III. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.

а) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Ряд Маклорена имеет вид $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, где $f^{(n)}(0)$ - значение n-ой производной в нуле ($f^{(0)}(0) = f(x)$). Для заданной функции имеем: $f(0) = \operatorname{tg} 0 = 0$. Теперь найдем последовательно столько производных, сколько потребуется, чтобы три из них были отличны от нуля в точке $x = 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1/\cos^2 x, \quad f'(0) = 1; \\
f''(x) &= 2\cos^{-3} x \cdot \sin x, \quad f''(0) = 0; \\
f'''(x) &= 2\cos^{-2} x + 6\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x, \quad f'''(0) = 2; \\
f^{IV}(x) &= 16\cos^{-3} x \cdot \sin x + 24\cos^{-5} x \cdot \sin^3 x, \ f^{IV}(0) = 0; \\
f^{V}(x) &= 8\cos^{-2} x \cdot (2 + 15\operatorname{tg}^4 x + 15\operatorname{tg}^2 x), \ f^{V}(0) = 16.
\end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + 2x^5/15 + \ldots$

б) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$.

Для этой функции имеем:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0; \\
f'(x) &= \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, \quad f'(0) = 1; \\
f''(x) &= \frac{-\sin x(1 + \sin^2 x) - \cos x \cdot 2\sin x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \\
&= \sin x \cdot \frac{\sin^2 x - 3}{(\sin^2 x + 1)^2}, \quad f''(0) = 0.
\end{aligned}$$

Обозначим: $\dfrac{\sin^2 x - 3}{(\sin^2 x + 1)^2} = \phi(x)$, $\dfrac{7 - \sin^2 x}{(\sin^2 x + 1)^3} = \psi(x)$.

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= \cos x \cdot \phi(x) + \sin x \cdot \sin 2x\psi(x), \qquad f'''(0) = -3; \\
f^{IV}(x) &= \psi(x)(-\sin x \cdot +2\cos x \cdot \sin 2x + \\
&+ \sin x \cdot \cos 2x) + \sin x \cdot \sin 2x \cdot \psi'(x), \qquad f^{IV}(0) = 0; \\
f^{V}(x) &= -\cos x \cdot \phi(x) + 6\cos x \cdot \cos 2x \cdot \psi(x) +
\end{aligned}$$

$$+\ \sin x\cdot[\psi''(x)\cdot\sin 2x+2\psi'(x)(3\cos^2 x+2\cos 2x)-$$
$$-\ 3\sin 2x\cdot\psi(x)],\qquad f^V(0)=3+42=45.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(\sin x)=x-x^3/2+3x^5/8+\ldots$

IV. Разложить функцию в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, используя известные разложения Маклорена. Указать область, в которой разложение справедливо.

а) $f(x)=e^{3-x}+5x,\ \ x_0=2.$
Обозначим $x-x_0=x-2=-t$, тогда $x=-t+2$ и

$$\begin{aligned}
e^{3-x}+5x &= e^{1+t}-5t+10=\\
&= e(1+t+\frac{t^2}{2}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots)-5t+10=\\
&= e+10+(e-5)t+e\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=\\
&= e+10+(5-e)(x-2)+e\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Разложение получено. Теперь выясним, в какой области оно справедливо. Нам известно, что функция e^t представима своим рядом Маклорена при $t\in(-\infty,+\infty)$. Так как $x=-t+2$, то отсюда следует, что областью, в которой полученное разложение справедливо является вся вещественная ось.

Ответ: $e^{3-x}+5x=e+10+(5-e)(x-2)+e\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-2)^n}{n!}$ при $x\in(-\infty,+\infty)$.

