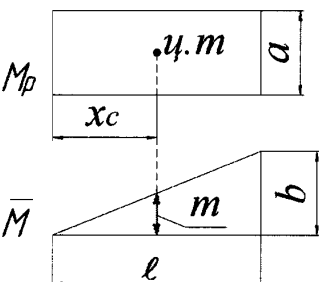
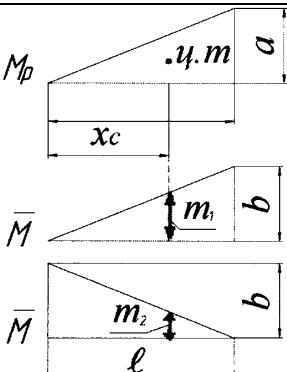
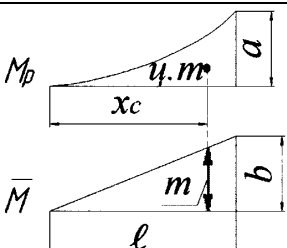
Если балка имеет несколько участков по длине, формула Верещагина будет иметь вид

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \cdot m_i}{EJ_z}, \quad (1.5)$$

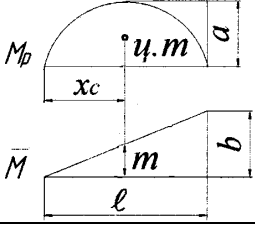
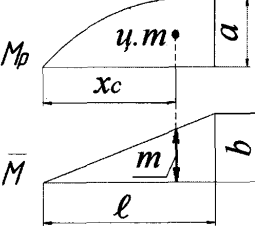
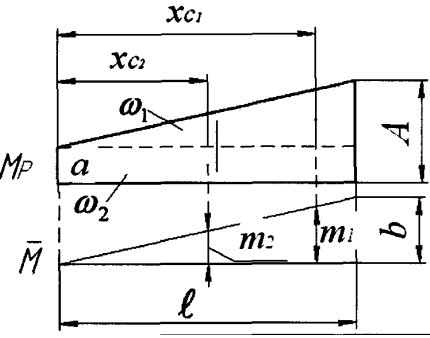
где ω_i – площадь эпюры моментов от внешней нагрузки (грузовой эпюры); m_i – ордината единичной эпюры под центром тяжести грузовой эпюры; n – число участков по длине балки.

При пользовании этой формулой надо уметь вычислять площади и координаты центров тяжести основных фигур: прямоугольника, прямолинейного треугольника и криволинейного треугольника. Минимально необходимые справочные данные приведены в табл. 1.1. Процедуру графического вычисления называют «перемножением» эпюр.

Таблица 1.1

Эпюры M_p и $\bar{M}$	Площадь грузовой опоры	Ордината единичной эпюры m , координата центра тяжести x_c
1	2	3
	$\omega = a \cdot l$	$m = \frac{1}{2}b;$ $x_c = \frac{1}{2}l.$
	$\omega = \frac{1}{2} a \cdot l$	$m_1 = \frac{2}{3}b;$ $m_2 = \frac{1}{3}b;$ $x_c = \frac{2}{3}l.$
	$\omega = \frac{1}{3} a \cdot l$	$m = \frac{3}{4}b;$ $x_c = \frac{3}{4}l.$

Окончание табл. 1.1

Эпюры M_p и $\bar{M}$	Площадь грузовой опоры	Ордината единичной эпюры m , координата центра тяжести x_c
1	2	3
	$\omega = \frac{2}{3} a \cdot l$	$m = \frac{1}{2} b$ $x_c = \frac{1}{2} l$
	$\omega = \frac{2}{3} a \cdot l$	$m = \frac{5}{8} b$ $x_c = \frac{5}{8} l$
	$\omega = \frac{a + A}{2} l =$ $= \frac{1}{2} (A - a) \cdot l + a \cdot l$	$x_{c1} = \frac{2}{3} l$ $x_{c2} = \frac{1}{2} l$ $m_1 = \frac{2}{3} b$ $m_2 = \frac{1}{2} b$

Примечания: 1. Все кривые в табл. 1.1 – квадратные параболы; 2. При «перемножении» эпюр одного знака их произведение положительно; 3. При «перемножении» эпюр разных знаков их произведение отрицательно.

В случае, если эпюра M_p тоже линейная, операция перемножения обладает свойством коммутативности: безразлично, умножается ли площадь грузовой эпюры на ординату единичной или площадь единичной на ординату грузовой.

Рассмотрим на примере расчетной схемы, показанной на рис. 1.4, порядок решения задач при определении перемещения с помощью правила Мора-Верещагина. Определим прогиб в точке C .

Чтобы построить эпюры M_p и $\bar{M}$, можно не определять опорные реакции: достаточно сосчитать момент на опоре B от нагрузки на консоли,

построить эпюру на консоли, а затем соединить прямой линией значение M на опоре B с нулем на опоре A .

В соответствии с формулой (1.5)

$$v_c = \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i \cdot m_i}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left[\underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 24 \right)}_{\omega_1} \underbrace{\left(-\frac{2}{3} \cdot 2 \right)}_{m_1} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 24 \right)}_{\omega_2} \underbrace{\left(-\frac{3}{4} \cdot 2 \right)}_{m_2} \right] = \frac{72}{EJ}.$$

Знак «+» означает, что перемещение происходит в направлении единичной силы.

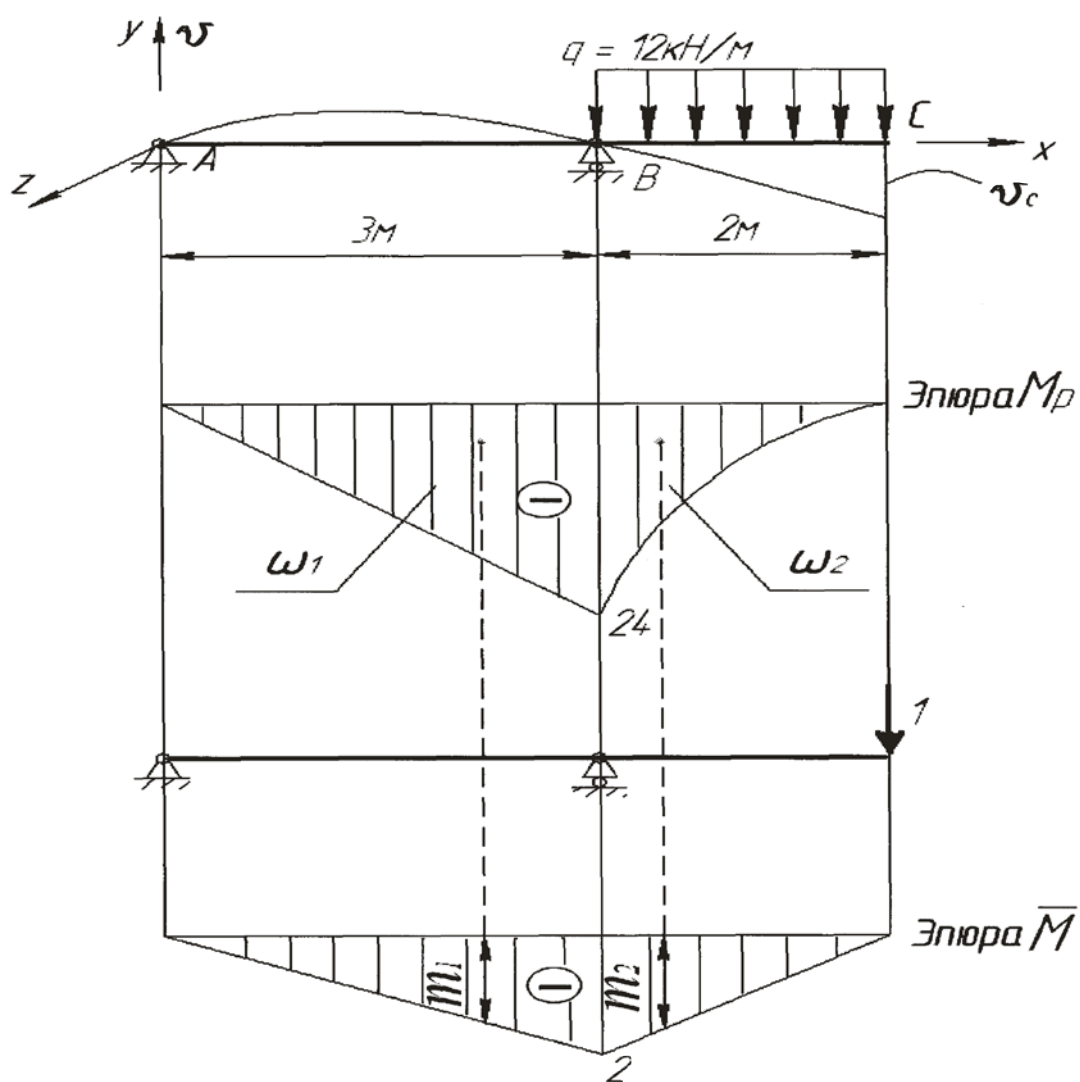


Рис. 1.4.

3. Метод сил

Данный метод применяется для расчета статически неопределимых конструкций. В качестве неизвестных принимаются реакции опор или внутренние усилия. Порядок расчета рассмотрим на примере простой балки, степень статической неопределимости которой равна единице (рис. 1.5,а).

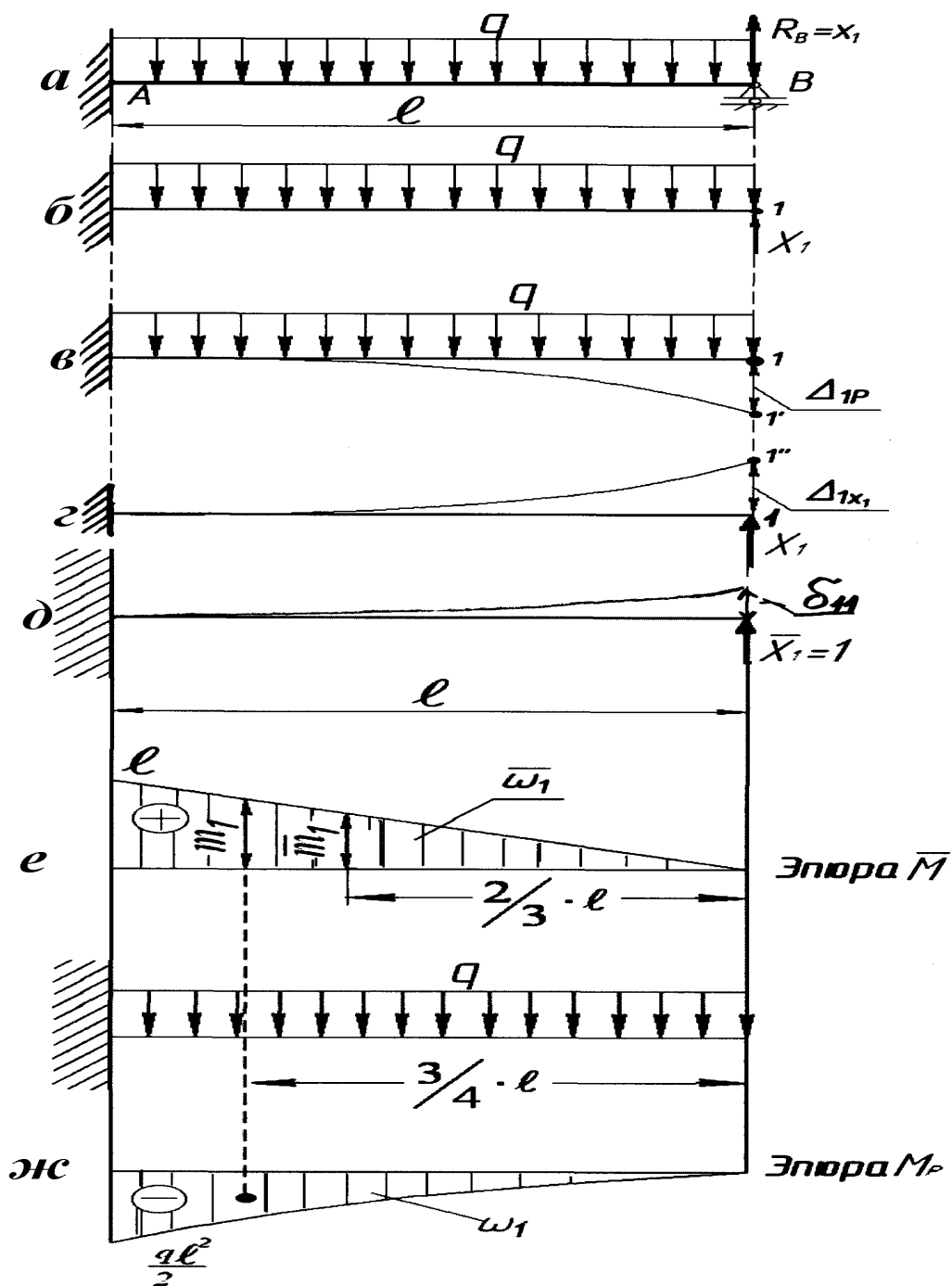


Рис. 1.5.

Отбрасываем «лишнюю» связь, превращая тем самым заданную балку в статически определимую. Полученная балка называется *основной системой*. В качестве «лишней» неизвестной может быть взята любая, не равная нулю реакция (реакция опоры R_B или момент в заделке M_A), или изгибающий момент в любом поперечном сечении. Для рассматриваемой балки самое простое – убрать правую опору. Тогда «лишняя» неизвестная – реакция этой опоры $R_B = X_1$.

Загружаем основную систему заданной внешней нагрузкой и «лишней» неизвестной. Получим так называемую эквивалентную систему (рис. 1.5,б).

Составляем условие совместности деформаций. Оно состоит в отрицании вертикального перемещения точки B

$$\Delta_1 = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1p} = 0, \quad (1.6)$$

где Δ_1 – перемещение точки приложения силы X_1 по направлению ее действия; Δ_{1X_1} – перемещение точки приложения силы X_1 , вызванное действием этой силы (рис. 1.5,г); Δ_{1p} – перемещение точки приложения силы X_1 , вызванное действием внешней нагрузки (рис. 1.5,в).

Перемещение от неизвестной X_1 удобно представить в виде:

$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11} \cdot X_1,$$

где δ_{11} – перемещение, вызванное действием единичной силы $\overline{X_1} = 1$, приложенной в направлении действия силы X_1 по направлению ее действия (рис. 1.5,д). Таким образом, уравнение (1.6) принимает вид:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0. \quad (1.7)$$

Здесь уравнение совместности деформаций записано в стандартной (канонической) форме. Оно имеет такую форму вне зависимости от того, какая принята «лишняя» неизвестная – сила или момент.

Найдем коэффициенты уравнения (1.7) по правилу Верещагина (рис. 1.5,е,ж).

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{\omega_i} \cdot \overline{m_i}}{EJ_z}. \quad (1.8)$$

В нашем случае количество участков $n=1$.

$$\delta_{11} = \frac{\overline{\omega}_i \cdot \overline{m}_i}{EJ_z} = \frac{1}{EJ} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \right)}_{\overline{\omega}_1} \underbrace{\left(\frac{2}{3} \cdot \ell \right)}_{\overline{m}_1} \right] = \frac{\ell^3}{3EJ},$$

где $\overline{\omega}_1$ – площадь эпюры $\overline{M}_1$; $\overline{m}_1$ – ордината под центром тяжести указанной площади, измеренная на той же эпюре $\overline{M}$. Мы «перемножили» эпюру саму на себя.

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_1 \cdot m_1}{EJ_z} = \frac{1}{EJ_z} \left[\underbrace{\left(\frac{-1}{3} \cdot \frac{q\ell^2}{2} \cdot \ell \right)}_{\omega_1} \underbrace{\left(\frac{3}{4} \cdot \ell \right)}_{m_1} \right] = \frac{-q\ell^4}{8EJ}.$$

После подстановки значений δ_{11} и Δ_{1P} в (1.7) получим

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-q\ell^4 \cdot 3EJ}{8EJ \cdot \ell^3} = \frac{3}{8}q\ell.$$

Далее строим эпюры Q и M так же, как мы это делали при расчете статически определимых балок (рис. 1.6). Задача решена, статическая неопределенность раскрыта.

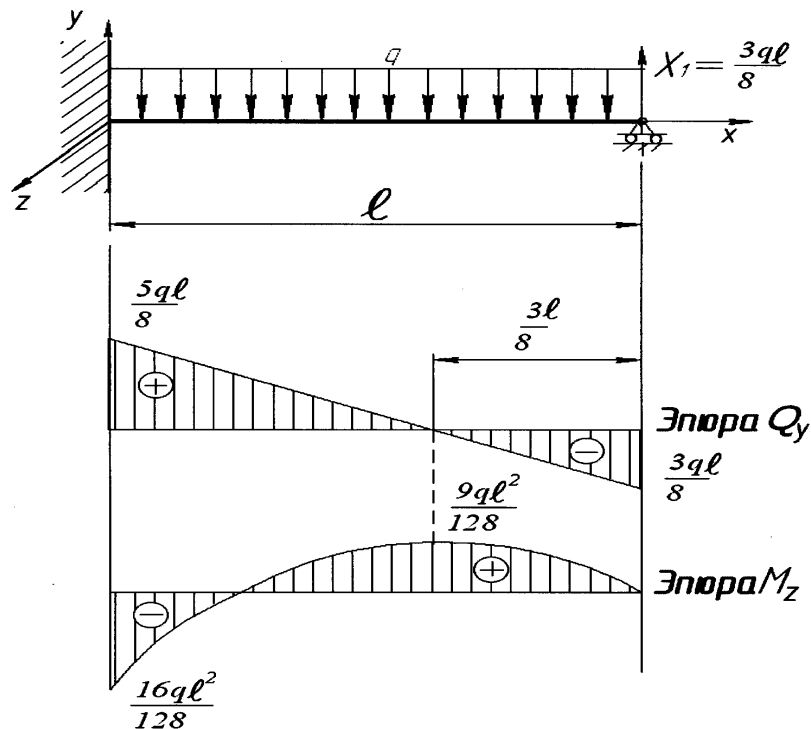


Рис. 1.6.

Для балки или рамы, которые имеют степень статической неопределимости более единицы, условие совместности деформаций представляет собой систему уравнений, которую записывают в каноническом виде.

Например, для дважды статически неопределимой балки она имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2P} = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

где δ_{11} – перемещение от единичной нагрузки, приложенной в точке приложения силы X_1 , в направлении действия силы X_1 ; δ_{12} – перемещение от единичной нагрузки, приложенной в точке приложения силы X_1 , в направлении действия силы X_2 ; δ_{21} – перемещение от единичной нагрузки, приложенной в точке приложения силы X_2 , в направлении действия силы X_1 ; δ_{22} – перемещение от единичной нагрузки, приложенной в точке приложения силы X_2 , в направлении действия силы X_2 . Установлено, что $\delta_{21} = \delta_{12}$, Δ_{1P} – перемещение от внешней нагрузки в направлении действия силы X_1 ; Δ_{2P} – перемещение от внешней нагрузки в направлении действия силы X_2 .

4. Особенности построения эпюр внутренних усилий в рамах

Рама – это стержневая система, состоящая из двух и более стержней, лежащих в одной плоскости и жестко соединенных в местах стыков.

Порядок построения эпюр внутренних усилий (эпюра Q , эпюра M) аналогичен тому, как это делается для балок с несколькими участками и прямолинейной осью, с той лишь разницей, что оси отдельных участков стержней на раме не лежат на одной линии. В этой связи правило знаков для Q и M , принятое при построении эпюр в балках, неудобно. Для удобства построения эпюр внутренних усилий в рамах принимаем правило построения эпюр внутренних усилий на сжатом волокне стержней, составляющих раму.

Рассмотрим раму, состоящую из двух стержней AB и BC с опорой в точке C в виде жесткой заделки (рис. 1.7). Стержни AB и BC жестко соединены в точке B (в процессе деформации под действием внешней нагрузки $\alpha = 90^\circ - \text{const}$). Построим эпюру внутренних изгибающих моментов для такой стержневой системы.

Для построения эпюры M (рис. 1.8) необходимо вычислить значения внутренних изгибающих моментов на левой и правой границах каждого из стержней, составляющих раму. Это можно сделать путем составления уравнения внутренних изгибающих моментов для участков рамы, с последующей подстановкой в них координат точек, где вычисляется внутреннее усилие, или путем непосредственного определения значений внутренних усилий в заданных точках. Двигаясь со свободного края рамы (стержня AB) вычислим моменты в точках A и B . Соответственно $M_A = 0$, $M_B = 20$ кНм. В стержне AB при действии силы P будут сжаты нижние волокна, поэтому значения моментов откладываем вниз от оси стержня AB . Завершаем построение эпюры M на стержне AB , соединив точки $M_A = 0$ кНм и $M_B = 20$ кНм прямой линией. Далее рассматриваем стержень BC . Все нагрузки, приложенные к стержню AB , приводим к точке B . Анализ напряженного состояния стержня BC показывает, что он нагружен сжимающей силой $P = 20$ кН и изгибающим моментом $M = 20$ кНм.

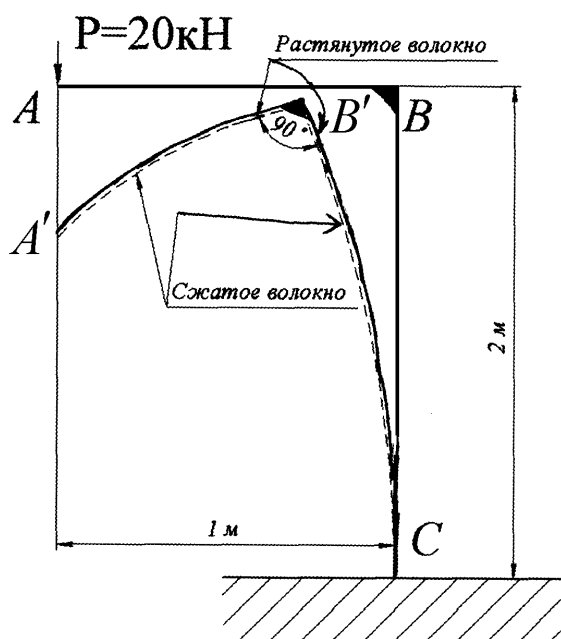


Рис. 1.7.

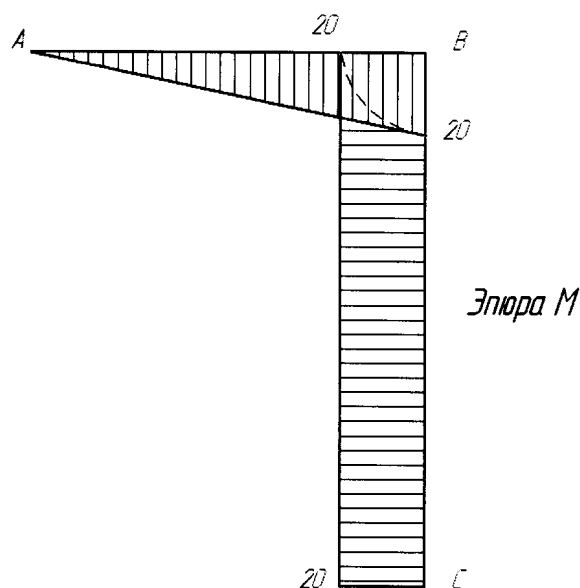


Рис. 1.8.

Таким образом, на стыке стержней AB и BC внутренний изгибающий момент будет равен 20 кНм. Так как никаких других изгибающих нагрузок на стержень BC не действует, внутренний изгибающий момент будет постоянным на участке BC . Откладываем значение 20 кНм слева от оси стержня BC в точки B и C и соединяем эти точки прямой линией; слева – потому что волокна слева от оси стержня будут сжаты. Так как сжимающая нагрузка P , приложенная к стержню BC , не является определяющей, то на

этапе расчета на изгиб рамы ею пренебрегаем. Она будет учтена при проверочном расчете, который выходит за рамки задания.

Примеры расчета

Часть I. Расчет на прочность и жёсткость статически неопределимой балки

З а д а н и е

Для балки, выбранной на рис. 1.9, выполнить следующие расчеты:

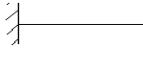
1. Раскрыть статическую неопределимость, используя метод сил;
2. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M ;
3. Из условия прочности по нормальным напряжениям при изгибе подобрать сечение двутаврового профиля по допускаемым напряжениям $[\sigma] = 200$ МПа. Линейные размеры и величины нагрузок взять в табл. 1.2.
4. С помощью метода начальных параметров определить прогиб в 7-8 точках балки и построить изогнутую ось балки.
5. Подобрать двутавр из условия жесткости, принимая величину допускаемого прогиба $[\nu] = 1/400$ максимальной длины пролета балки.

И с х о д н ы е д а н н ы е

Расчетная схема балки приведена на рис. 1.10,а.

Р е ш е н и е

Определение степени статической неопределимости балки.

Как известно, плоская статически определимая система содержит три связи. При этом защемление  дает три связи, шарнирно неподвижная опора  – две связи, а шарнирно подвижная  – одну связь. Поэтому степень статической неопределимости плоской стержневой системы N определяется по формуле

$$N = C - 3, \quad (1.10)$$

где C – общее число связей; N – степень статической неопределимости системы.

Таблица 1.2

№ строки	Номер схемы	Балка						Номер схемы	Рама					
		l_1	l_2	l_3	P	q	M		l	h	a	P	q	M
		м			кН	кН/м	кНм		м			кН	кН/м	кНм
1	1	1,0	1,5	0,5	10	10	10	1	1,0	2,0	0,4	50	-	-
2	2	1,5	2,0	1,0	20	10	15	2	1,2	2,2	0,5	-	20	-
3	3	2,0	2,5	1,5	30	15	20	3	1,4	2,4	0,6	-	-	100
4	4	2,5	3,0	2,0	40	15	20	4	1,6	2,6	0,7	60	-	-
5	5	3,0	2,5	2,5	50	20	30	5	1,8	2,8	0,8	-	30	-
6	6	2,5	2,0	3,0	60	20	35	6	2,0	3,0	0,9	-	-	120
7	7	2,0	1,5	2,5	70	25	40	7	2,2	3,2	0,8	70	-	-
8	8	1,5	1,0	2,0	80	25	45	8	2,4	3,4	0,7	-	10	-
9	9	1,0	0,5	1,5	90	30	50	9	2,6	3,6	0,6	-	-	150
0	0	0,5	1,0	1,0	100	30	55	0	2,8	3,8	0,5	80	-	-
	е	г	д	в	д	е	а	е	а	б	г	е	е	е

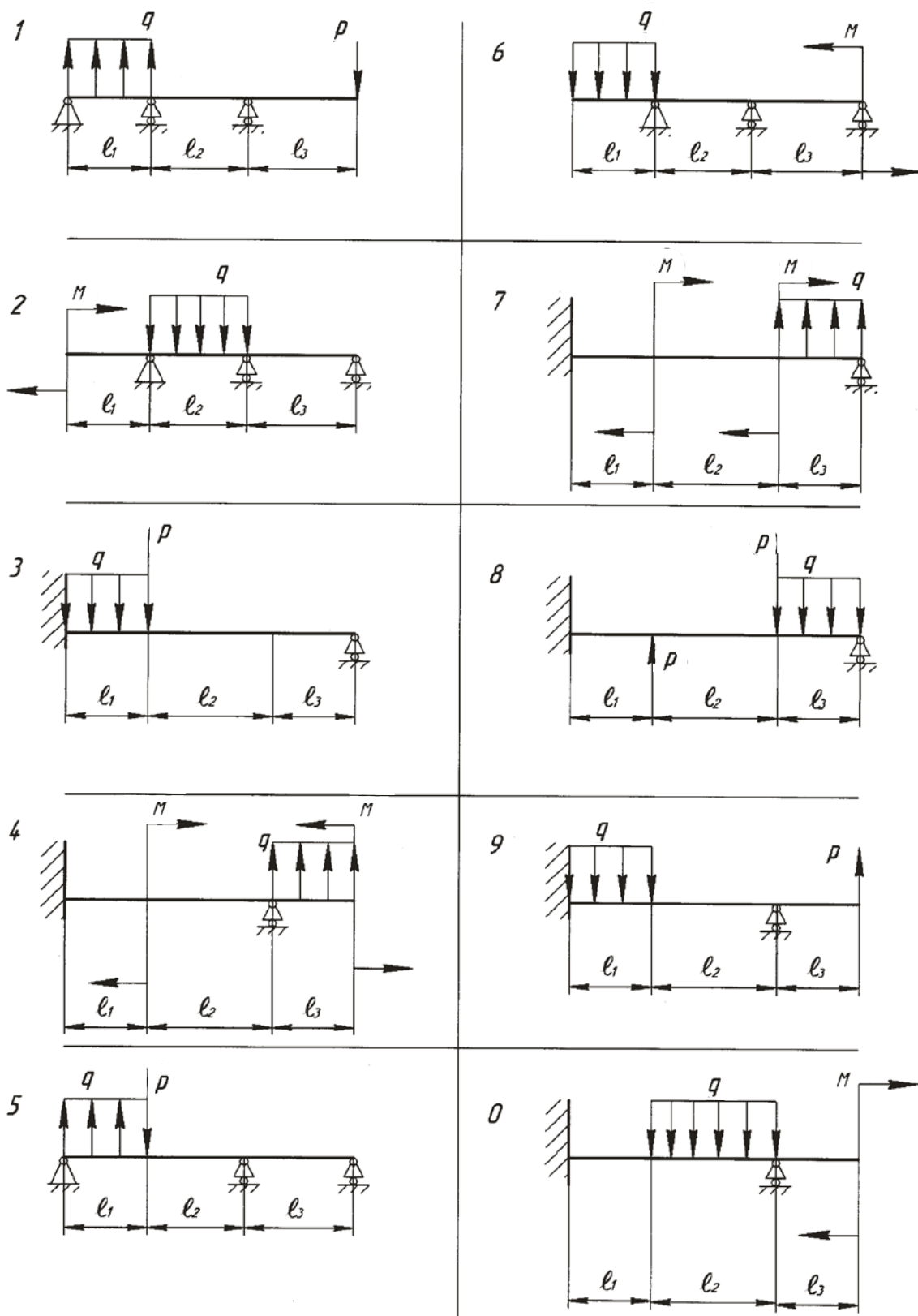


Рис. 1.9.

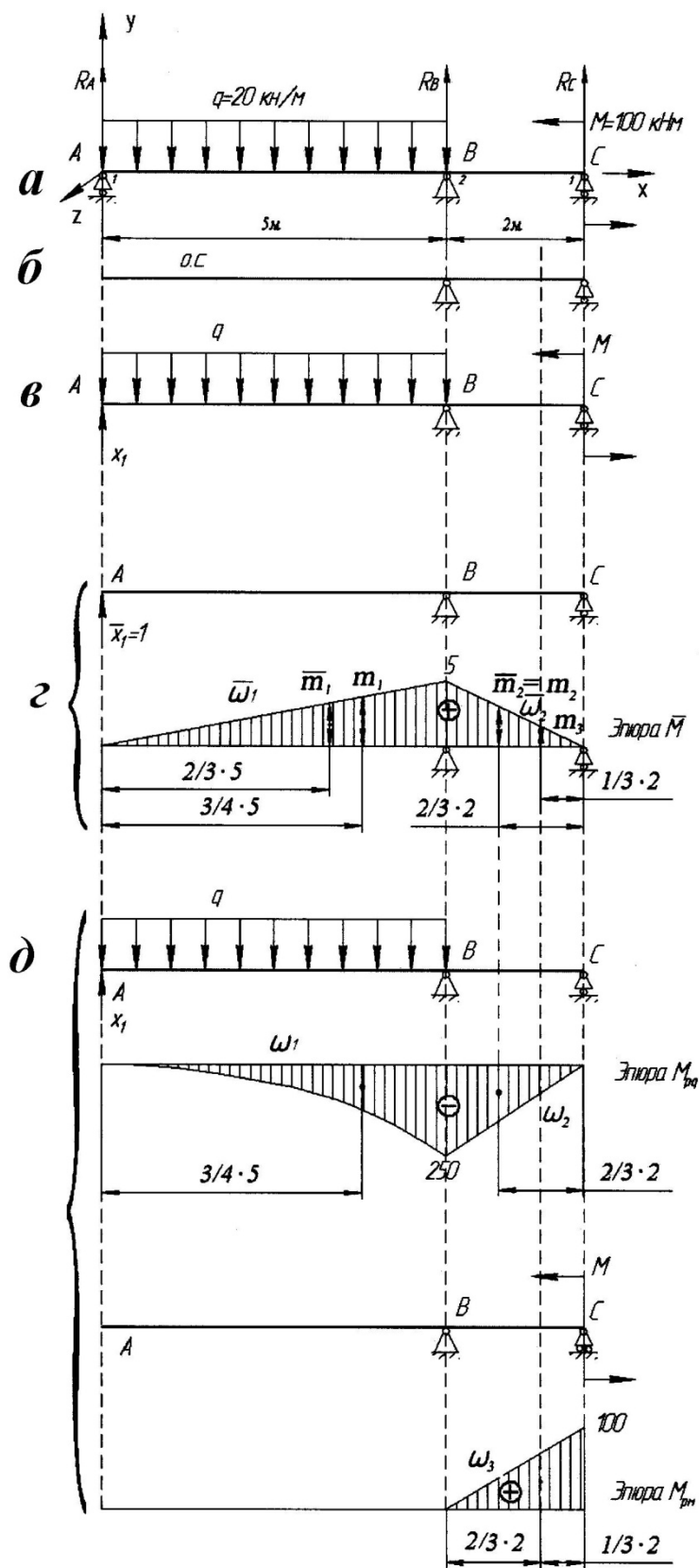


Рис. 1.10.

В нашем случае $C = 2+1+1$, так как имеем две шарнирно подвижных и одну шарнирно неподвижную опору. На схеме (рис. 1.10,а) для каждой опоры проставлено количество связей. Поэтому, используя формулу (1.10), получим $N = 4 - 3 = 1$. Следовательно, в нашем случае балка один раз статически неопределима.

2. Выбираем основную систему (о.с), т.е. статически определимую, геометрически неизменяемую систему, которая получается из исходной статически неопределимой путем отбрасывания «лишних» связей. В нашем случае отбрасываем опору A и полученная о.с. показана на схеме (рис. 1.10,б). Такая схема удобна тем, что в процессе построения эпюр $\bar{M}_1$ и M_p не нужно определять реакции опор, так как эпюры могут быть построены и без определения реакций опор. В некоторых случаях такой подход к решению задачи невозможен и при построении эпюр $\bar{M}_1$ и M_p , предварительно необходимо определять реакции опор.

3. Загружаем о.с. внешней нагрузкой и «лишней» неизвестной X_1 (рис. 1.10,в).

4. Составляем систему канонических уравнений метода сил.

Так как рассматриваемая балка один раз статически неопределима, то для нее записывается одно уравнение (1.7):

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}, \quad (1.11)$$

где δ_{11} – перемещение по линии действия силы X_1 от этой силы, равной единице; Δ_{1p} – перемещение по линии действия силы X_1 от внешней нагрузки.

Для определения коэффициентов δ_{ij} и Δ_{ip} используем правило Верещагина. Если эпюры изгибающих моментов M_p или $\bar{M}$ содержат несколько участков, то правило Верещагина должно быть использовано для каждого из участков по отдельности.

Поэтому в общем случае искомое перемещение, например Δ_{1p} , определяется по формуле

$$\Delta_{1p} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i m_i}{EJ_z}, \quad (1.12),$$

где n – количество участков, на которые разбиваются эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_1$ и M_p ; ω_i – площадь грузовой эпюры, т.е. эпюры M_p на i -м участке; m_i – ордината эпюры $\overline{M}$ на i -м участке, расположенная под центром тяжести эпюры M_{pi} ; EJ – жесткость стержня.

5. Определяем коэффициент δ_{11} .

Для этого предварительно строим в о.с. эпюру изгибающего момента $\overline{M}$ от действия силы $\overline{X}_1$ (рис. 1.10,г.). Далее, используя формулу (1.8), «умножаем» эпюру $\overline{M}_1$ саму на себя. Получим

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{1}{EJ_z} [\overline{\omega}_1 \cdot \overline{m}_1 + \overline{\omega}_2 \cdot \overline{m}_2] = \frac{1}{EJ_z} \left[\left(\frac{5 \cdot 5}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \right) + \left(\frac{5 \cdot 2}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left(\frac{125}{3} + \frac{50}{3} \right) = \frac{175}{3EJ_z},\end{aligned}$$

где $\overline{\omega}_1 = \frac{5 \cdot 5}{2}$ – площадь первого участка эпюры $\overline{M}_1$; $\overline{m}_1 = \frac{2}{3} \cdot 5$ – ордината центра тяжести площади первого участка эпюры $\overline{M}_1$; $\overline{\omega}_2 = \frac{5 \cdot 2}{2}$ – площадь второго участка эпюры $\overline{M}_1$; $\overline{m}_2 = \frac{2}{3} \cdot 5$ – ордината центра тяжести площади второго участка эпюры $\overline{M}_1$.

6. Определяем коэффициент Δ_{1p} .

Для определения коэффициента Δ_{1p} необходимо построить эпюру изгибающего момента M_p от действия внешней нагрузки, приведенной на рис. 1.10,в. Для упрощения процесса перемножения эпюр будем строить эпюры внутренних изгибающих моментов от каждой внешней нагрузки отдельно, используя принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). Результат построения показан на рис. 1.10,д. При этом нет необходимости предварительно определять реакции опор. Достаточно на консоли АВ построить эпюру изгибающего момента от распределенной нагрузки q (M_{pq}) (это вогнутая парабола с высотой 250 кНм) и соединить ординату эпюры M_{pq} на опоре В с ординатой эпюры M_{pq} на опоре С, равной 0. Аналогично определив ординаты эпюры M_{pM} на опоре В и на опоре С, соединяем их прямой линией. Очевидно, что $M_p = M_{pq} + M_{pM}$. При этом также очевидно, что для получения результата необходимо перемножить эпюру M_{pq} с эпюрой $\overline{M}$ на двух участках, а эпюру M_{pM} с эпюрой $\overline{M}$ – на одном.

Далее, используя формулу (1.12), «перемножаем» эпюры M_p и $\bar{M}$. При этом на первом участке нужно «умножить» вогнутую параболу на треугольник, на втором – эпюру, состоящую из треугольника – на треугольник, а на третьем – эпюру, состоящую из треугольника – также на треугольник, но с вершинами, не лежащими на одной вертикали.

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_z} (\omega_1 m_1 + \omega_2 m_2 + \omega_3 m_3) =$$

$$= \frac{1}{EJ_z} \left[\left(-\frac{1}{3} \cdot 250 \cdot 5 \right) \left(\frac{3}{4} \cdot 5 \right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot 250 \cdot 2 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 5 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 5 \right) \right] = -\frac{13375}{6EJ_z}.$$

7. Вычисляем значение лишней неизвестной

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-13375 \cdot 3EJ_z}{6EJ_z \cdot 175} = +38,22 \text{ кН}.$$

Так как $R_A = X_1 = 38,22 \text{ кН}$, статическая неопределимость балки раскрыта. Далее решение строится обычным образом для расчета балки на изгиб.

8. Загружаем о.с. внешней нагрузкой и силой X_1 (рис. 1.11,а).

9. Строим эпюру внутренней поперечной силы Q_y и внутреннего изгибающего момента M_z (рис. 1.11,б и рис. 1.11,в). Предварительно необходимо определить реакции опор B и C .

$$\sum M_{ic} = 0 : R_B \cdot 2 + R_A \cdot 7 - q \cdot 5 \cdot 4,5 - M = 0.$$

$$R_B = \frac{-R_A \cdot 7 + q \cdot 5 \cdot 4,5 + M}{2} = \frac{-38,22 \cdot 7 + 20 \cdot 5 \cdot 4,5 + 100}{2} = 141,23 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{iB} = 0 : R_C \cdot 2 - M - q \cdot 5 \cdot 2,5 + R_A \cdot 5 = 0.$$

$$R_C = \frac{M + q \cdot 5 \cdot 2,5 - R_A \cdot 5}{2} = \frac{100 + 20 \cdot 5 \cdot 2,5 - 38,22 \cdot 5}{2} = -79,45 \text{ кН}.$$

Знак минус означает, что реакция R_C направлена в сторону, противоположную предварительно выбранной и направленной вверх. Зачеркиваем R_C и показываем истинное направление реакции опоры.

Проверка:

$$\sum Y_i = 0: R_A - 5q + R_B - R_C = 0; 38,22 - 5,20 + 141,23 - 79,45 = 0.$$

На балке два участка. Составляем уравнения для Q и M на участках:

Участок I: $0 \leq x \leq 5$ м

$$Q_y(x) = R_A - q \cdot x; \quad x = 0; Q_y = 38,22 \text{ кН}; M_z = 0;$$

$$M_z(x) = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2}; \quad x = 5 \text{ м}; Q_y = 61,78 \text{ кН}; M_z = -58,9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке особенная точка $Q_y = 0$. Определяем ее координаты и находим максимальный момент на участке I.

$$R_A - q \cdot x_m = 0; \quad x_m = \frac{R_A}{q} = \frac{38,22}{20} = 1,91 \text{ м};$$

$$M_{\max} = R_A \cdot x_m - \frac{qx_m^2}{2} = 38,22 \cdot 1,91 - \frac{20(1,91)^2}{2} = 36,51 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из анализа эпюры M_z следует, что максимальный по модулю изгибающий момент действует в сечении по опоре C: $|M_z^{\max}| = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

10. Подбираем поперечное сечение балки в виде двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} \leq [\sigma], \quad W_z \geq \frac{|M_z^{\max}|}{[\sigma]} = \frac{100 \cdot 100}{20} = 500 \text{ см}^3.$$

Из сортамента (Прил. 2) выбираем двутавр I №33, у которого момент сопротивления $W_z^I = 597 \text{ см}^3$, момент инерции $J = 9840 \text{ см}^4$. Действующие максимальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z^I} = \frac{100 \cdot 100}{597} = 16,75 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

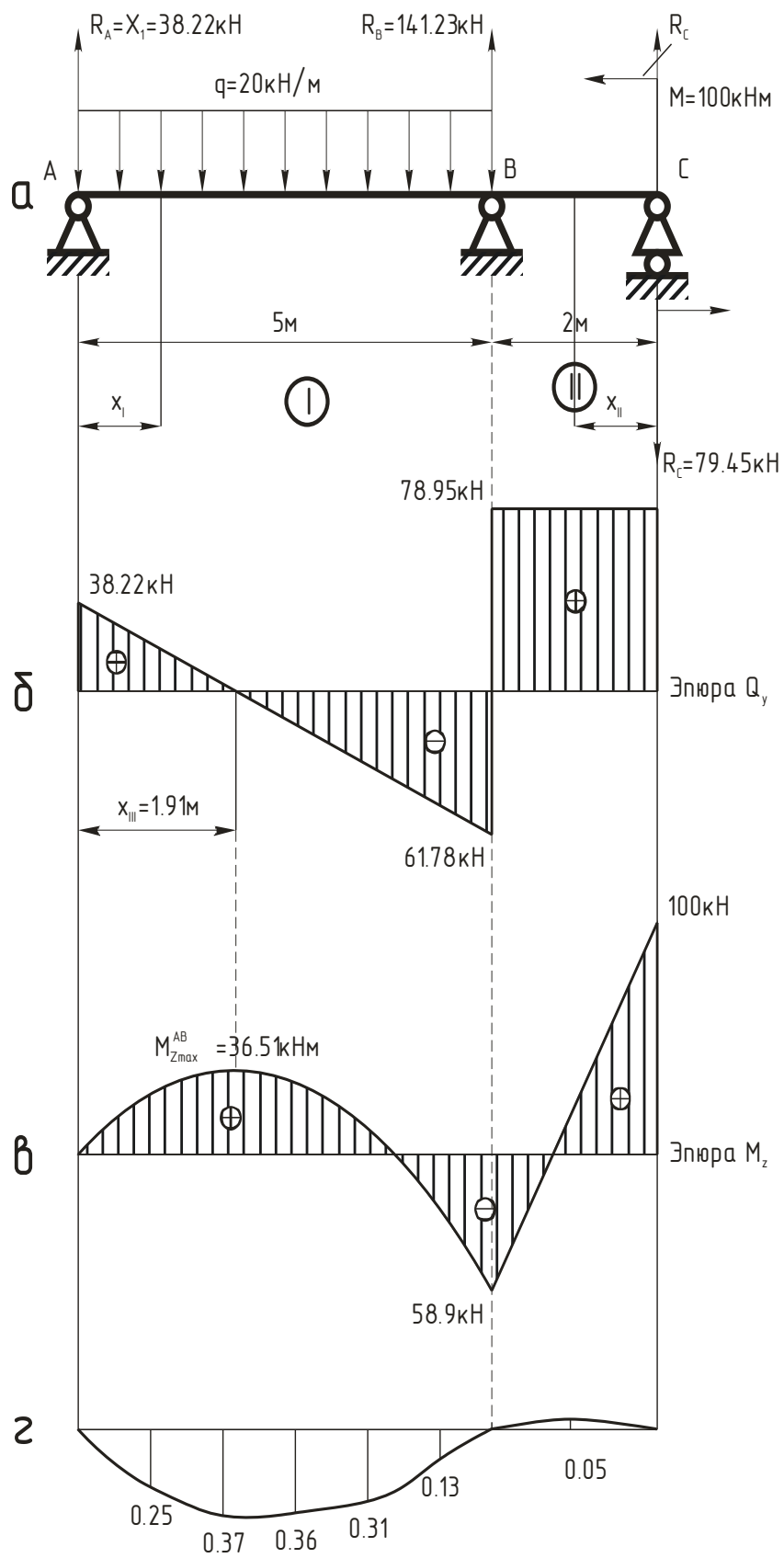


Рис. 1.11.

Максимальные действующие напряжения меньше допускаемых.
Прочность обеспечена.

П р и м е ч а н и е: стандартом допускается превышение максимальных действующих напряжений над допускаемыми, но не более чем на 5%.

11. Для подбора сечения балки из условия жёсткости строим изогнутую ось и определяем максимальный прогиб балки.

Изогнутая ось строится с помощью метода начальных параметров по выражению (1.1), записанному для нашей балки:

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 \cdot x + R_A \cdot \frac{x^3}{3!} - q \cdot \frac{x^4}{4!} \Big|_{x>0} + R_B \cdot \frac{(x-5)^3}{3!} + q \cdot \frac{(x-5)^4}{4!} \Big|_{x>5} \quad (1.13)$$

Начальные параметры найдём из граничных условий

1. при $x = 0$ $v = 0$;
2. при $x = 5$ $v = 0$;
3. при $x = 7$ $v = 0$;

Из первого условия следует $EJv_0 = 0$.

Из второго условия найдём $EJ\theta_0$.

$$0 = EJ\theta_0 \cdot 5 + 38,22 \cdot \frac{5^3}{6} - 20 \cdot \frac{5^4}{24}; \quad EJ\theta_0 = -55,08 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Запишем уравнение (1.13) в окончательном виде

$$EJv = -55,08 \cdot x + 38,22 \cdot \frac{x^3}{6} - 20 \cdot \frac{x^4}{24} \Big|_{x>0} + 141,23 \cdot \frac{(x-5)^3}{6} + 20 \cdot \frac{(x-5)^4}{24} \Big|_{x>5} \quad (1.14)$$

Абсцисса x отсчитывается от левой опоры. Последнее слагаемое формулы (1.14) представляет собой компенсационную нагрузку q . Используем третье граничное условие для проверки правильности определения реакций и записи уравнения изогнутой оси.

$$\begin{aligned} EJv_7 &= -55,08 \cdot 7 + 38,22 \cdot \frac{7^3}{6} - 20 \cdot \frac{7^4}{24} + 141,23 \cdot \frac{2^3}{6} + 20 \cdot \frac{2^4}{24} = \\ &= -385,56 + 2184,91 - 2000,83 + 188,31 + 13,33 = 0,16 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 \end{aligned}$$

$$v_7 = \frac{0,16 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 9840} = 0,0008 \text{ см} = 0.$$

По уравнению (1.14) подсчитаем значения прогибов при $x = 1$, $x = 2$, $x = 2,5$ (в середине пролёта), $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$ (в середине второго пролёта). Результаты вычислений приведены в таблице 1.3

Таблица 1.3

x , м	1,0	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0
v , см	-0,25	-0,37	-0,36	-0,31	-0,13	-0,05

Изогнутая ось (упругая линия) балки построена на рис. 1.11, по данным таблицы (1.3).

12. Проверим жёсткость балки по формуле

$$v_{\max} \leq [v],$$

$$v_{\max} = 0,37 \text{ см}; [v] = \frac{1}{400} \cdot l = \frac{500}{400} = 1,25 \text{ см}. \quad (1.15)$$

Условие (1.15) выполняется, следовательно, жёсткость балки обеспечена. Если условие жёсткости не выполняется, находят момент инерции, удовлетворяющий условию жёсткости:

$$J' = J \cdot \frac{v_{\max}}{[v]}, \quad (1.16)$$

где J' – минимально допустимый момент инерции балки;

J – момент инерции двутавра, принятый из расчёта на прочность;

$v_{\max}$ – максимальный прогиб;

$[v]$ – допускаемый прогиб.

Часть II. Расчет статически неопределимой рамы

З а д а н и е

Для рамы, приведенной на рис. 7 (в гл. 1), выполнить следующие расчеты:

1. Раскрыть статическую неопределимость по методу сил, если жесткость на изгиб всех стержней, образующих раму, $EJ = \text{const}$.

2. Построить эпюры продольных сил N , поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

3. Подобрать сечения стержней рамы из равнобоких уголков, используя условие прочности по нормальным напряжениям, если допускаемые напряжения $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$.

Исходные данные следует взять из табл. 1.2 и рис. 1.12.

И с х о д н ы е д а н н ы е

Вычерчиваем схему рамы и проставляем линейные размеры. Обозначаем и указываем величину внешней нагрузки (рис. 1.13,а).

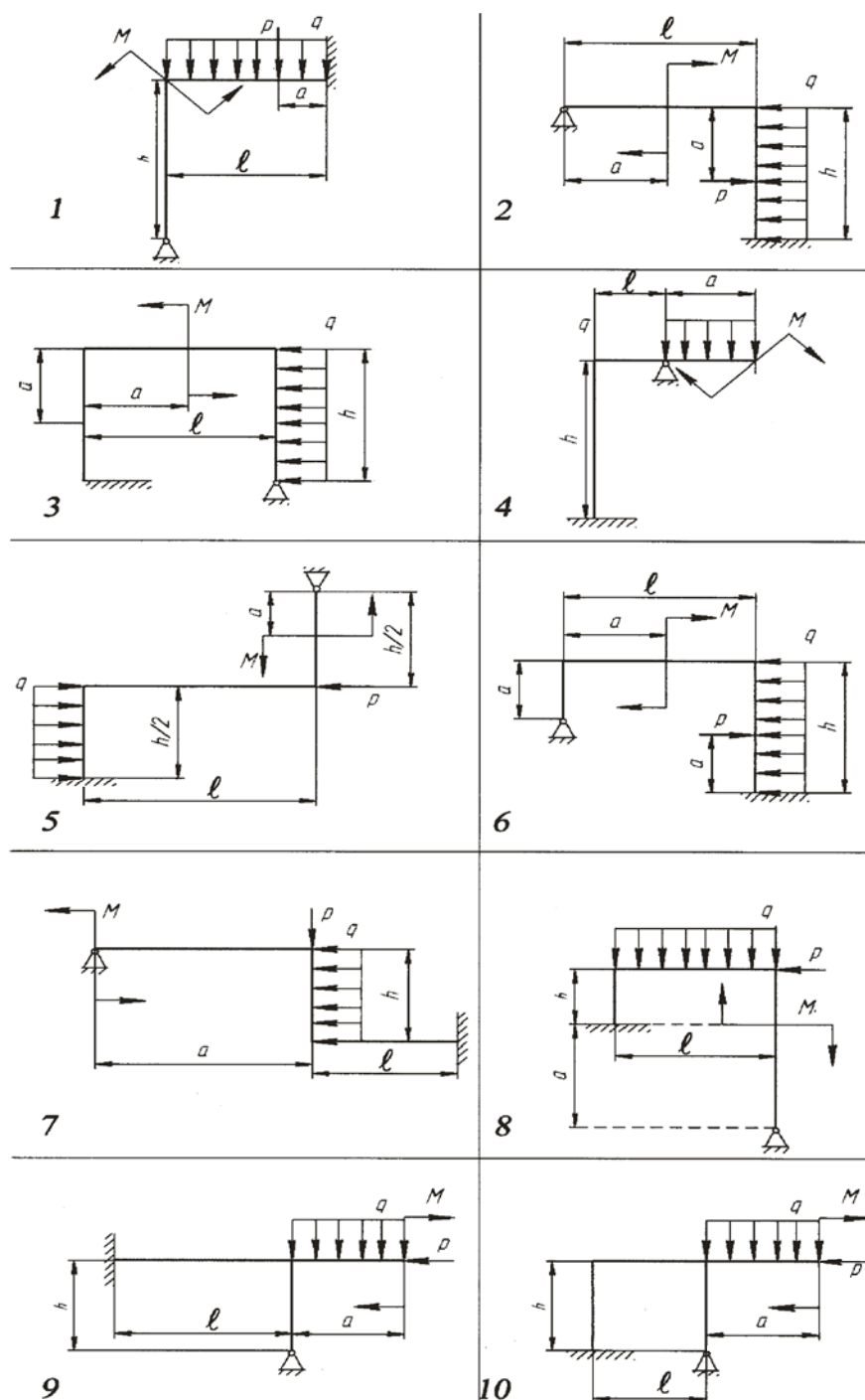


Рис. 1.12.

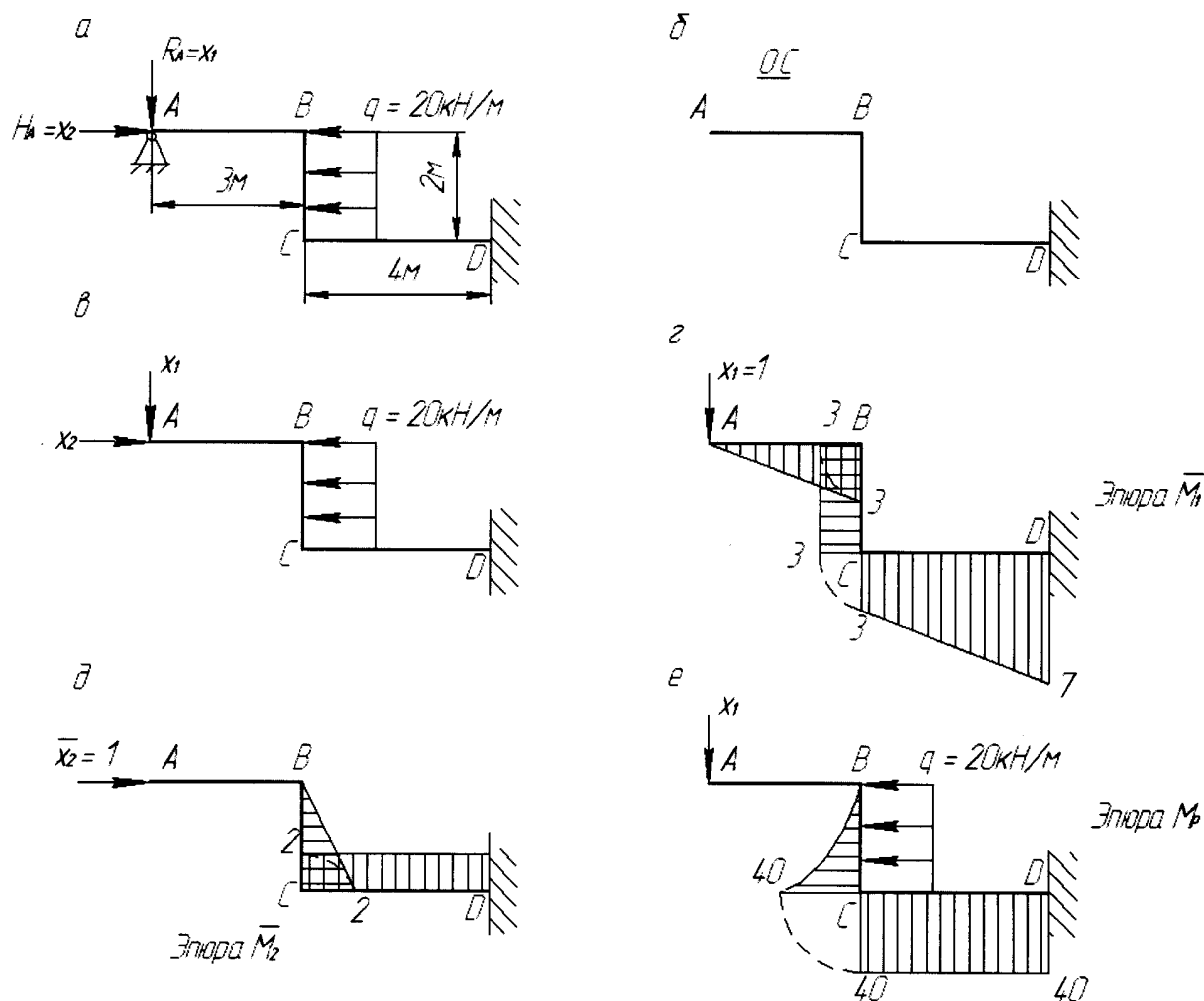


Рис. 1.13.

Р е ш е н и е

1. Вычисляем степень статической неопределимости заданной рамы по формуле (1.10). Рама дважды статически не определима.

$$N=5-3=2.$$

2. Выбираем лишние неизвестные и основную систему (рис. 1.13,б). В качестве лишних неизвестных выбираем составляющие реакции в левой опоре. Составляем эквивалентную систему (рис. 1.13,в). Строим эпюры от единичных нагрузок, приложенных в направлении действия сил X_1 и X_2 (рис. 1.13,г,д) для основной системы. Строим эпюру моментов от внешней нагрузки для основной системы (рис. 1.13,е).

3. Записываем канонические уравнения метода сил для заданной рамы:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

4. Вычисляем коэффициенты системы уравнений.

Эти коэффициенты представляют собой перемещения. Для вычисления используем правило Верещагина. Коэффициент Δ_{1p} определяется путём перемножения эпюр M_p и $\bar{M}_1$, коэффициент δ_{12} – перемножением эпюр $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$, коэффициент δ_{11} – умножением эпюры $\bar{M}_1$ на $\bar{M}_1$ и т.д.

$$\delta_{11} = \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{2}{3} \cdot 4 \right) \right] \frac{1}{EJ} = \frac{397}{3EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left[-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (3+7) \cdot 4 \cdot 2 \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{46}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \right] \frac{1}{EJ} = \frac{56}{3EJ};$$

$$\Delta_{1p} = \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 40 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (3+7) \cdot 40 \cdot 4 \right] \frac{1}{EJ} = \frac{880}{EJ};$$

$$\Delta_{2p} = - \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 40 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 + 4 \cdot 40 \cdot 2 \right] \frac{1}{EJ} = -\frac{360}{EJ}.$$

5. Подставляем коэффициенты в систему уравнений и решаем её.

$$\begin{cases} \frac{397}{3} \cdot X_1 - 46X_2 + 880 = 0; \\ -46 \cdot X_1 + \frac{56}{3}X_2 - 360 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений путем исключения одной неизвестной

$$+ \begin{cases} 132,33X_1 - 46X_2 + 880 = 0; \\ -46X_1 + 18,67X_2 - 360 = 0 \times 2,877. \end{cases}$$

Для решения умножим второе уравнение на коэффициент 2,877 и сложим его с первым уравнением. Получаем

$$0 + 7,714X_2 - 155,72 = 0;$$

$$X_2 = \frac{155,72}{7,714} = 20,187 \text{ кН}.$$

Находим X_1 , подставив полученное значение в первое уравнение

$$132,33X_1 - 46 \cdot 20,187 + 880 = 0;$$

$$X_1 = \frac{46 \cdot 20,187 - 880}{132,33} = 0,371 \text{ кН}.$$

Делаем проверку

$$132,33 \cdot 0,371 - 46 \cdot 20,187 + 880 \approx 0;$$

$$46 \cdot 0,371 + 18,67 \cdot 20,187 - 360 \approx 0.$$

Таким образом, реакции опоры найдены. В дальнейший расчет принимаем

$$R_A = X_1 \approx 0,38 \text{ кН}; H_A = X_2 = 20,2 \text{ кН}.$$

6. Загружаем основную систему внешней нагрузкой и вычисленными реакциями X_1 и X_2 и строим эпюры N , Q и M (рис. 1.14), рассмотренными ранее способами.

Анализ эпюры Q показывает, что на участке BC находится особая точка, в которой $Q = 0$. Следовательно, на эпюре внутренних изгибающих моментов будет экстремум. Определяем это экстремальное значение. Для этого изображаем отдельно участок рамы BC , полагая в точке C опору в виде жесткой заделки. Все нагрузки, приложенные на участке AB , приводим к точке B . Таким образом все условия статики сохранены. Находим расстояние “ m ” из условия равенства нулю Q в точке M (рис. 1.14).

$$Q = 20,2 - 20 \cdot m = 0; m = \frac{20,2}{20} = 1,01 \text{ м}.$$

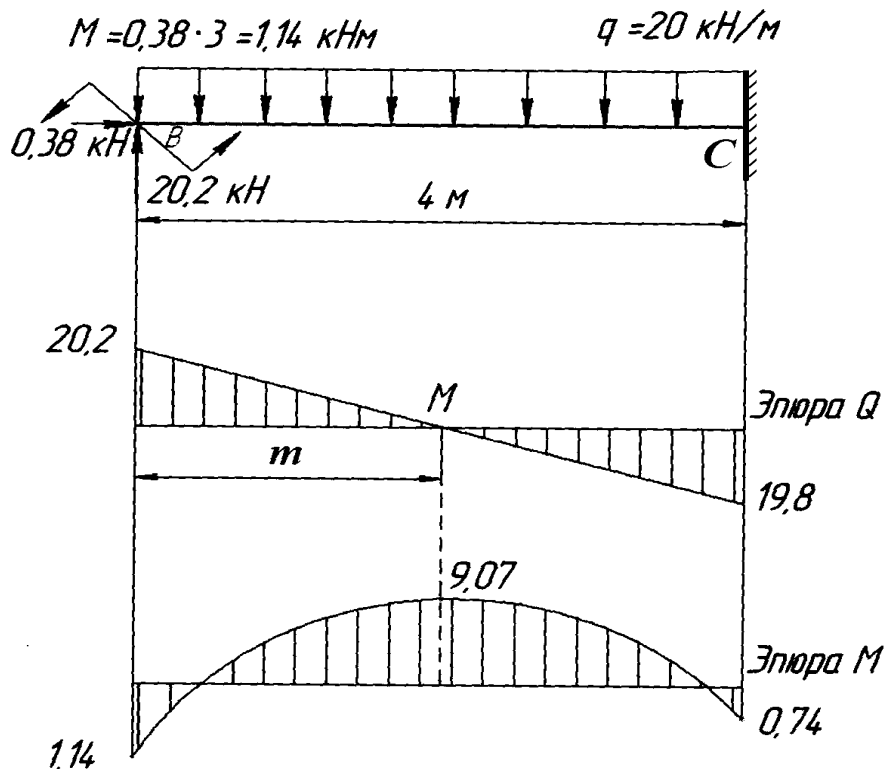


Рис. 1.14.

Определяем момент M_M по следующей формуле:

$$M_M = -1,14 + 20,2 \cdot m - 20 \frac{m^2}{2} =$$

$$= -1,14 + 20,2 \cdot (1,01) - 20 \frac{1,01^2}{2} = 9,061 \text{ кНм} \approx 9,07 \text{ кНм}.$$

Подбираем сечение стержней рамы из условия прочности по нормальным изгибным напряжениям, опасное сечение на участке BC , где $|M_{\max}| = 9,07 \text{ кНм}$. Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} \leq [\sigma],$$

подбираем сечение стержней рамы, не учитывая в первом приближении напряжений, вызванных продольной силой. Наибольший изгибающий момент действует в вертикальном стержне и равен $|M_z^{\max}| = 9,07 \text{ кНм}$.

Продольная сила на этом участке составляет $N = -0,38 \text{ кН}$.

Требуемый момент сопротивления относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой действует изгибающий момент

$$W_z \geq \frac{|M_z^{\max}|}{[\sigma]} = \frac{9,07 \cdot 10^2}{20} = 45,3 \text{ см}^3.$$

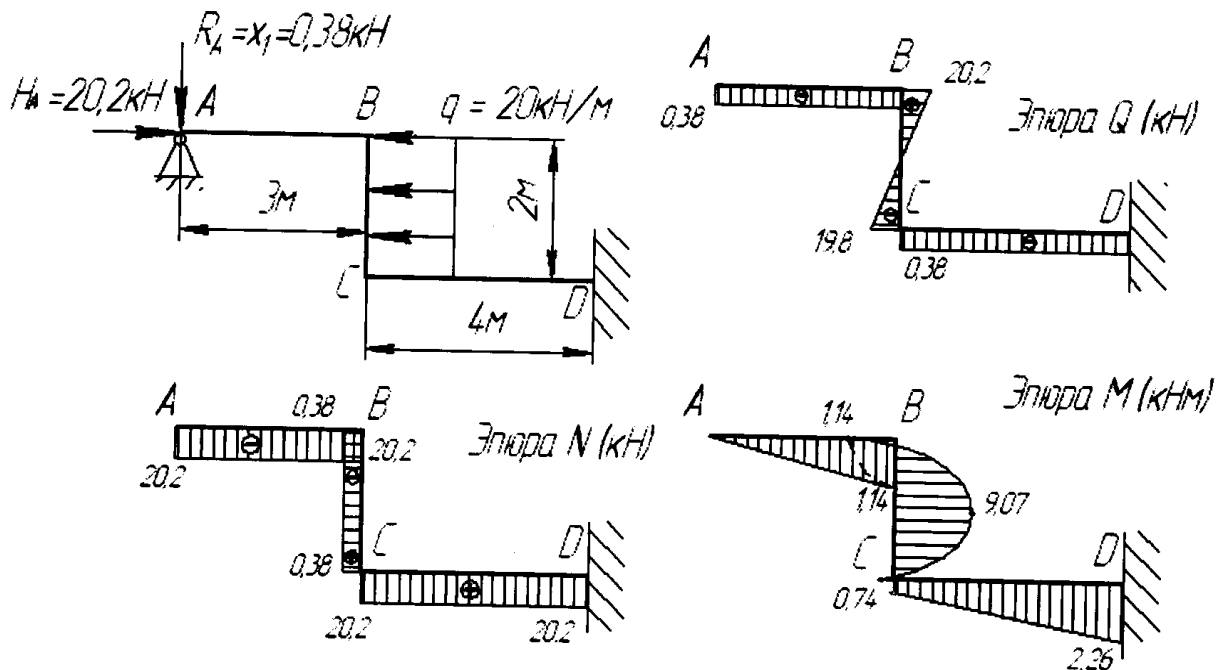
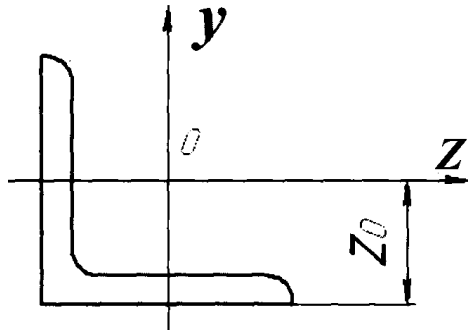


Рис. 1.15.

Из сортамента подбираем равнобокий уголок $\angle$ – 100х100х10 (ГОСТ 8509-86), у которого в соответствии с обозначением осей (Прил. 2)

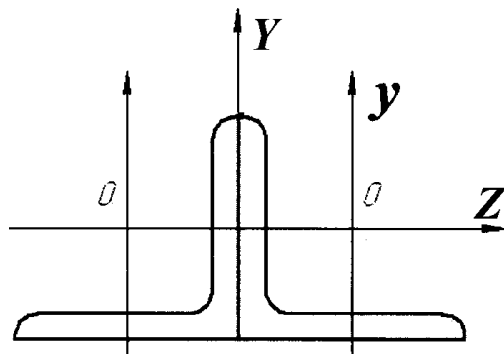


$$\begin{aligned} J_z &= 179 \text{ см}^4; \\ F &= 19,24 \text{ см}^2; \\ b &= 10 \text{ см}; \\ Z_0 &= 2,83 \text{ см}. \end{aligned}$$

Момент сопротивления уголка относительно оси Z

$$W_z = \frac{J_z}{b - Z_0} = \frac{179}{10 - 2,83} = 24,97 \text{ см}^3.$$

Заданное сечение стержня рамы состоит из двух уголков, соединенных полками, поэтому



Сечение стержня

$$\begin{aligned} W_{сеч} &= 2W_z = 2 \cdot 24,97 \approx 50 \text{ см}^3; \\ F_{сеч} &= 2F = 2 \cdot 19,24 = 38,48 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Сделаем проверку прочности с учетом продольной силы, определив максимальные действующие напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{\max}^{\text{дейст}} = \left| \frac{N}{F_{\text{сеч}}} + \frac{M_{\max}}{W_{\text{сеч}}} \right| \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max}^{\text{дейст}} = \frac{0,38}{38,48} + \frac{9,07 \cdot 10^2}{50} = 17,91 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \leq [\sigma] = 20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Прочность рамы обеспечена.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 2

РАСЧЕТ ВАЛА НА ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ. РАСЧЕТ ВАЛА ПРИ ПОВТОРНО-ПЕРЕМЕННОЙ (ЦИКЛИЧЕСКОЙ) НАГРУЗКЕ

Общие указания

Предлагаемая работа состоит из двух частей. В первой части для статически определимого вала производят расчет на прочность и жесткость при совместном действии изгибающей нагрузки в двух плоскостях и крутящего момента. Нагрузка передается на вал посредством шкивов и шестерен (в зависимости от варианта). Во второй части работы для выбранного по условиям жесткости и прочности вала (здесь имеется в виду назначение геометрических размеров поперечного сечения вала) проводится расчет на прочность при повторно-переменной (циклической) нагрузке. Для решения задания необходимо обратиться к лекционному курсу по темам: «Сложное сопротивление» и «Расчет на прочность при повторно-переменных (циклических) напряжениях». Основные теоретические сведения, относящиеся к этим темам, вкратце изложены в следующем параграфе.

Основные теоретические сведения

1. Расчет вала на изгиб и кручение

Изгиб с кручением круглого вала – вид деформирования стержней, который часто встречается в машиностроении. По этой схеме работает подавляющее большинство валов машин: паровых и газовых турбин, двигателей внутреннего сгорания, редукторов, электродвигателей и прочих. На рис. 2.1,а приведена схема нагружения стержня, а на рис. 2.1,б – эпюры изгибающих и крутящего моментов. Изгибающий момент в опасном сечении:

$$M_H = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}, \quad (2.1)$$

где $M_z = P_y \cdot \ell$, $M_y = P_z \cdot \ell$.

Поскольку при изгибе круглого стержня кривой изгиб невозможен, можно найти изгибающий момент проще – $M_H = P \cdot \ell$. Однако такой подход пригоден для простой расчетной схемы на рис. 2.1,а. При расчете валов машин в разных сечениях вала нагрузки действуют по разным направлениям. Поэтому приходится раскладывать силы на вертикальную и горизонтальную оси, строить эпюры изгибающих моментов, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях, и находить изгибающий момент геометрическим суммированием по формуле (2.1).

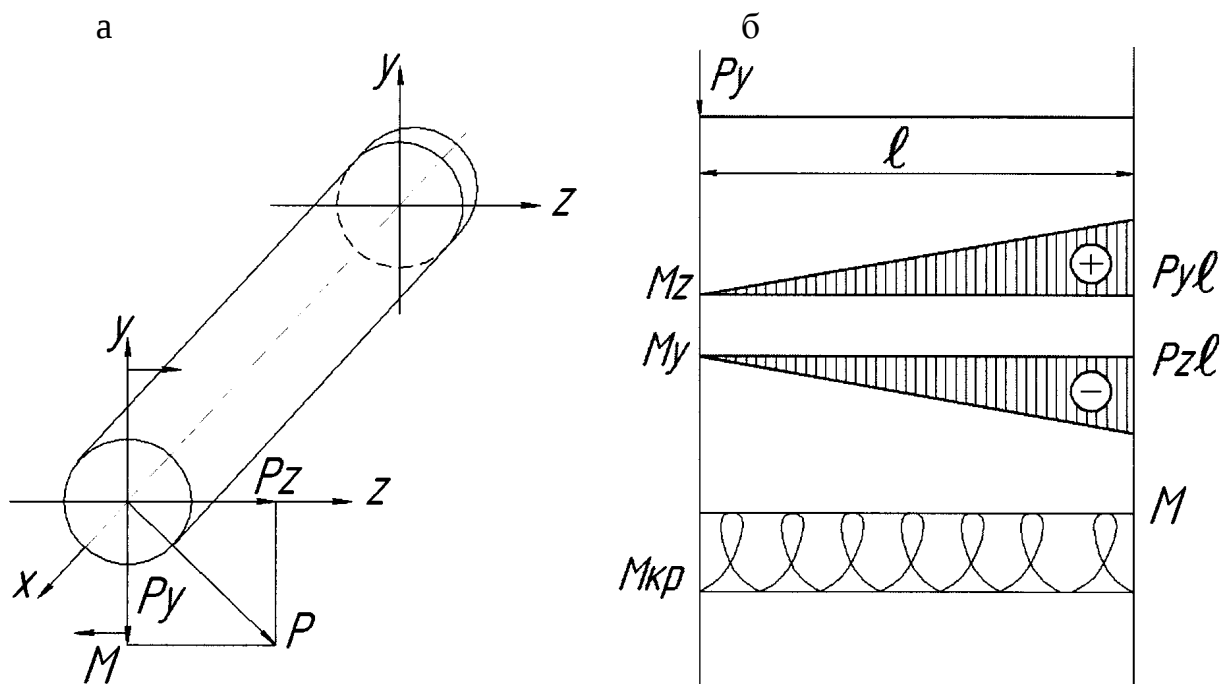


Рис. 2.1.

В опасном сечении стержня (у заделки) от изгиба возникают нормальные напряжения, от кручения – касательные. Из графиков их распределения (рис. 2.2,а) видно, что максимальных значений они достигают в одной точке – точке *C* (или точке *D*) – крайних точках сечения. В этой точке имеет место плоское напряженное состояние (рис. 2.2,б).

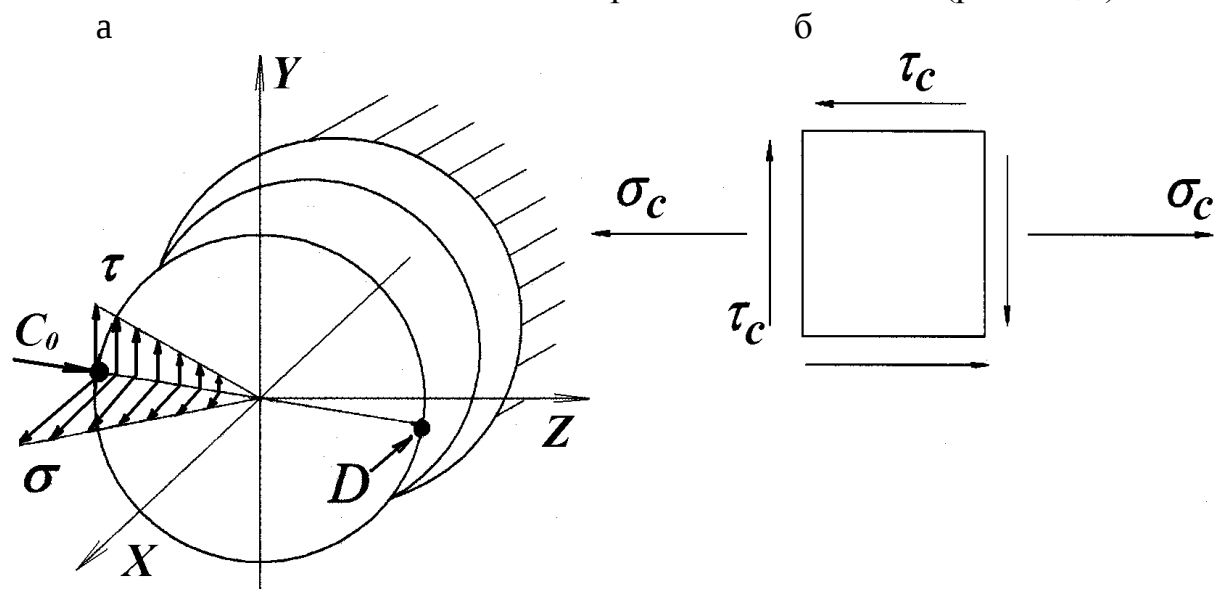


Рис. 2.2.

В опасной точке *C* опасного сечения:

$$\sigma_C^{\max} = \frac{M_H}{W_Z} = \frac{\sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}}{0,1d^3}, \quad (2.2)$$

$$\tau_C^{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{0,2d^3}. \quad (2.3)$$

Проверку прочности необходимо делать по III-й или по IV-й теориям прочности. Напряженное состояние в точке C идентично напряженному состоянию при поперечном изгибе, поэтому используем следующие формулы:

$$\sigma_{расч}^{III} = \sqrt{(\sigma_C^{\max})^2 + 4(\tau_C^{\max})^2} \leq [\sigma], \quad (2.4)$$

$$\sigma_{расч}^{IV} = \sqrt{(\sigma_C^{\max})^2 + 3(\tau_C^{\max})^2} \leq [\sigma]. \quad (2.5)$$

Если в условия прочности подставить формулы нормальных и касательных напряжений в опасном сечении, учитывая при этом, что $W_p = 2W_z$, получим следующее выражение для условий прочности круглого стержня при изгибе с кручением:

$$\sigma_{расч}^{III} = \frac{\sqrt{M_H^2 + M_{кр}^2}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (2.6)$$

$$\sigma_{расч}^{IV} = \frac{\sqrt{M_H^2 + 0,75M_{кр}^2}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (2.7)$$

Эти выражения удобно представить в форме, аналогичной условию прочности по нормальному напряжению при изгибе:

$$\sigma_{расч} = \frac{M_{расч}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{расч}^{III} &= \sqrt{M_H^2 + M_{кр}^2} \\ M_{расч}^{IV} &= \sqrt{M_H^2 + 0,75M_{кр}^2} \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

2. Расчет на прочность при повторно переменной нагрузке

Известны многие попытки создания гипотез усталостного разрушения в сложном напряженном состоянии. Все они сводятся к обобщению известных гипотез прочности и пластичности на случай циклических напряжений. Для наиболее часто встречающегося на практике случая изгиба с кручением общепринятой является эмпирическая формула:

$$\frac{1}{n_R^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \quad (2.10)$$

где n_R – коэффициент запаса усталостной прочности, n_σ – коэффициент запаса по нормальным напряжениям, в предположении, что $\tau = 0$, n_τ – коэффициент запаса по касательным напряжениям, в предположении, что $\sigma = 0$.

Эту формулу легко преобразовать в условие усталостной прочности:

$$n_R = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \geq [n]. \quad (2.11)$$

Условие статической прочности может быть записано в соответствии с III-й теорией прочности в виде:

$$n_{III} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4\tau_{\max}^2}} \geq [n]. \quad (2.12)$$

Ориентировочные значения величин допускаемого значения коэффициента запаса прочности $[n]$ приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Факторы, влияющие на запас прочности. Для расчета на статическую прочность по пределу текучести	$[n]$
Весьма пластичный материал $\sigma_T = (0,45 \div 0,55)\sigma_{ПЧ}$	1,2...1,5
Пластичный материал $\sigma_T = (0,55 \div 0,70)\sigma_{ПЧ}$	1,4...1,8
Малопластичный материал $\sigma_T = (0,70 \div 0,90)\sigma_{ПЧ}$	1,7...2,2
Хрупкий материал	2,0...3,0

Окончание таблицы 2.1

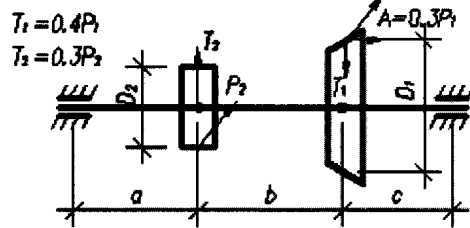
Факторы, влияющие на запас прочности. Для расчета по пределу выносливости при циклической нагрузке	$[n]$
При повышенной точности расчета, однородном материале, широком использовании экспериментальных данных, высоком качестве технологии	1,3...1,5
При недостаточном объеме экспериментальных данных о нагрузках и характеристиках прочности, при ограниченном числе натуральных усталостных испытаний, среднем уровне однородности материала, технологии производства и дефектоскопии	1,5...2,0
При малом объеме и отсутствии экспериментальной информации о нагрузках и прочности, при невысоком уровне технологии производства, пониженной однородности материала (литые и сварные детали значительных размеров)	2,0...3,0

З а д а н и е

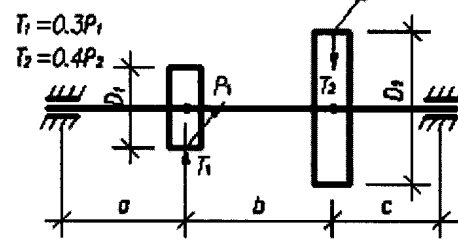
Вал, лежащий на двух опорах, загружен произвольной системой сил: P_1, P_2, T_1, T_2, A , (рис. 2.3, табл. 2.2). Подобрать поперечное сечение вала из условий прочности и жесткости, если вал принимает мощность N с угловой скоростью ω . В расчете использовать третью теорию прочности, полагая допускаемые напряжения равными $[\sigma] = 200$ МПа. Прогиб вала не должен превышать $1/400$ пролета. Рассчитать вал на циклическую прочность, считая, что вращающийся вал испытывает переменный изгиб с коэффициентом асимметрии $r = -1$. Одновременно вал подвергается кручению с коэффициентом асимметрии $r = -0,25$. Материал вала Ст45. Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, предел прочности $\sigma_{\text{пч}} = 700$ МПа, предел текучести $\sigma_{\text{т}} = 320$ МПа, пределы выносливости $\sigma_{-1} = 300$ МПа, $\tau_{-1} = 180$ МПа. Поверхность вала шлифованная, коэффициент, учитывающий влияние обработки поверхности, равен $\beta = 0,92$. Коэффициент, учитывающий масштабный эффект, равен $\varepsilon = 0,65$.

В опасном сечении вала имеется отверстие для смазки диаметром $d = 3,2$ мм, для которого теоретические коэффициенты концентрации напряжений составляют: при изгибе $\alpha_{\sigma} = 2$, при кручении $\alpha_{\tau} = 1,5$. Для расчета принять трубчатое сечение вала с наружным диаметром D , внутренним диаметром $d = 0,5 D$. Расчетные схемы и исходные данные представлены на рис. 2.3 и в табл. 2.2.

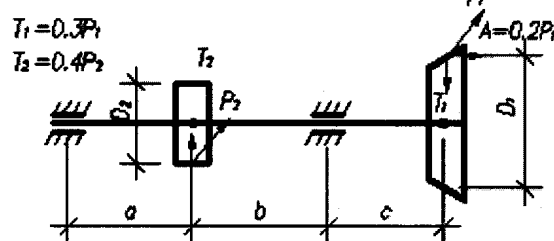
1



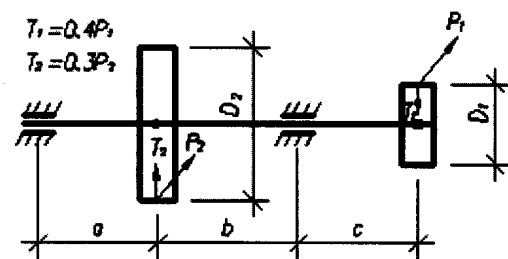
2



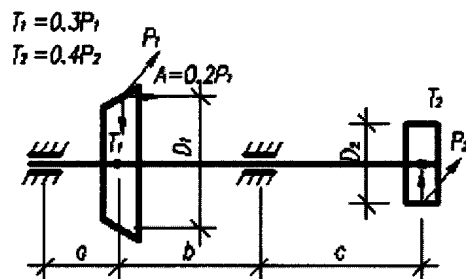
3



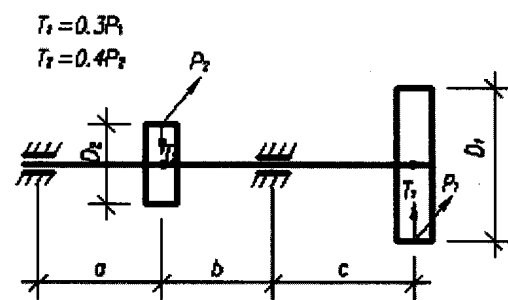
4



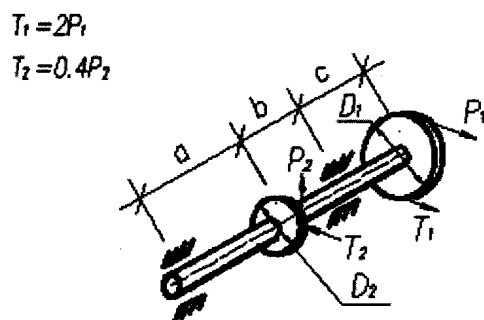
5



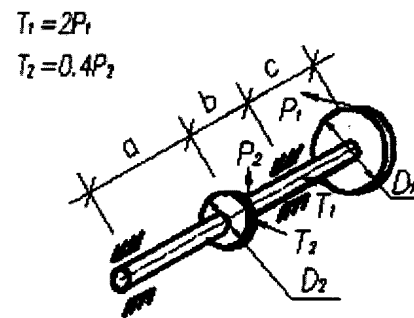
6



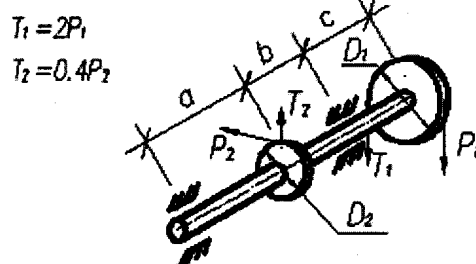
7



8



9



10

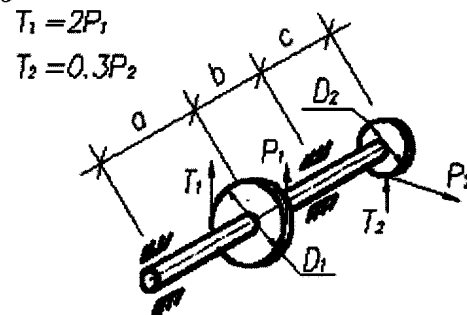


Рис. 2.3.

Таблица 2.2

№ строки	№ схемы	Мощность N	Угловая скорость ω	a	b	c	D_1	D_2
		$кВт$	$с^{-1}$	$м$			$мм$	$мм$
1	1	165	50	0,2	0,4	0,3	100	200
2	2	150	40	0,2	0,8	0,35	120	210
3	3	155	60	0,2	0,80	0,50	120	230
4	4	135	70	0,30	0,40	0,40	160	300
5	5	100	80	0,80	0,60	0,40	200	350
6	6	180	65	0,40	0,40	0,50	300	420
7	7	90	50	0,40	0,70	0,20	300	240
8	8	95	40	0,30	0,60	0,50	300	400
9	9	100	70	0,60	0,30	0,20	160	230
10	10	110	60	0,40	0,50	0,60	200	300

1. Пример расчета на изгиб и кручение

И с х о д н ы е д а н н ы е

Определить диаметр вала зубчатой передачи, если вал передает мощность $N = 110 \text{ кВт}$ при угловой скорости $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$. Силы, действующие на зубчатые колеса P_1 , P_2 , T_1 , T_2 , A , показаны на расчетной схеме, рис. 2.4.

$$T_1 = 0,3P_1; T_2 = 0,4P_2; A = 0,12P_1.$$

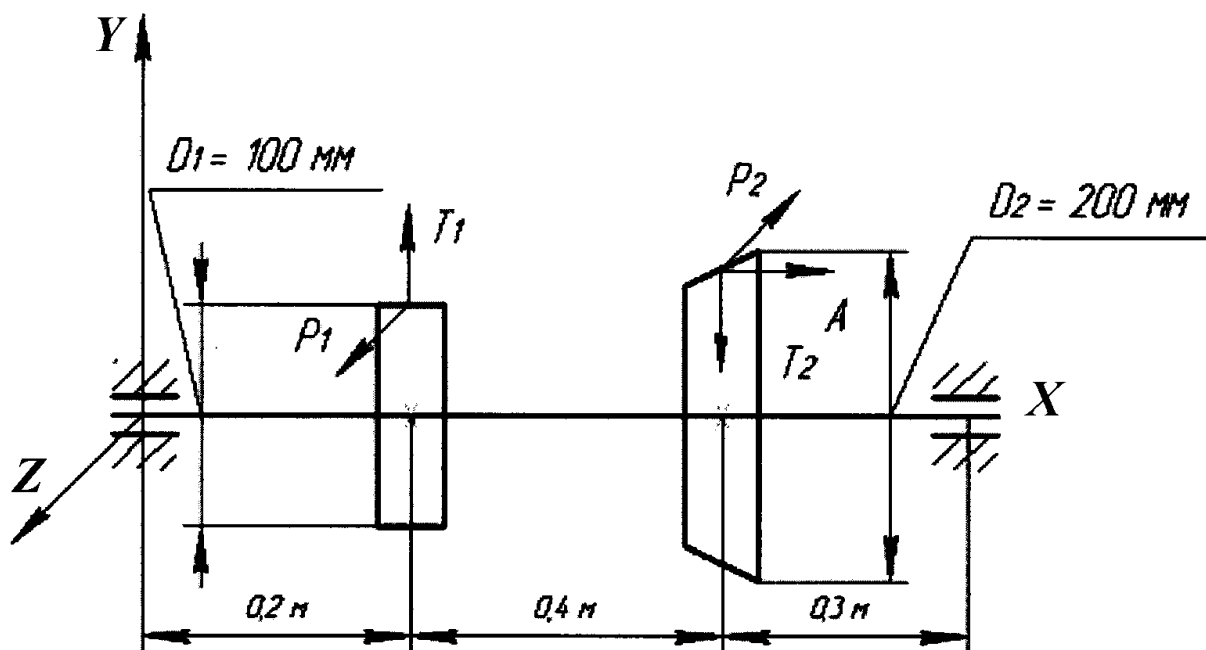


Рис. 2.4.

Р е ш е н и е

Все вектора сил приведем к точкам, лежащим на оси вала. Получим расчетную схему (рис. 2.5), на которой представлены вектора сил в вертикальной и горизонтальной плоскостях, крутящий и изгибающие моменты.

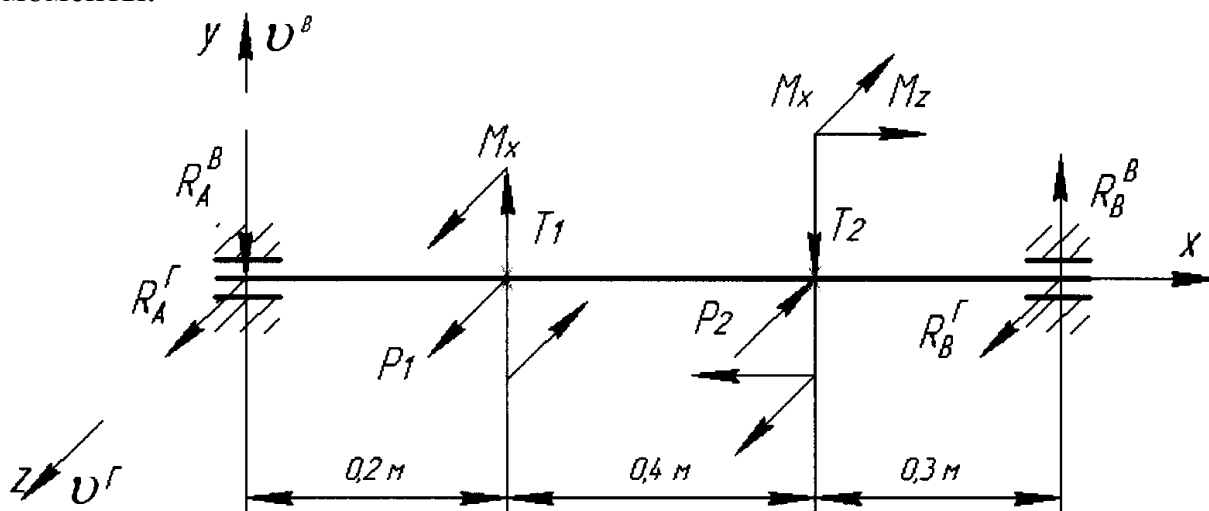


Рис. 2.5.

При приложении к зубчатым колесам горизонтальных сил P_1 и P_2 возникает крутящий момент в плоскости XOZ : $M_x = P_1 \cdot 0,5D_1$, $M_x = P_2 \cdot 0,5D_2$, а также изгибающие моменты от этих же горизонтальных сил, приложенных к оси вала. При переносе силы A добавляется

изгибающий момент $M_z = A \cdot 0,5D_2$ в плоскости XOY и в этой же вертикальной плоскости создают изгибающий момент вектора сил T_1 и T_2 . Вектор силы A приложен вдоль оси вала. Однако величина его мала и осевое усилие от него учитываться не будет. Определим усилия, действующие на вал.

Крутящий момент находим из формулы:

$$M_x = \frac{N}{\omega} = \frac{110}{50} = 2,2 \text{ кНм}.$$

Величины нагрузок определяем по величине M_x и заданным соотношениям:

$$P_1 = \frac{2M_x}{D_1} = \frac{2 \cdot 2,2}{0,1} = 44 \text{ кН}; \quad P_2 = \frac{2M_x}{D_2} = \frac{2 \cdot 2,2}{0,2} = 22 \text{ кН};$$

$$T_1 = 0,3P_1 = 0,3 \cdot 44 = 13,2 \text{ кН}; \quad T_2 = 0,4P_1 = 0,4 \cdot 22 = 8,8 \text{ кН};$$

$$A = 0,12P_1 = 0,12 \cdot 13,2 = 1,59 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент от силы A :

$$M_z = A \cdot 0,5D_2 = 1,59 \cdot 0,5 \cdot 20 = 15,9 \text{ кН} \cdot \text{см} = 0,159 \text{ кНм}.$$

Построение внутренних усилий при изгибе в вертикальной плоскости

На рис. 2.6,а показана расчетная схема вала от вертикальных усилий (T_1 , T_2 и M_z). В плоскости UOX действует вдоль оси вала сила $A = 1,59 \text{ кН}$, которой пренебрегли. Определим опорные реакции от усилий, представленных на рис. 2.6,а.

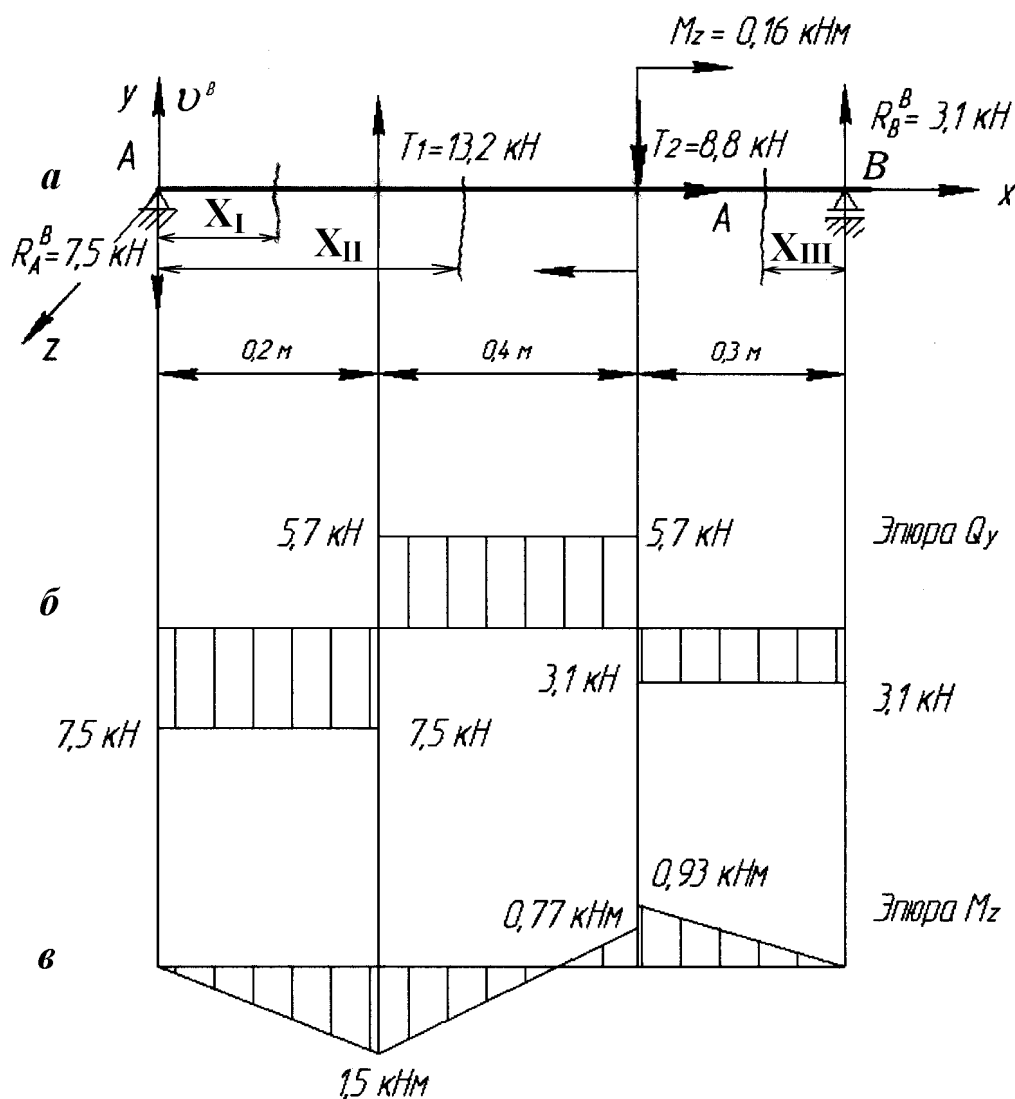


Рис. 2.6

Так как система находится в равновесии, то для определения опорной реакции вычислим сумму моментов относительно левой опоры вала. Определим реакцию правой опоры R_B .

$$\sum M_A = 0 \quad T_1 \cdot 0,2 - T_2 \cdot 0,6 - M_z + R_B \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_B^B = \frac{-T_1 \cdot 0,2 + T_2 \cdot 0,7 + M}{0,9} = \frac{-13,2 \cdot 0,2 - 8,8 \cdot 0,6 + 0,16}{0,9} = 3,11 \text{ кН};$$

$$R_B^B = 3,11 \text{ кН}.$$

Аналогично определим реакцию левой опоры

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot 0,9 + T_1 \cdot 0,7 + M_z - T_2 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_A^B = \frac{-T_1 \cdot 0,7 + T_2 \cdot 0,3 - M_z}{0,9} = \frac{-13,2 \cdot 0,7 + 8,8 \cdot 0,3 - 0,16}{0,9} = -7,51 \text{ кН};$$

$$R_A^B = -7,51 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение опорной реакции R_A меняет принятое при вычислении направление вектора силы. Реакция R_A направлена вниз.

Проверим правильность вычислений.

Просуммируем проекции всех сил на ось Y

$$\sum Y = 0 \quad -R_A^B + T_2 - T_1 + R_B^B = -7,51 - 8,8 + 13,2 + 3,11 = 0.$$

Построим эпюры поперечных сил (рис. 2.6,б) и изгибающих моментов (рис. 2.6,в):

для участка $0 \leq x_I \leq 0,2 \text{ м}$

при $x = 0$ $Q_y = -R_A^B = -7,5 \text{ кН}$; $M_z = -R_A^B x_I = -7,5 x_I$;

при $x = 0,2 \text{ м}$ $Q_y = -7,5 \text{ кН}$; $M_z = 1,5 \text{ кНм}$;

для участка $0,2 \leq x_{II} \leq 0,6 \text{ м}$

при $x = 0$ $Q_y = -R_A^B + T_1 = -7,5 + 13,2 = 5,7 \text{ кН}$;

$$M_z = -R_A^B x_{II} + T_1(x_{II} - 0,2) = -7,5 x_{II} + 13,2(x_{II} - 0,2);$$

при $x = 0,2 \text{ м}$ $Q_y = 5,7 \text{ кН}$; $M_z = -1,5 \text{ кНм}$;

при $x = 0,6 \text{ м}$ $Q_y = 5,71 \text{ кН}$; $M_z = 0,77 \text{ кНм}$;

для участка $0 \leq x_{III} \leq 0,3 \text{ м}$

при $x = 0$ $Q_y = -R_B^B = -3,1$; $M_z = R_B^B x_{III} = 3,1 \cdot x_{III}$;

при $x = 0,3 \text{ м}$ $Q_y = -3,1 \text{ кН}$; $M_z = 0,93 \text{ кНм}$;

при $x = 0 \text{ м}$ $Q_y = -3,1 \text{ кН}$; $M_z = 0$.

Построение эпюр внутренних усилий при изгибе в горизонтальной плоскости

Расчетная схема представлена на рис. 2.7,а. На вал действуют два вектора силы: $P_1 = 44 \text{ кН}$ и $P_2 = 22 \text{ кН}$. Определим опорные реакции.

$$\sum M_A = 0; -P_1 \cdot 0,2 + P_2 \cdot 0,6 + R_B^r \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_B^r = \frac{+P_1 \cdot 0,2 - P_2 \cdot 0,6}{0,9} = \frac{44 \cdot 0,2 - 22 \cdot 0,6}{0,9} = -4,89 \text{ кН}.$$

Вектор силы R_B^r направлен вниз

$$\sum M_B = 0; R_A^r \cdot 0,9 - P_1 \cdot 0,7 + P_2 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_A^r = \frac{+P_1 \cdot 0,7 - P_2 \cdot 0,3}{0,9} = \frac{44 \cdot 0,7 - 22 \cdot 0,3}{0,9} = 26,89 \text{ кН}.$$

Вектор силы R_A^r направлен вверх. Проверка

$$\sum Z = 0; R_A^F - P_1 + P_2 - R_B^F = 26,89 - 44 + 22 - 4,89 = 0.$$

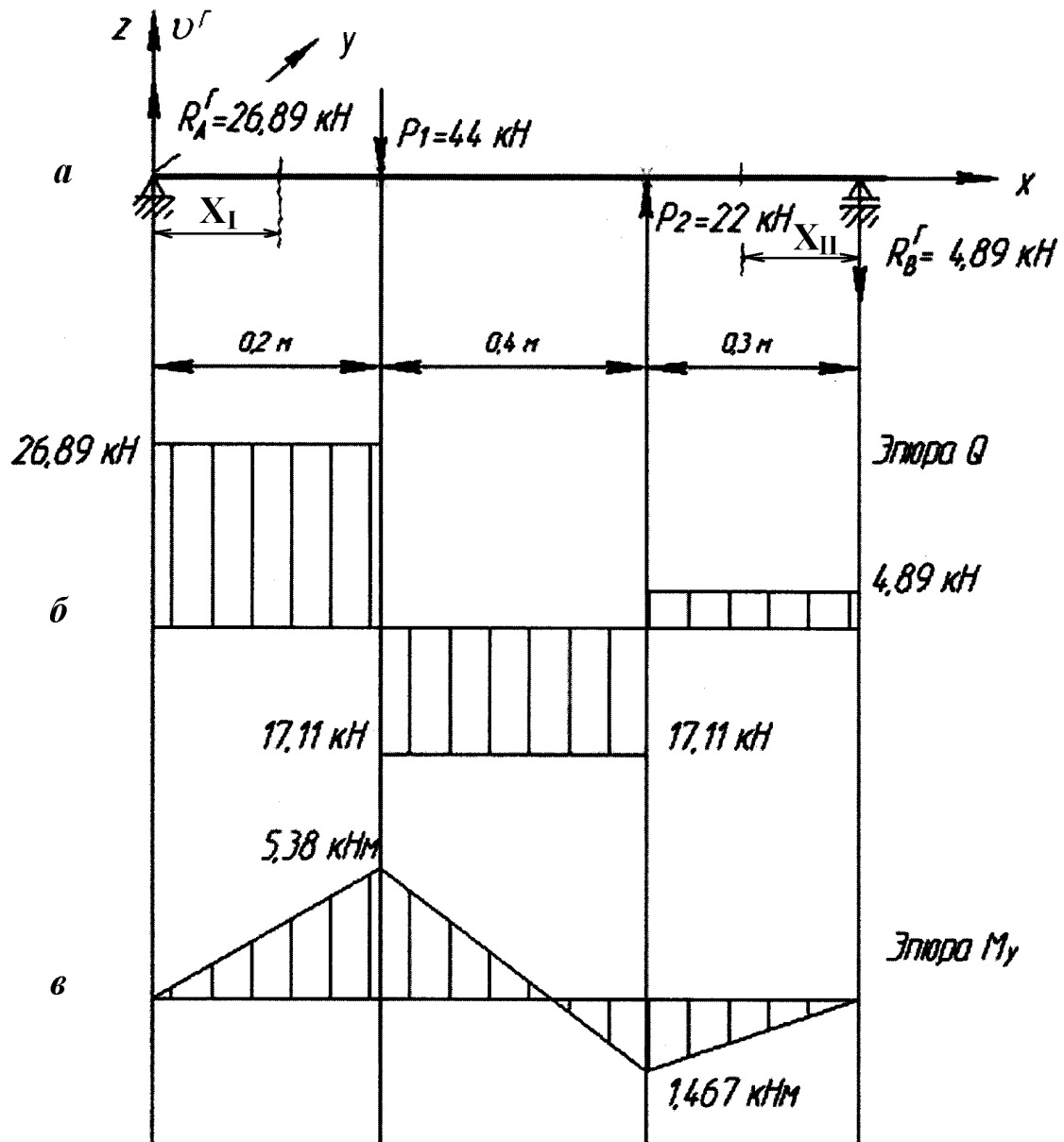


Рис. 2.7.

Построение эпюр Q_z и M_y

Для участка $0 \leq x_I \leq 0,2 \text{ м}$ — $Q_z = R_A^F = 26,89$; $M_y = R_A^F x_I = 26,89 x_I$;

при $x = 0$ — $Q = 26,89 \text{ кН}$; $M_z = 0$;

при $x = 0,2 \text{ м}$ — $Q = 26,89 \text{ кН}$; $M_z = 5,38 \text{ кНм}$.

Для участка $0 \leq x_{II} \leq 0,3 \text{ м}$ — $Q_z = R_B^F = 4,89$; $M_y = -R_B^F x_{II} = -4,89 x_{II}$;

при $x = 0$ — $Q = 4,89 \text{ кН}$; $M_z = 0$;

при $x = 0,3 \text{ м}$ – $Q = 4,89 \text{ кН}$; $M_z = -1,467 \text{ кНм}$.

Построение эпюры внутреннего крутящего момента

Крутящий момент действует на участке вала от шестерни диаметром $D_1 = 100 \text{ мм}$ до шестерни диаметром $D_2 = 200 \text{ мм}$. Расчетная схема и эпюра внутреннего крутящего момента приведена на рис. 2.8.

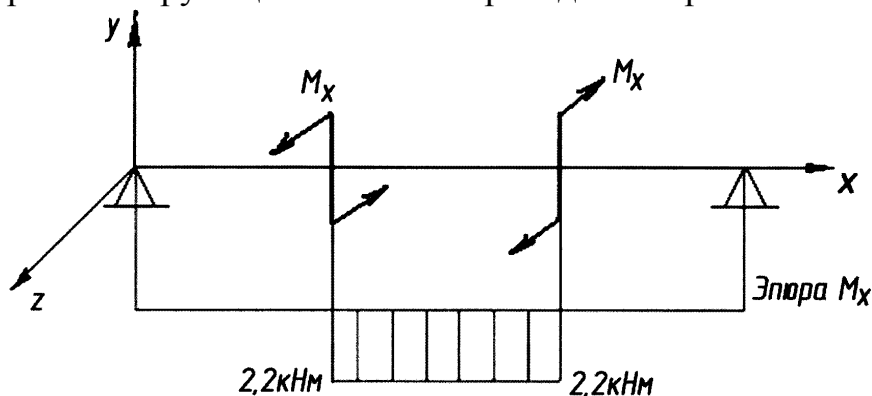


Рис. 2.8.

Расчетные моменты в сечениях вала:

при $x = 0,2 \text{ м}$ $M_z = 1,5 \text{ кНм}$, $M_y = 5,38 \text{ кНм}$, $M_x = 2,2 \text{ кНм}$,

при $x = 0,6 \text{ м}$ $M_z = 0,93 \text{ кНм}$, $M_y = 1,467 \text{ кНм}$, $M_x = 2,2 \text{ кНм}$.

Подбор сечения вала производим в сечении $x = 0,2 \text{ м}$. Максимальный расчетный момент по III-ей теории прочности в соответствии с формулой (2.9) равен:

$$M_P^{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{2,2^2 + 5,38^2 + 1,5^2} = 6,00 \text{ кНм}.$$

Условие прочности по формуле (2.8)

$$\sigma_{расч}^{III} = \frac{M_P^{III}}{W} < [\sigma],$$

где $W = W_z = W_y$ – осевой момент сопротивления поперечного сечения.

Минимально допускаемый момент сопротивления определяем по формуле:

$$W = 0,1D^3(1 - \alpha^4) \geq \frac{M_P^{III}}{[\sigma]}.$$

$$\text{Здесь } \alpha = \frac{d}{D}; D \geq \sqrt[3]{\frac{M_P^{III}}{0,1(1 - \alpha^4)[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{600}{0,1(1 - 0,5^4)20}} = 6,83 \text{ см}.$$

Принимаем наружный диаметр вала равным $D = 70 \text{ мм}$. Внутренний – $d = 35 \text{ мм}$.

Осевой момент сопротивления такого вала будет:

$$W = 0,1D^3(1-\alpha^4) = 0,1 \cdot 7^3 \cdot 0,9375 = 32,16 \text{ см}^3.$$

Расчетные нормальные напряжения составят:

$$\sigma_{расч}^{III} = \frac{M_P^{III}}{W} = \frac{600}{32,16} = 18,66 < [\sigma] = 20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Момент инерции:

$$J = 0,05D^4(1-\alpha^4) = 0,05 \cdot 7^4 \cdot 0,9375 = 112,55 \text{ см}^4.$$

Определение диаметра вала из условия жесткости

Определим прогиб вала в вертикальной плоскости по формуле (1.1). Расчет прогиба произведем методом начальных параметров. Угол поворота на опоре А найдем из условия отсутствия прогиба на правой опоре.

При $x=0,9$ м $EJv^B = 0$.

$$EJ_z v^B = EJ_z \theta_0^B x - R_A^B \frac{x^3}{6} + T_1 \frac{(x-0,2)^3}{6} - T_2 \frac{(x-0,6)^3}{6} + M \frac{(x-0,6)^2}{2} = 0,$$

$$EJ_z \theta_0^B \cdot 0,9 - 7,5 \frac{0,9^3}{6} + 13,2 \frac{0,7^3}{6} - 8,8 \frac{0,3^3}{6} + 0,16 \frac{0,3^2}{2} = 0,$$

$$EJ_z \theta_0^B = 7,5 \frac{0,9^3}{6 \cdot 0,9} - 13,2 \frac{0,7^3}{6 \cdot 0,9} + 8,8 \frac{0,3^3}{6 \cdot 0,9} - 0,16 \frac{0,3^2}{2 \cdot 0,9} = 0,21 \text{ кНм}^2.$$

Прогиб при $x=0,2$ м

$$EJ_z v^B = EJ_z \theta_0^B \cdot 0,2 - R_A^B \frac{0,2^3}{6} = 0,21 \cdot 0,2 - 7,5 \frac{0,2^3}{6} = 0,032 \text{ кНм}^3,$$

$$v^B = \frac{-0,032 \cdot 10^6}{EJ} = \frac{-0,032 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 112,55} = 0,0142 \text{ см}.$$

Прогиб при $x = 0,6$ м

$$EJ v^B = 0,21 \cdot 0,6 - 7,5 \frac{0,6^3}{6} + 13,2 \frac{0,4^3}{6} = -0,0032 \text{ кНм}^3;$$

$$v^B = \frac{-0,0032 \cdot 10^6}{EJ} = \frac{-0,0032 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 112,55} = -0,00142 \text{ см}.$$

Аналогично определим горизонтальный прогиб вала.

Угол поворота на левой опоре А $EJ\theta_0^F$ найдем из условия отсутствия прогиба на правой опоре.

При $x = 0,9$ м $EJv^F = 0$.

$$EJ_y v^F = EJ_y \theta_0^F x + R_A^F \frac{x^3}{6} - P_1 \frac{(x-0,2)^3}{6} + P_2 \frac{(x-0,6)^2}{6} = 0,$$

$$EJ_y \theta_0^r \cdot 0,9 + 26,89 \frac{0,9^3}{6} - 44 \frac{0,7^3}{6} + 22 \frac{0,3^2}{6} = 0,$$

$$EJ_y \theta_0^r = -26,89 \frac{0,9^3}{6 \cdot 0,9} + 44 \frac{0,7^3}{6 \cdot 0,9} - 22 \frac{0,3^3}{6 \cdot 0,9} = -0,945 \text{ кНм}^2.$$

Прогиб при $x = 0,2$ м

$$EJv^r = EJ\theta_0^r \cdot 0,2 + R_A^r \frac{0,2^3}{6} = -0,945 \cdot 0,2 + 26,89 \frac{0,2^3}{6} = -0,153 \text{ кНм}^3;$$

$$v^r = -\frac{0,153 \cdot 10^6}{EJ} = -\frac{0,153 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 112,55} = -0,068 \text{ см.}$$

Прогиб при $x = 0,6$ м в горизонтальной плоскости

$$EJv^r = -0,945 \cdot 0,6 + 26,89 \frac{0,6^3}{6} - 44 \frac{0,4^3}{6} = -0,068 \text{ кНм}^3;$$

$$v^r = \frac{-0,068 \cdot 10^6}{EJ} = \frac{-0,068 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 112,55} = -0,03 \text{ см.}$$

Суммарный максимальный прогиб будет в точке с координатой $x = 0,2$ м

$$v = \sqrt{(v^B)^2 + (v^r)^2} = \sqrt{(0,0142)^2 + (0,068)^2} = 0,0695 \text{ см} \approx 0,07 \text{ см.}$$

Допускаемый прогиб $[v]$, равен $1/400$ пролета $L = 90$ см, т.е.

$$[v] = \frac{90}{400} = 0,225 \text{ см.}$$

Прогиб, который будет иметь место, при принятом диаметре вала 70 мм, получили равным 0,07 см, т.е. $v_{\max} < [v]$.

Жесткость обеспечена.

Окончательно принимаем $D = 70$ мм.

В случаях, если оказывается что $v_{\max} > [v]$, назначают диаметр вала исходя из значения осевого момента инерции, который определяют из неравенства:

$$EJ'[v] \geq EJv; J' \geq J \frac{v_{\max}}{[v]},$$

где $v_{\max}$ – фактический максимальный прогиб; $[v]$ – допускаемый прогиб; J – момент инерции, полученный из условия расчета на прочность; J' – минимально допустимый осевой момент инерции, из условия расчета на жесткость.

Диаметр D' определяют из условия $J' = 0,05(D')^4(1 - \alpha^4)$.

В дальнейшем в расчет принимают значение диаметра вала, которое одновременно удовлетворяет условиям прочности и жесткости.

Пример расчета на прочность при повторно-переменной нагрузке

Р е ш е н и е

Моменты сопротивления принятого сечения:

$$W = 0,1D^3(1 - \alpha^4) = 0,1 \cdot 7^3 \cdot 0,9375 = 32,16 \text{ см}^3,$$

$$W_p = 2W = 2 \cdot 32,16 = 64,32 \text{ см}^3.$$

Максимальные амплитудные напряжения при изгибе:

$$\sigma_a = \frac{|M_{\text{изг}}^{\text{max}}|}{W} = \frac{5,58 \cdot 10^2}{32,16} = 17,35 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Максимальный изгибающий момент при $x = 0,2 \text{ м}$

$$M_{\text{изг}}^{\text{max}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{1,5^2 + 5,38^2} = 5,58 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Минимальные нормальные напряжения:

$$\sigma_{\min} = r \cdot \sigma_{\max} = -1 \cdot 17,35 = -17,35 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Максимальные касательные напряжения при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{220}{64,32} = 3,42 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Минимальные касательные напряжения:

$$\tau_{\min} = r \tau_{\max} = -0,25 \cdot 3,42 = -0,855 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Средние касательные напряжения:

$$\tau_{cp} = \frac{(\tau_{\max} + \tau_{\min})}{2} = \frac{(3,42 - 0,855)}{2} = 1,28 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Амплитудные напряжения:

$$\tau_a = \frac{(\tau_{\max} - \tau_{\min})}{2} = \frac{(3,42 + 0,855)}{2} = 2,14 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Эффективный коэффициент концентрации по нормальным напряжениям

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha_\sigma - 1) = 1 + 0,65(2 - 1) = 1,65.$$

Для касательных напряжений:

$$K_\tau = 1 + q(\alpha_\tau - 1) = 1 + 0,65(1,5 - 1) = 1,32,$$

где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, для принятой стали равен 0,65; $\alpha_\sigma, \alpha_\tau$ – теоретические коэффициенты концентрации напряжений (даны в условии задачи).

Общий поправочный коэффициент для нормальных напряжений:

$$k_{\sigma} = \frac{K_{\sigma}}{\beta \cdot \delta} = \frac{1,65}{0,92 \cdot 0,65} = 2,77.$$

Для касательных напряжений:

$$k_{\tau} = \frac{K_{\tau}}{\beta \cdot \alpha} = \frac{1,32}{0,92 \cdot 0,65} = 2,21.$$

Коэффициент запаса при изгибе вала (симметричный цикл – средние нормальные напряжения равны нулю)

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma} \sigma_a + \psi \sigma_{cp}} = \frac{30}{2,77 \cdot 17,35 + 0} = 0,62.$$

Здесь ψ – коэффициент приведения асимметричного цикла к равноопасному симметричному, определяется по формуле

$$\psi_{\sigma} = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \sigma_{\sigma},$$

где σ_{σ} – предел прочности, в МПа. При кручении $\psi_{\tau} = \frac{\psi_{\sigma}}{2}$, $\sigma_{cp} = 0$, для симметричного цикла.

Коэффициент запаса при кручении:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau} \tau_a + \psi \tau_{cp}} = \frac{18}{2,21 \cdot 2,14 + 0,071 \cdot 1,28} = 3,73,$$

здесь $\psi_{\sigma} = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \sigma_{\sigma} = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 700 = 0,142$.

$$\text{При кручении } \psi_{\tau} = \frac{\psi_{\sigma}}{2} = \frac{0,142}{2} = 0,071.$$

Общий коэффициент запаса

$$n_R = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{0,62 \cdot 3,73}{\sqrt{0,62^2 + 3,73^2}} = 0,61 < [n] = 1,4 \text{ (принято по табл. 2.1)..}$$

Таким образом, вал диаметром 70 мм не удовлетворяет условию циклической прочности. Изменим для его исполнения марку стали. Примем легированную сталь 40 ХНМА (Прил. 3) с характеристиками прочности $\sigma_{нч} = 1500$ МПа, $\sigma_T = 1000$ МПа, $\sigma_{-1} = 700$ МПа, $\tau_{-1} = 450$ МПа, не изменяя принятые ранее коэффициенты.

Коэффициент запаса при изгибе вала:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma} \sigma_a + \psi \sigma_{cp}} = \frac{70}{2,77 \cdot 17,35 + 0} = 1,46.$$

Коэффициент запаса при кручении:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau} \tau_a + \psi \tau_{cp}} = \frac{45}{2,21 \cdot 2,14 + 0,16 \cdot 1,28} = 9,16.$$

Здесь $\psi_{\sigma} = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \sigma_{\sigma} = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1500 = 0,32$.

При кручении $\psi_{\tau} = \frac{\psi_{\sigma}}{2} = \frac{0,32}{2} = 0,16$.

Общий коэффициент запаса

$$n_R = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{1,46 \cdot 9,16}{\sqrt{1,46^2 + 9,16^2}} = 1,44 \geq [\sigma] = 1,4.$$

Таким образом, вал диаметром 70 мм удовлетворяет требованиям прочности, жесткости и расчету на повторно-переменную (циклическую) нагрузку при использовании легированной стали 40ХНМА.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА 3

РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

Общие указания

Работа состоит из двух основных частей. В первой части, посвященной устойчивости сжатых стержней, необходимо решить две задачи. Сначала по известной нагрузке необходимо подобрать поперечное сечение стержня. Затем для стержня с сечением, составленным из стандартного профиля с известными размерами, предлагается рассчитать его грузоподъемность (допускаемую нагрузку). Во второй части, посвященной разделу «Динамика», необходимо определить напряжения, возникающие в стержне от действия ударной нагрузки. Краткие теоретические сведения приведены в параграфах, предшествующих рассмотрению каждой из частей.

Часть I. Расчет сжатых стержней на устойчивость

Основные теоретические сведения

Рассмотрим равновесие длинного прямого стержня, сжимаемого осевой силой P (рис. 3.1,а). Напряжение определяется по известной формуле: $\sigma = P/F$, где F – площадь поперечного сечения стержня. С возрастанием силы P стержень будет укорачиваться, оставаясь прямолинейным. Однако при достижении силой некоторого значения, называемого критическим, прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой, стержень начинает изгибаться (выпучиваться) (рис. 3.1,б).

Это явление называется потерей устойчивости или продольным изгибом. Потеря устойчивости – катастрофа для конструкции, при этом происходит неограниченный рост прогибов и напряжений, который неизбежно приводит к разрушению. Особая опасность разрушения вследствие потери устойчивости заключается в том, что оно происходит внезапно и при значениях напряжений, меньших допускаемых напряжений на сжатие. Таким образом, при действии сжимающих сил проверка прочности еще не гарантирует надежности конструкции и необходим также ее расчет на устойчивость.

Задача об определении критической силы сжатого упругого стержня была решена Л. Эйлером в 1744 г., который получил формулу:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (3.1)$$

где E – модуль нормальной упругости материала; $J_{\min}$ – наименьший главный момент инерции поперечного сечения (потеря устойчивости всегда происходит в плоскости наименьшей жесткости, стержень сам ее «выбирает»); l – длина стержня; μ – коэффициент, учитывающий способ закрепления концов стержня (рис. 3.2).

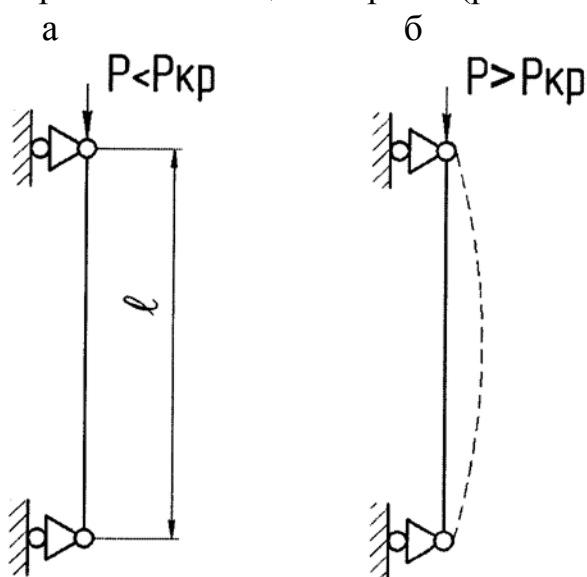


Рис. 3.1. Схема потери устойчивости

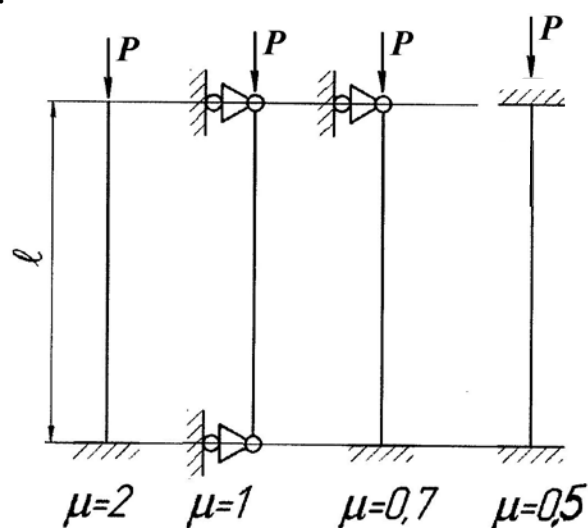


Рис. 3.2. Влияние способов закрепления концов стержня

Формула Эйлера выведена с помощью дифференциального уравнения упругой линии, поэтому пользоваться ею можно лишь в том случае, если справедлив закон Гука, т.е. пока критическое напряжение $\sigma_{кр}$ не превышает предела пропорциональности материала $\sigma_{ли}$ (рис. 3.3)

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{нц}. \quad (3.2)$$

Если стержень теряет устойчивость при напряжениях, больших предела пропорциональности, например, в точке, где $tg \alpha_1 = E_k$, то использование формулы Эйлера приводит к завышенному значению критической силы. Действительно, в точке C модуль E_k , называемый касательным модулем, оказывается меньше, чем модуль E . Следовательно, пользуясь формулой Эйлера, определим большее значение нагрузки, чем то, при котором происходит разрушение. Определим границу применения формулы Эйлера из выражения (3.2), подставив в него значение критической силы, определяемой по формуле (3.1):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu \cdot l)^2 F} \leq \sigma_{нц}. \quad (3.3)$$

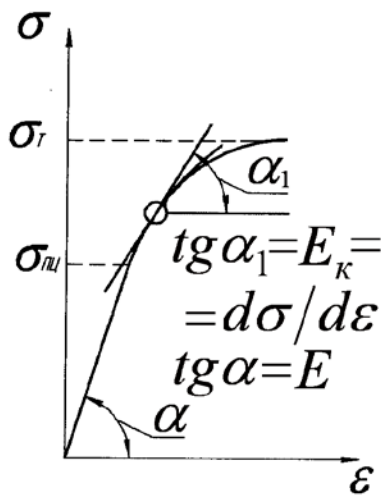


Рис. 3.3. Диаграмма растяжения стали в упругой и упругопластической областях

Учитывая известную геометрическую характеристику – радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}},$$

формулу (3.3) можно преобразовать следующим образом:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{нц}, \quad (3.4)$$

где λ – введенная в рассмотрение новая интегральная безразмерная геометрическая характеристика, называемая гибкостью:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}. \quad (3.5)$$

Из формулы (3.4) получаем, что формула Эйлера справедлива для стержней, гибкость которых больше некоторого значения

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{нц}}}. \quad (3.6)$$

Вычислим, например, для стали марки Ст.3, из которой изготавливаются конструкции зданий и сооружений, минимальное значение гибкости по формуле (3.6) $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_{нц} = 200$ МПа:

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} \geq 100.$$

Таким образом, формула Эйлера справедлива для длинных гибких стержней. При сжатии очень коротких стержней потеря устойчивости невозможна, и происходит их разрушение при сжатии. Так, стержень из пластичной стали превращается в «лепешку», его предельное состояние наступает при напряжениях, равных пределу текучести σ_T . Опыт показывает, что $\sigma_{кр} = \sigma_T$ для стержней с гибкостью λ , меняющейся в пределах от 0 до 40. На рис. 3.4 представлен график зависимости критического напряжения $\sigma_{кр}$ от гибкости λ для стали Ст.3. Средняя область $40 \leq \lambda \leq 100$ представляет собой область, где стержни теряют устойчивость с образованием пластических деформаций. Теоретическое решение задачи об устойчивости в области упругопластических деформаций было дано разными учеными в различных вариантах. В настоящее время общепризнанным является решение немецкого ученого Ф. Энгессера, который предложил определять критическую силу в упругопластической стадии по формуле Эйлера, подставляя в нее вместо модуля упругости E так называемый касательный модуль $E_k = d\sigma/d\varepsilon$ (рис. 3.3)

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E_k \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}. \quad (3.7)$$

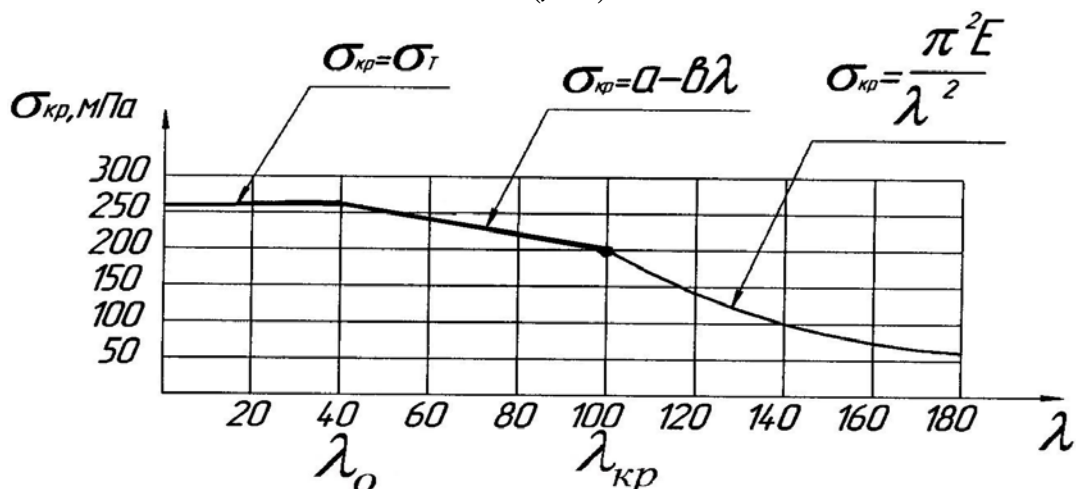


Рис. 3.4. Кривая критических напряжений

Решение (3.7) можно аппроксимировать прямой линией, как это показано на рис. 3.4. Ф. С. Ясинский собрал и обработал обширный опытный материал и предложил простую формулу для вычисления критических напряжений

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (3.8)$$

где коэффициенты a и b – зависят от материала. Для стали марки Ст.3 формула (3.8) имеет вид

$$\sigma_{кр} = 310 - 1,14\lambda. \quad (3.9)$$

Приведем для некоторых материалов значения коэффициентов a и b , а также значения гибкости, при которой применима формула (3.8):

Материал	a , МПа	b , МПа	λ	$\lambda_{кр}$
Стали:				
Ст.2	264	0,70	40	105
Ст.3	310	1,14	40	100
20, Ст.4	328	1,15	40	96
45	449	1,67	52	85
Дюралюминий Д16Т	406	1,83	30	53
Сосна, ель	29,3	0,104	–	70

Критическое напряжение является предельным, разрушающим напряжением, поэтому допускаемое напряжение должно быть принято с соответствующим запасом

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{n_y}. \quad (3.10)$$

Коэффициент запаса на устойчивость n_y всегда принимается несколько больше основного коэффициента запаса на прочность. Условие устойчивости может быть записано через основное допускаемое напряжение на сжатие

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma], \quad (3.11)$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения, зависящий от материала и гибкости λ (табл. 3.3).

Пример расчета

Подбор сечения стержня при заданной нагрузке

З а д а н и е и и с х о д н ы е д а н н ы е

Для стержня, показанного на рис. 3.5, подобрать поперечное сечение. Форма поперечного сечения дана на рис. 3.6. Исходные данные приведены в табл. 3.2. Модуль нормальной упругости E и допускаемое напряжение принять равными:

для дерева $E = 10^4$ МПа = 10^3 кН/см² и $[\sigma] = 10$ МПа = 1 кН/см²;

для чугуна $E = 10^5$ МПа = 104 кН/см² и $[\sigma] = 100$ МПа = 10 кН/см².

Таблица 3.2

Устойчивость											Поперечный удар				
Подбор сечения						Определение грузоподъемности									
Номер строки	Рис. 3.8.	Рис. 3.9.	P , кН	l , м	$[\sigma]$ МПа	t/d	Рис. 3.8.	Рис. 3.11.	Номер профиля	l , м	Рис. 3.14.	Номер профиля	P , кН	l , м	h , см
1	1	1	35	0,5	10	0,2	3	1	10	1,5	1	24	10	1,2	3,5
2	2	2	36	0,6	10	0,2	4	2	10	1,6	2	24а	14	1,4	3,0
3	3	3	37	0,7	10	0,2	2	3	14	1,7	3	27	15	1,6	2,5
4	4	4	38	0,8	10	0,3	1	4	16	1,8	4	27а	20	1,8	2,0
5	4	5	39	0,9	10	0,3	2	5	18	1,9	5	30	22	1,9	2,0
6	3	1	40	1,0	100	0,3	3	6	18	2,0	6	30а	25	2,0	1,5
7	3	2	41	1,1	100	0,4	4	7	20	2,1	7	33	28	2,2	1,2
8	4	3	42	1,2	100	0,4	3	8	20	2,2	8	36	30	2,4	1,2
9	3	4	43	1,3	100	0,4	1	9	22	2,3	9	40	32	2,6	1,0
0	4	5	44	1,4	100	0,4	2	10	22	2,4	0	45	35	2,8	1,0
	е	е	д	е	е	а	е	е	д	д	е	а	д	д	б

Р е ш е н и е

Вычертим схему стержня и поперечное сечение (рис. 3.7). Проставим на схеме размеры и нагрузку, материал – чугун, коэффициент условия закрепления концов стержня принимаем по рис. 3.2.

Расчет необходимо начать с определения геометрических характеристик:

выбираем $J_{\min}$. Минимальным он будет относительно оси, вдоль которой вытянуто сечение. В данном случае относительно оси y . Для его подсчёта разделяем фигуру пунктирными линиями, как показано на чертеже и используем формулу $J = \frac{bh^3}{12}$. В данном случае получаем

$$J_{\min} = \frac{td^3}{12} + \frac{(1,2d - t)t^3}{12}. \text{ Подставляя сюда } t = 0,2d, \text{ получаем}$$

$$J_{\min} = \frac{0,2d \cdot d^3}{12} + \frac{(1,2d - 0,2d) \cdot (0,2d)^3}{12} = 0,0173d^4$$

площадь поперечного сечения

$$F = td + (1,2d - t) \cdot t = 0,2d \cdot d + d \cdot 0,2d = 0,4d^2$$

радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{0,0173d^4}{0,4d^2}} = 0,208d$$

Подбор сечения произведем из условия устойчивости (3.11).

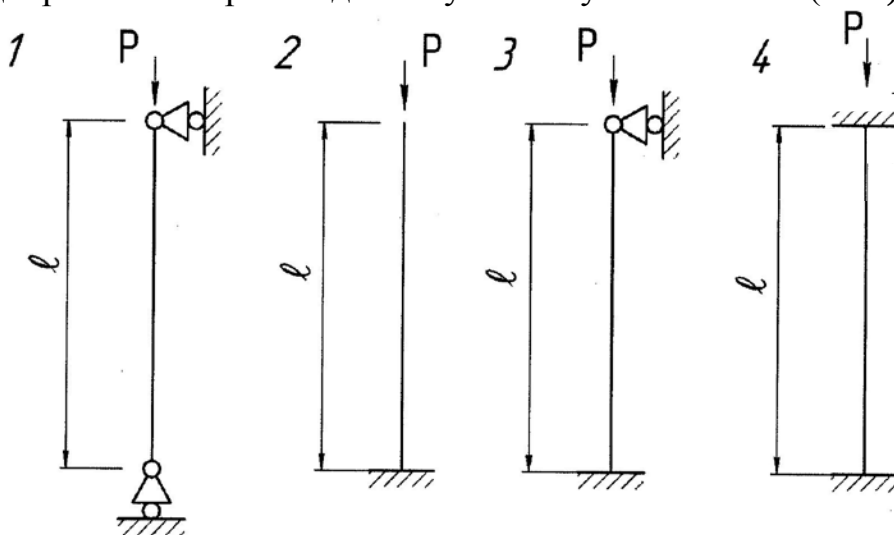


Рис. 3.5. Схема сжимаемого стержня

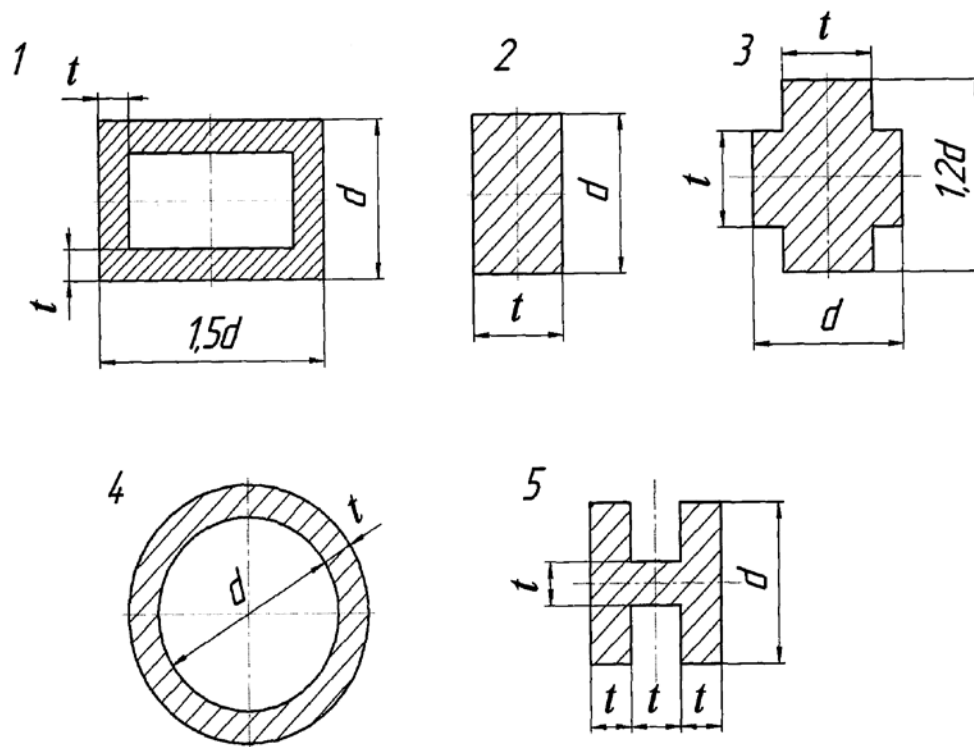


Рис. 3.6. Поперечные сечения стержня (к задаче №1)

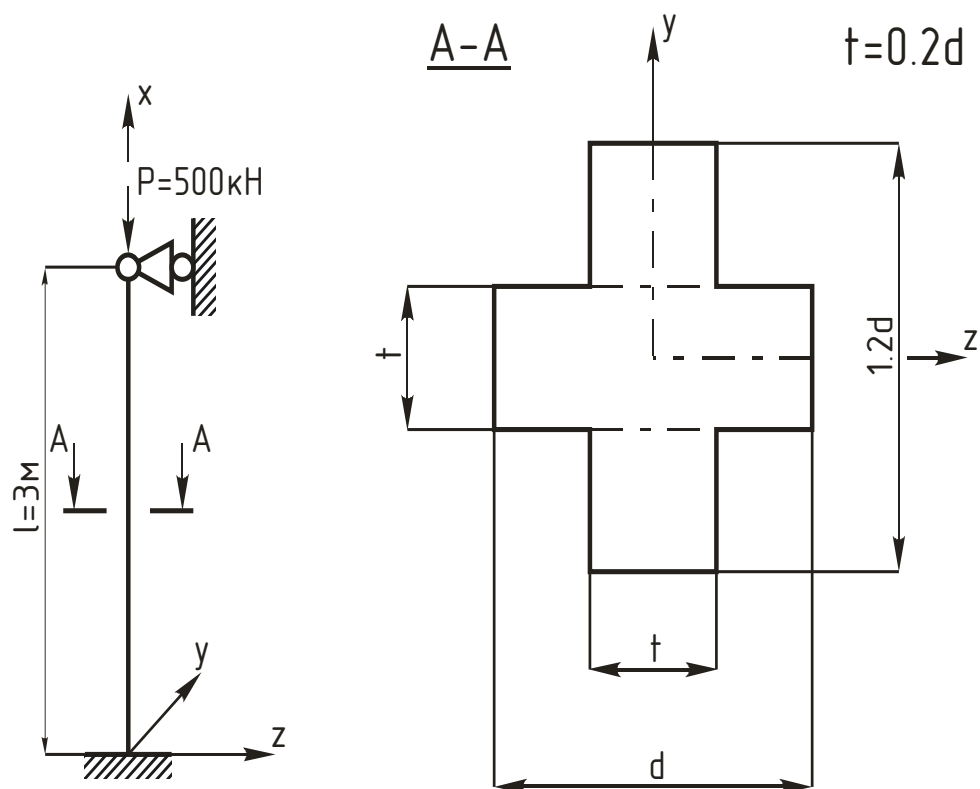


Рис. 3.7. Схема к определению размеров поперечного сечения стержня

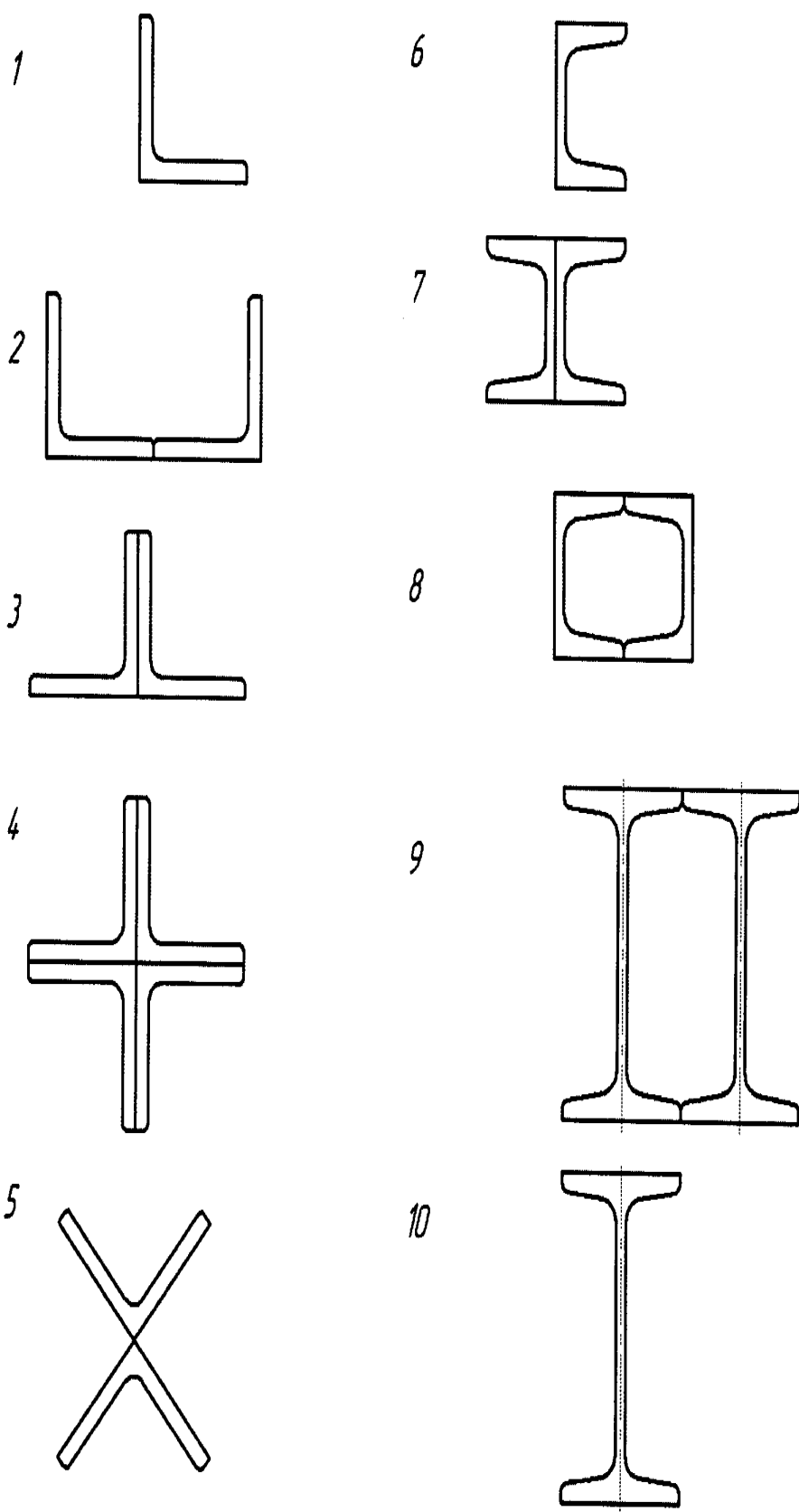


Рис. 3.8. Поперечные сечения стержня (к задаче №2)

Ввиду того, что коэффициент φ неизвестен и зависит от размеров поперечного сечения, которые надо определить, задача решается методом последовательных приближений. Зададим коэффициенту φ , изменяющемуся в пределах $0 \leq \varphi \leq 1$, произвольное значение.

1. Принимаем $\varphi = 0,5$. Вычисляем $F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]}$

$$F = \frac{500}{0,5 \cdot 10} = 100 \text{ см}^2; d = \sqrt{\frac{100}{0,4}} = 15,8 \text{ см};$$

$$i_{\min} = 0,208 \cdot d = 0,208 \cdot 15,8 = 3,29 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{3,29} = 63,8.$$

Из табл. 3.3 находим $\varphi = 0,44$. Найденное значение отличается от первоначально принятого $\varphi = 0,5$. Поэтому переходим ко второму приближению.

2. Принимаем $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,44}{2} = 0,47$.

$$F = \frac{500}{0,47 \cdot 10} = 106 \text{ см}^2; d = \sqrt{\frac{106}{0,4}} = 16,3 \text{ см};$$

$$i_{\min} = 0,208 \cdot 16,3 = 3,39 \text{ см.}$$

$$\text{Гибкость } \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{3,39} = 61,9; \varphi_3 \approx 0,44.$$

Полученное значение $\varphi_3 = 0,44$ совпало с исходным φ_2 , поэтому вычисления можно закончить.

Таблица 3.3

Коэффициент φ

λ	Ст.3	Алюминий	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	1,00	0,97	0,99
20	0,96	0,92	0,91	0,97
30	0,94	0,85	0,81	0,93
40	0,92	0,78	0,69	0,87
50	0,89	0,72	0,57	0,80
60	0,86	0,64	0,44	0,71
70	0,81	0,56	0,34	0,60
80	0,79	0,49	0,26	0,48
90	0,69	0,39	0,20	0,38
100	0,60	0,32	0,16	0,31
110	0,52	0,96	-	0,25
120	0,45	0,22	-	0,22
130	0,40	0,19	-	0,18
140	0,38	0,16	-	0,16
150	0,32	0,14	-	0,14
160	0,29	-	-	0,12
170	0,26	-	-	0,11
180	0,23	-	-	0,10
190	0,21	-	-	0,09
200	0,21	-	-	0,08

Определение грузоподъемности стержня

З а д а н и е и и с х о д н ы е д а н н ы е

Для стального стержня, показанного на рис. 3.5, необходимо определить величину наибольшей допускаемой нагрузки $P_{дон}$, а также коэффициент запаса на устойчивость n_y . Поперечное сечение стержня – прокатные профили, показанные на рис. 3.8, исходные данные в табл. 3.2. Основные характеристики материала:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2; [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2;$$

$$\sigma_T = 270 \text{ МПа} = 27 \text{ кН/см}^2; \gamma = 7,85 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3.$$

Р е ш е н и е

Вычертим схему стержня и поперечное сечение (рис. 3.9). Материал – сталь Ст.3, коэффициент условия закрепления концов стержня такой же,

как и в предыдущей задаче – $\mu = 0,7$. Размеры и геометрические характеристики прокатного профиля (в нашем случае швеллера) берем из соответствующей справочной таблицы «Сортамент прокатной стали» (ГОСТ 8240-89. Швеллеры стальные горячекатаные) – Прил. 2.

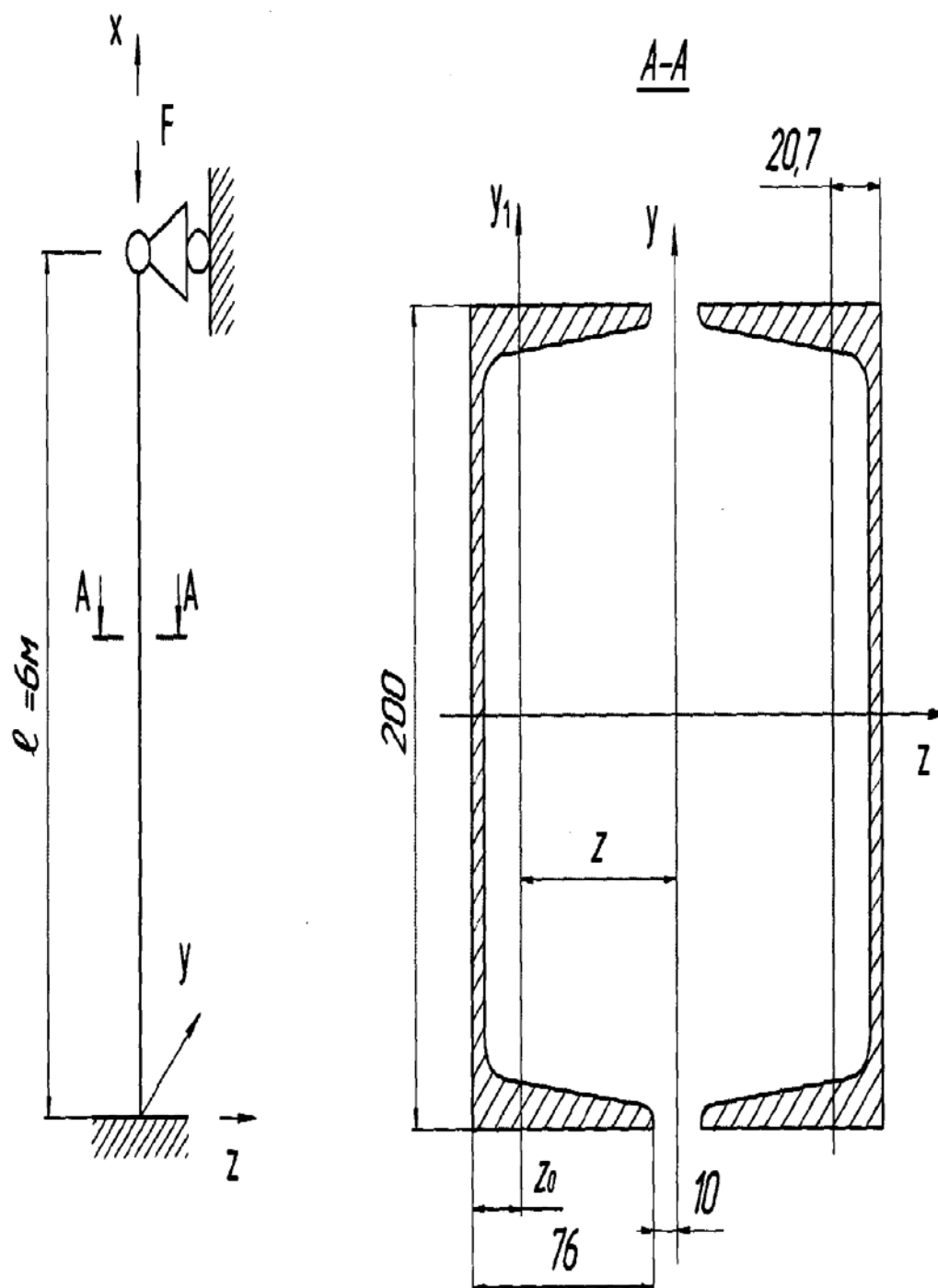


Рис. 3.9. Схема к определению грузоподъемности стержня

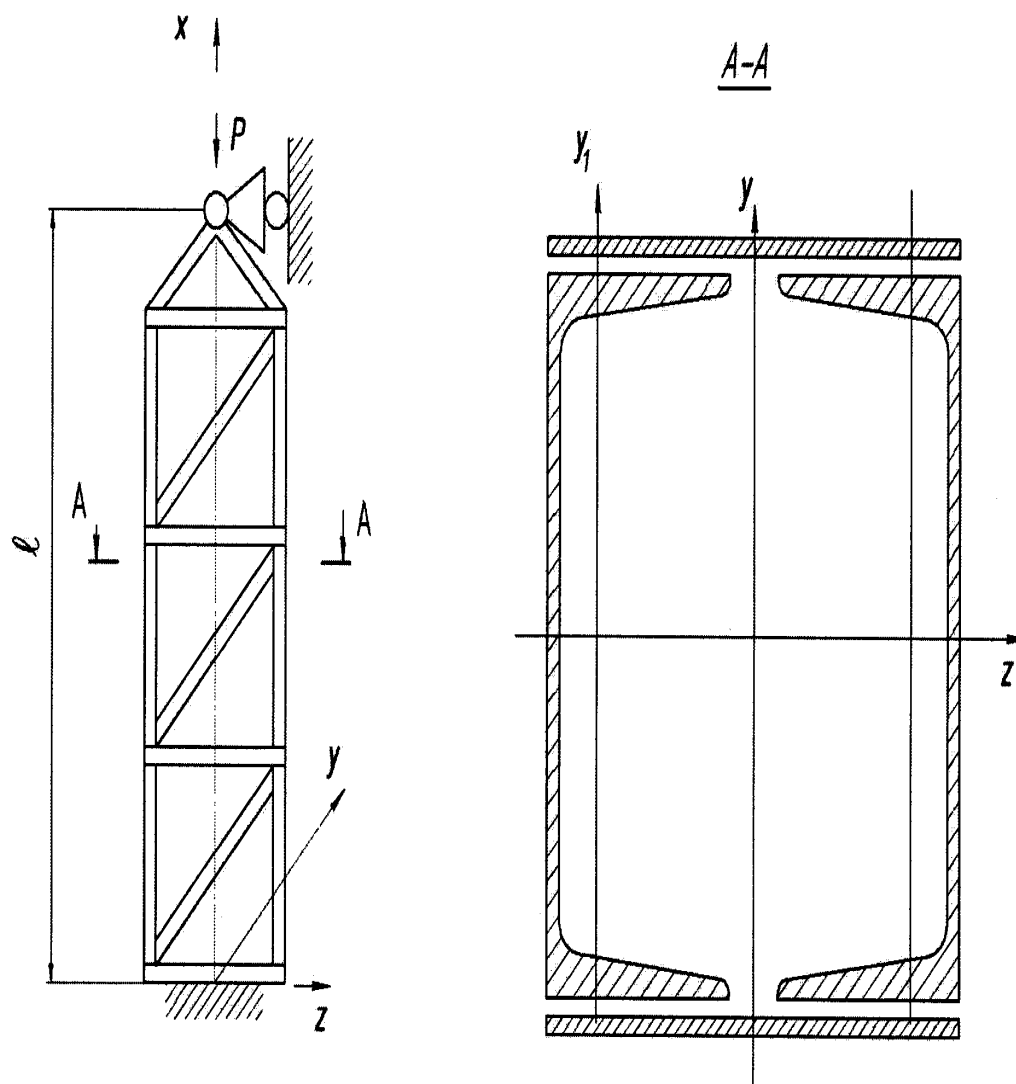


Рис. 3.10. Схема решетки

Для швеллера №20 имеем:

$$F = 23,4 \text{ см}^2; J_z = 1520 \text{ см}^4; J_{y1} = 113 \text{ см}^4; i_z = 8,07 \text{ см}.$$

Грузоподъемность определяем из условия устойчивости (3.11)

$$P \leq F_{\text{сеч}} \varphi[\sigma],$$

где $F_{\text{сеч}}$ – площадь поперечного сечения.

Чтобы определить коэффициент φ , необходимо предварительно найти геометрические характеристики составного сечения.

Одна из главных осей составного сечения z совпадает с главными осями швеллеров, поэтому радиус инерции составного сечения $i_z^{сеч}$ равен радиусу инерции швеллера.

$$i_z^{сеч} = \sqrt{\frac{2J_z}{2F}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1520}{2 \cdot 23,4}} = 8,07 \text{ см.}$$

Вычислим теперь радиус инерции относительно оси y :

$$J_y^{сеч} = (I_{y1} + z^2 F) \cdot 2 = (113 + (7,6 + 1,0 - 2,07)^2 23,4) \cdot 2 = 2221,6 \text{ см}^4;$$

$$i_y^{сеч} = \sqrt{\frac{J_y^{сеч}}{2 \cdot F}} = \sqrt{\frac{2221,6}{23,4 \cdot 2}} = 6,89 \text{ см.}$$

Таким образом, $i_{\min}^{сеч} = i_y^{сеч} = 6,89 \text{ см.}$ Вычислим гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}^{сеч}} = \frac{0,7 \cdot 600}{6,89} = 60,95 \approx 61.$$

Из табл. 3.3 находим φ , соответствующее $\lambda = 61$. Применяя линейную интерполяцию, определим

λ	φ
60	0,86
70	0,81

$$\varphi = 0,86 - 1 \frac{0,86 - 0,81}{10} = 0,855.$$

Далее вычислим грузоподъемность стержня

$$P_{дон} \leq 23,4 \cdot 2 \cdot 0,855 \cdot 16 \leq 640 \text{ кН.}$$

Чтобы найти коэффициент запаса устойчивости, необходимо предварительно подсчитать критическую силу $P_{кр}$. Так как гибкость стержня $\lambda = 61$, потеря устойчивости происходит в области упругопластических деформаций (рис. 3.4). Критическое напряжение найдем по формуле (3.9)

$$\sigma_{кр} = 310 - (1,14 \cdot 61) = 240,5 \text{ МПа} = 24,05 \text{ кН/см}^2.$$

Критическая сила $P_{кр} = \sigma_{кр} F = 24,05 \cdot 23,4 \cdot 2 = 1125,5 \text{ кН}$.
Коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1125,5}{640} = 1,76.$$

Необходимо учитывать одно важное обстоятельство. Составное сечение может работать как сплошное только в том случае, если ветви колонны связаны соединительной решеткой (рис. 3.10) Элементы решетки также обязательно рассчитываются на устойчивость. Однако расчет решетки выходит за рамки настоящего задания.

Часть II. Определение напряжений при ударе

Основные теоретические сведения

Ударом называется кратковременное действие нагрузки.

Продолжительное действие ударных нагрузок лежит в пределах микро и миллисекунд.

При изучении явления удара принимаются некоторые ограничения и допущения:

1. В ударяемой конструкции возникают напряжения, не превышающие предела пропорциональности, и закон Гука сохраняет свою силу.
2. Ударяющее тело является абсолютно жестким и не деформируется.
3. Удар является неупругим, и после удара тела не отделяются друг от друга (падающий груз «прилипает» к ударяемой конструкции).

В допущениях удара следует добавить:

- а) удар мгновенно распространяется по всем точкам тела, воспринимающего удар;
- б) при ударе пренебрегают затратами энергии на нагрев тел и образование пластических деформаций.

В соответствии с этими ограничениями получены следующие формулы для перемещений и напряжений при поперечном ударе

$$\nu_{\delta} = k_{\delta} \nu_{cm}^P; \sigma_{\delta} = k_{\delta} \sigma_{cm}, \quad (3.12)$$

ν_{δ} и σ_{δ} – перемещение и напряжение при ударе (динамическом приложении нагрузки); ν_{cm}^P и σ_{cm} – перемещение и напряжение при статическом приложении нагрузки; k_{δ} – динамический коэффициент, он показывает, во сколько раз динамическая деформация (напряжение) больше статической.

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\nu_{cm}^P}}, \quad (3.13)$$

где h – высота падения груза; ν_{cm}^P – перемещение при статическом приложении силы P .

Величина напряжения при ударе зависит от величины деформации, т.е. от жесткости ударяемого тела. С уменьшением жесткости напряжение при ударе уменьшается. Поэтому для смягчения удара имеет смысл сделать у балки податливые (на пружинах) опоры.

Если масса ударяемой конструкции не является малой величиной по сравнению с массой падающего тела, то ею нельзя пренебречь и формула для динамического коэффициента несколько изменится

$$k_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\nu_{cm}^P} \cdot \frac{P}{P + aQ}}, \quad (3.14)$$

где Q – масса (вес) балки; a – коэффициент приведения распределенной массы к сосредоточенной в точке падения груза P . Из сравнения формул (3.13) и (3.14) следует, что учет массы ударяемой конструкции приводит к уменьшению величины динамического коэффициента.

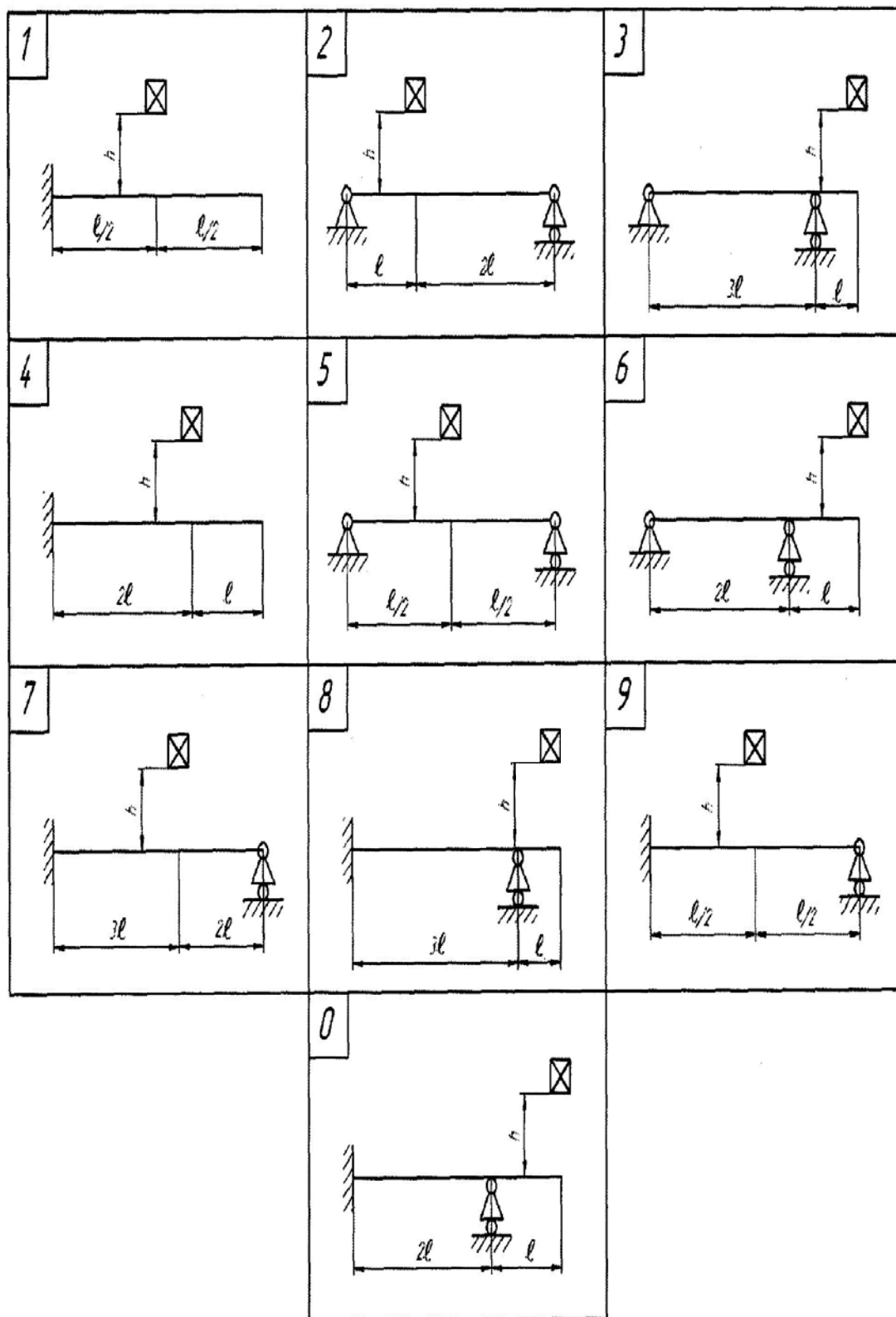


Рис. 3.11. Схемы балок для расчета на удар

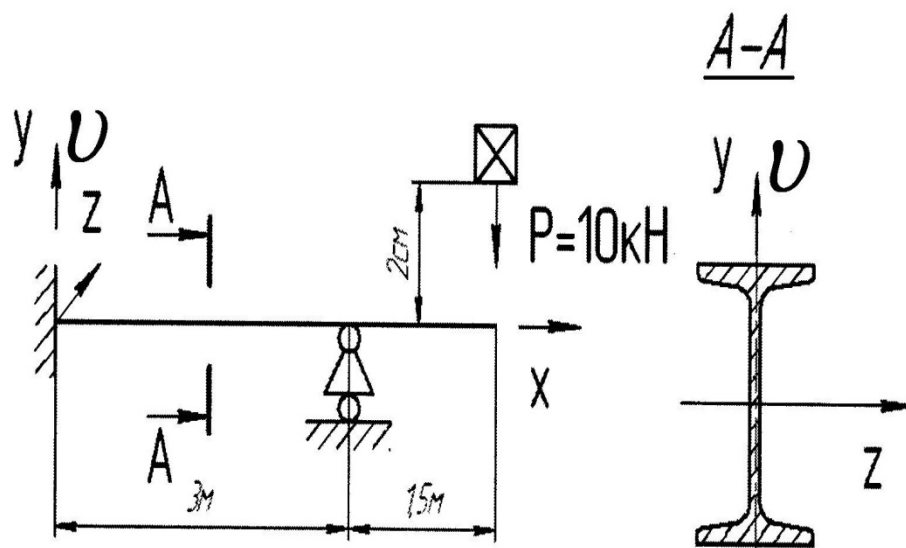


Рис. 3.12. Расчетная схема

Пример расчета

Определение напряжений в балке при поперечном ударе

З а д а н и е и и с х о д н ы е д а н н ы е

Схема балки приведена на рис. 3.12, исходные данные в табл. 3.2 согласно шифру. Необходимо найти максимальное нормальное напряжение при поперечном ударе. Вычертим схему балки с указанием размеров (рис. 3.13). Исходные данные для поперечного сечения балки:

двутавр №33; $I_z = 9840 \text{ см}^4$; $W_z = 597 \text{ см}^3$.

Р е ш е н и е

Предлагаемая балка статически неопределима, поэтому для определения всех величин необходимо сначала раскрыть статическую неопределимость. Воспользуемся методом сил, коэффициенты уравнения метода сил найдем по правилу Мора-Верещагина. Все построения приведены на рис. 3.13.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} 3 \cdot 3 \frac{2}{3} 3 \right) = \frac{9}{EI_z}; \quad \Delta_{1P} = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{1}{2} 3 \cdot 3 \left(15 + \frac{2}{3} 30 \right) \right) = -\frac{315}{2EI_z};$$

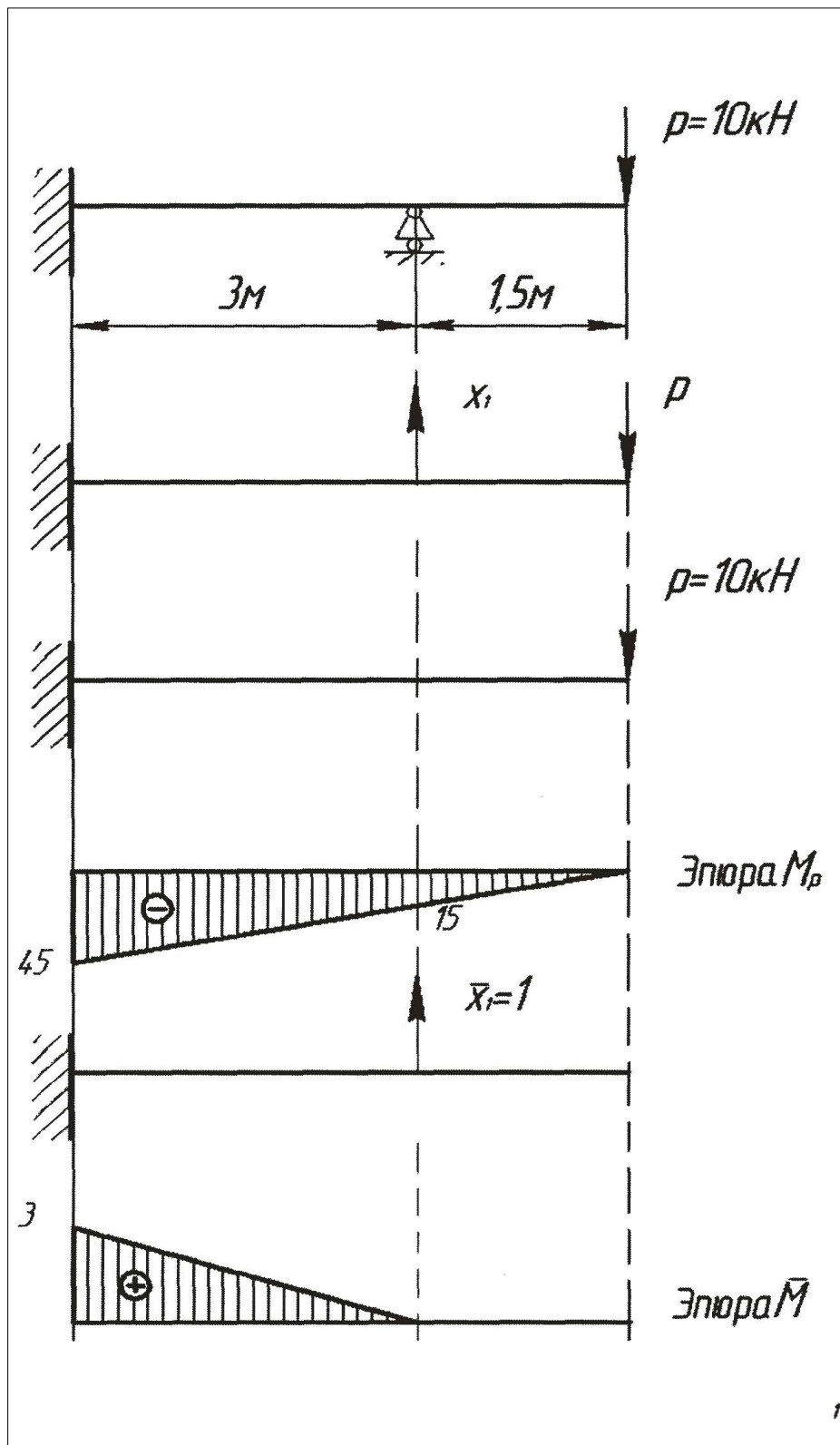


Рис. 3.13. Схемы к раскрытию статической неопределимости балки

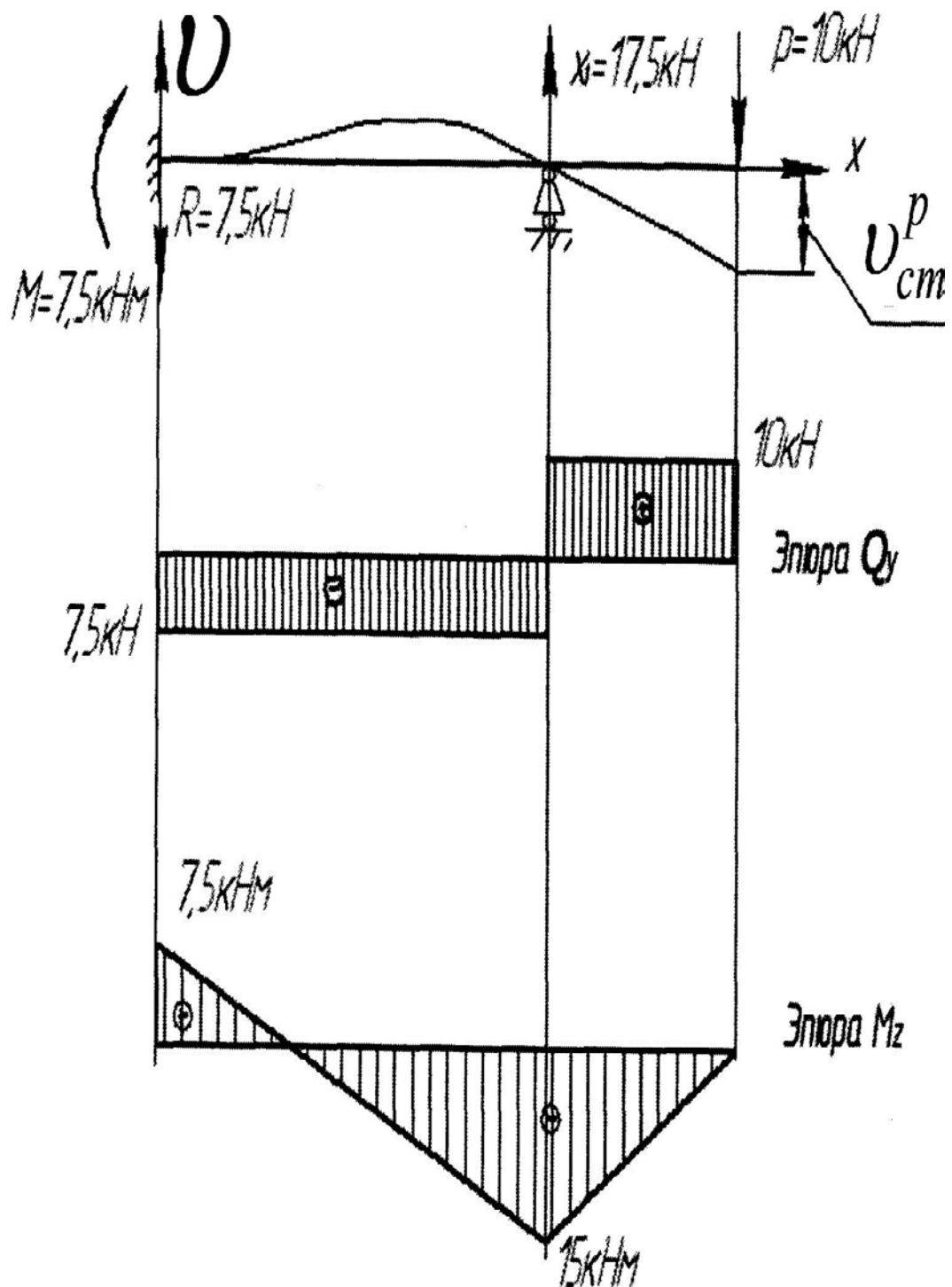


Рис. 3.14. Эпюры внутренней поперечной силы и внутреннего изгибающего момента

$$\delta_{11}X_{11} + \Delta_{1P} = 0; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{(-315)EI_z}{2EI_z \cdot 9} = 17,5 \text{ кН}.$$

Для определения σ_{cm} и ν_{cm}^P построим эпюры Q_y и M_z (рис. 3.14).

$$\sigma_{cm} = \frac{|M_z^{\max}|}{W_z} = \frac{15 \cdot 100}{597} = 2,51 \text{ кН/см}^2.$$

Статическое перемещение ν_{cm}^P найдем с помощью метода начальных параметров. В статически определимой балке эту величину удобнее найти методом Мора-Верещагина.

Запишем уравнение изогнутой оси балки по методу начальных параметров:

$$EI_z \nu(x) = EI_z \nu_0 + EI_z \theta_0 x + M_0 \frac{x^2}{2} - R \frac{x^3}{6} \Big|_{x>0} + X_1 \frac{(x-3)^3}{6} \Big|_{x>3}.$$

В «заделке» невозможны вертикальные перемещения и поворот сечения, поэтому $EI_z \nu_0 = EI_z \theta_0 = 0$. Определяем прогиб ν_{cm}^P в точке с координатой $x = 4,5$ м.

$$EI_z \nu_{cm}^P = 7,5 \frac{4,5^2}{2} - 7,5 \frac{4,5^3}{6} + 17,5 \frac{1,5^3}{6} = -28,18 \text{ кНм}^3;$$

$$\nu_{cm}^P = \frac{-28,18}{EI_z} = \frac{-28,18 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 9840} = 0,143 \text{ см}.$$

Далее при расчете принимаем $|\nu_{cm}^P| = 0,143 \text{ см}.$

Найдем теперь динамический коэффициент и наибольшее нормальное напряжение:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,143}} = 6,38;$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{cm} = 6,38 \cdot 2,51 = 16 \text{ кН/см}^2 = 160 \text{ МПа}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйгенсон С.Н., Корихин Н.В., Шевелев Л.П. Краткий курс сопротивления материалов. Часть 1.: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во ПИМаш, 2003.
2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 2000.
3. Павлов П.А., Паршин Л.К., Мельников Б.Е., Шерстиев В.А. Сопротивление материалов: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2003.
4. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1999.
5. Шалашилин В.И., Горшков А.Г., Трошин В.Н. Сопротивление материалов. – М.: МАИ. – 2000. – 613 с.
6. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе MathCAD: Учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург. – 2004. – 512 с.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
8. Скопинский В.Н. Расчеты стержней и шарнирно-стержневых систем на растяжение и сжатие: практикум по сопротивлению материалов. – М.: МГИУ, 2005. – 85 с.
9. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчет деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справочник. – М.: Машиностроение. – 1985. – 223 с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его общий интеграл. Определения констант интегрирования и их физический смысл.
2. Вывод уравнения метода начальных параметров для балки с несколькими участками.
3. Балки переменного сечения. Балка равного сопротивления изгибу. Рессора. Определения перемещений.
4. Потенциальная энергия изгиба. Принцип возможных перемещений для деформируемых тел. Теоремы о взаимности возможных работ и возможных перемещений.
5. Вывод формулы Мора для перемещений при изгибе балок.
6. Графический способ вычисления интеграла Мора – правило Верещагина.
7. Расчет статически неопределимых балок методом сил.
8. Расчет балок по предельному состоянию.
9. Расчет статически неопределимых рам методом сил.
10. Сложное сопротивление. Построения эпюр внутренних усилий в ломаном стержне.
11. Косой изгиб. Определение напряжений, нейтральная линия, проверка прочности.
12. Определение перемещения в балках при косом изгибе.
13. Изгиб с растяжением. Определение напряжений, нулевая линия, проверка прочности.
14. Внецентренное растяжение-сжатие. Ядро сечения. Проверка прочности.
15. Изгиб с кручением. Определение напряжений. Расчетные формулы по теориям прочности.
16. Устойчивость сжатых стержней. Вывод формулы Эйлера для критической силы.
17. Определение критической силы для различных случаев закрепления концов стержня.
18. Пределы применимости формулы Эйлера. Кривая критических напряжений.
19. Устойчивость стержней за пределом упругости.
20. Устойчивость стержня с начальной погибью.
21. Практический метод расчета стержня на устойчивость. Рациональные формы и рациональный материал сжатых стержней.
22. Расчет на прочность при переменных напряжениях. Концентрация напряжений. Механизм усталостного разрушения. Определения предела выносливости при симметричном цикле.

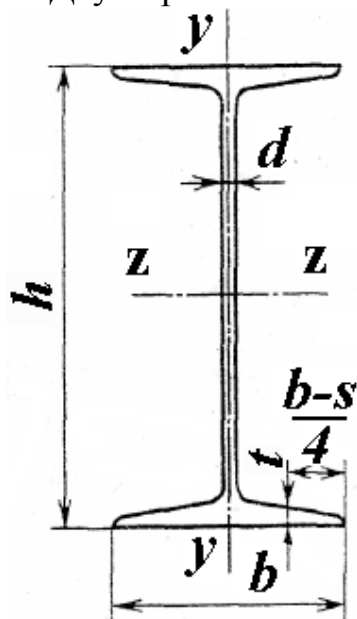
Продолжение Прил. 1

23. Диаграммы выносливости при несимметричном цикле. Влияния различных факторов на предел выносливости. Коэффициент запаса.
24. Динамические напряжения при постоянном ускорении (в тросе подъемника).
25. Динамическое напряжение во вращающемся кольце.
26. Свободные незатухающие колебания системы с одной степенью свободы: продольные, поперечные, крутильные.
27. Свободные незатухающие колебания со многими степенями свободы. Приведенная масса.
28. Вынужденные незатухающие колебания при действии периодической возмущающей силы. Резонанс.
29. Критическое число оборотов вала.
30. Вынужденные затухающие колебания при действии периодической возмущающей силы. Динамический коэффициент.
31. Поперечные колебания стержня с распределенной массой.
32. Поперечные колебания сжатого стержня.
33. Крутильные колебания круглых валов.
34. Определение напряжений при ударе.
35. Напряжения при поперечном и продольном ударе.
36. Напряжения при крутильном ударе.
37. Безмоментная теория оболочек. Геометрия оболочек вращения. Вывод уравнения Лапласа.
38. Уравнения равновесия отсеченной части оболочки вращения. Напряжения в безмоментной оболочке. Проверка прочности.
39. Частные случаи сферического, цилиндрического и конического сосудов.
40. Расчет толстостенных труб. Основные гипотезы, вывод уравнений равновесия элемента.
41. Деформация элемента толстостенной трубы. Вывод второго разрешающего уравнения.
42. Интегрирование уравнений толстостенной трубы. Определение произвольных постоянных.
43. Кривой брус. Построение эпюр внутренних усилий для бруса круглого очертания.
44. Вывод формулы для нормальных напряжений при изгибе кривого бруса.
45. Определение положения нейтральной оси при изгибе кривого бруса. Пример вычисления для прямоугольного сечения.
46. Ползучесть материала. Сущность явления. Технические теории ползучести.
47. Теория разрушения. Определение вязкости разрушения. Расчет прочности конструкций при наличии в них дефектов.

Приложение 2

Сортамент прокатной стали

Двутавры стальные горячекатаные (по ГОСТ 8239–89)



h – высота двутавра;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 F – площадь поперечного сечения;
 J – момент инерции;
 W – момент сопротивления;
 S – статический момент полусечения;
 i – радиус инерции.

№ дву- тав- ра	Мас- са, м·кг	Размеры, мм				F , см ²	J_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	S_z , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
		h	b	d	t								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2 89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Продолжение Прил. 2

Швеллеры стальные горячекатаные по ГОСТ 8240–89

h – высота швеллера;

b – ширина полки;

d – толщина стенки;

t – средняя толщина полки;

F – площадь поперечного сечения;

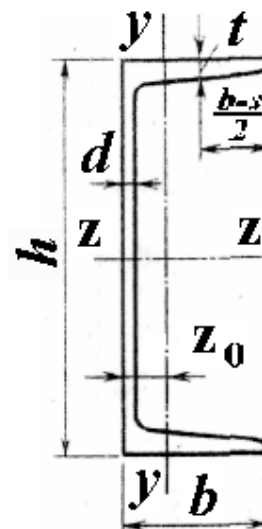
J – момент инерции;

W – момент сопротивления;

S – статический момент полусечения;

i – радиус инерции;

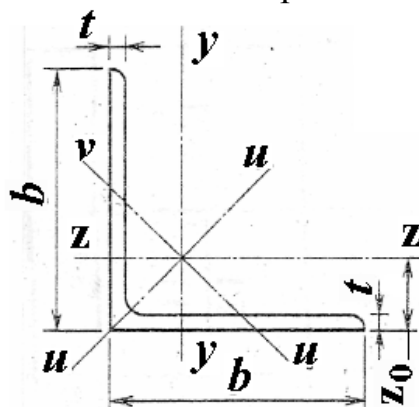
Z_0 – расстояние от оси y до наружной грани стенки.



№ швеллера	Масса, м·кг	Размеры, мм				F , см ²	J_z , см ⁴	W_z , см ³	i_z , см	S_z , см	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	Z_0 , см
		h	b	d	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4,84	50	32	4,4	1	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Продолжение Прил. 2

Уголки стальные горячекатаные равнополочные (по ГОСТ 8509–86)



b – ширина полки;

t – толщина полки;

F – площадь поперечного сечения;

J – момент инерции;

i – радиус инерции;

J_{zy} – центробежный момент инерции;

Z_0 – расстояние до центра тяжести.

№ уголка	Масса 1 м уголка, кг	Размеры, мм		F , см ²	J_z , см ⁴	i_z , см	J_u , max, см ⁴	i_u , max, см	J_v , min, см ⁴	i_v , min, см	J_{zy} , см ⁴	Z_0 , см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	5,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	7,36	80	6	9,38	57,9	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	222	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	24,3	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	28,9	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12		422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53

Продолжение Прил. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89
20	37,0	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	1073	5,37
	39,9		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	1155	5,42
	42,8		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	1236	5,46
	48,7		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	1392	5,54
	60,1		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	1689	5,70
	74,0		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	2028	5,89
	87,6		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	2331	6,07
22	47,4	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	1655	5,93
	53,8		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	1869	6,02
25	61,5	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	2775	6,75
	68,9		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	3089	6,83
	76,1		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	3395	6,91
	83,3		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	3691	7,00
	94,0		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	4119	7,11
	104,5		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	4527	7,23
	111,4		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	4788	7,31

Приложение 3

Характеристики прочности стали, МПа

Марка стали	Предел прочности при растяжении, σ_{nc}	Предел текучести, σ_m	Предел выносливости при симметричном цикле	
			Изгиб, σ_{-1}	Кручение, τ_{-1}
Углеродистая				
20	450	250	200	120
40	650	300	280	150
45	700	320	300	180
60	800	410	350	200
Легированная				
20X	800	500	360	210
40X	900	650	400	240
30XM	1000	750	410	230
20XНЗА	1200	900	500	280
40XНМД	1500	1000	700	450
30XГСА	1600	120	700	400

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава	1. Домашние индивидуальные задачи	5
	Задача 1. Определение перемещений в балках методом начальных параметров	5
	Задача 2. Определение перемещений в балках и рамах по способу Мора-Верещагина	7
	Задача 3. Статически неопределимые балки	9
	Задача 4. Статически неопределимые рамы	10
	Задача 5. Косой изгиб.....	11
	Задача 6. Совместное действие изгиба и растяжения (сжатия). Внецентренное растяжение (сжатие).....	13
	Задача 7. Колебания упругих систем.....	14
	Задача 8. Напряжения и перемещения при ударной нагрузке	16
Глава	2. Домашние расчетно-графические работы	18
	Указания к выполнению расчетно-графических работ	18
	Расчетно-графическая работа 1	19
	Расчет статически неопределимых балок и рам методом сил	
	Расчетно-графическая работа 2	49
	Расчет вала на изгиб и кручение. Расчет вала при повторно-переменной (циклической) нагрузке	
	Расчетно-графическая работа 3	62
	Расчет сжатых стержней на устойчивость, определение напряжения при ударе	
	Литература.....	83
	Приложение 1. Контрольные вопросы	84
	Приложение 2. Сортамент прокатной стали	86
	Приложение 3. Характеристики прочности стали	90