б) $f(x)=(x^2+2x-3)^{-1},\ \ x_0=0.$

Знаменатель данной дробно-рациональной функции имеет простые вещественные корни, из чего следует, что существует единственное представление этой функции в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+3}=\\
&= -\frac{1}{4}\left[(1-x)^{-1}+(3+x)^{-1}\right]=-\frac{1}{4}\left[(1-x)^{-1}+\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Каждое из слагаемых $(1-x)^{-1}$ и $(1+x/3)^{-1}$ в последней квадратной скобке представим рядом Маклорена для $(1+t)^{\mu}$, где $\mu=-1$, $t=-x$ в первом слагаемом и $t=x/3$ — во втором. Тогда получим следующие представления:

$$(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad \frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Первое разложение справедливо на интервале $(-1,1)$ второе — на $(-3,3)$ (те же разложения в ряд простейших дробей $(1-x)^{-1}$ и $(1+x/3)^{-1}$ можно получить, используя формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии). Сложив почленно два ряда и умножив на $-1/4$, получим следующее разложение:

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{4\cdot 3^{n+1}} x^n,$$

которое справедливо на интервале $(-1,1)$.

Ответ: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{4\cdot 3^{n+1}}\ x^n$ при $x \in (-1,1)$.

в) $f(x) = \ln(-x^2+2x+3), \quad x_0 = 2.$

Сделаем замену переменных $x-2=t$; тогда, используя стандартное разложение Маклорена для функции $f(x) = \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, будем иметь:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left[-(t+2)^2 + 2(t+2) + 3\right] = \ln\left[-(t^2+2t-3)\right] = \\ &= \ln\left[3(1-t)\left(1+\frac{t}{3}\right)\right] = \ln 3 + \ln(1-t) + \ln\left(1+\frac{t}{3}\right) = \\ &= \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n3^n}, \quad t = x-2. \end{aligned}$$

Область представимости функции $\ln(1-t)$ рядом $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^n/n$ есть полуоткрытый интервал $J_1 = [-1,1)$, а функции $\ln(1+t/3)$ рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n3^n}$ — интервал $J_2 = (-3,3]$. Оба разложения справедливы в интервале J_1, то есть при $-1 \le t < 1$. Последнее неравенство, учитывая, что $t = x-2$, эквивалентно неравенству $-1 \le x-2 < 1$ или $1 \le x < 3$.

Складывая эти ряды почленно и переходя к переменной x, получим разложение (ответ)

$$\ln(-x^2+2x+3) = \ln 3 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{n3^n}(x-2)^n,$$

которое справедливо в интервале $[1,3)$.

V. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

Используя стандартный ряд Маклорена для функции $f(t) = e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, будем иметь:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Интегрируя этот ряд почленно, получим

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Отсюда, на основании признака Лейбница, следует, что абсолютная величина погрешности, возникающей при замене суммы ряда n-ой частичной суммой, не превосходит модуля первого отброшенного члена. Вычисляя последовательно слагаемые полученного числового ряда видим, что модуль пятого члена

$$|a_5| = \left|\frac{(-1)^5}{5!\,(2\cdot 5+1)}\right| = \frac{1}{120\cdot 11} < 0,001.$$

Следовательно, в качестве нужного нам приближения достаточно взять

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \simeq 0,747.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx \simeq 0,747.$

VI. Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения в виде ряда по степеням x :

$$\begin{cases} y'' - xy = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Первый способ решения.

Можно решение этой задачи сразу искать в виде ряда Маклорена

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad \text{где } y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

а остальные значения производных в нуле $y^{(n)}(0)$, $n \geq 2$ последовательно находить из исходного уравнения:

$$\begin{array}{lcl} y'' &=& xy & \Rightarrow & y''(0) &=& 0, \\ y''' &=& y + xy' & \Rightarrow & y'''(0) &=& y(0) = 1, \\ y^{IV} &=& 2y' + xy'' & \Rightarrow & y^{IV}(0) &=& 2y'(0) = 0, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y^{(n+3)} &=& (n+1)y^{(n)} + xy^{(n+1)} & \Rightarrow & y^{(n+3)}(0) &=& (n+1)y^{(n)}(0). \end{array}$$

Первое равенство получили, выразив y'' из данного в задаче уравнения, для получения второго продифференцировали уравнение, для получения третьего продифференцировали уравнение второй раз и так далее. Таким образом, получили рекуррентную формулу, выражающую значение $(n+3)$–ей производной в нуле через значение n–ой (то есть на 3 порядка ниже) производной. Поскольку $y'(0) = y''(0) = 0$, то значения всех производных порядка $3m+1$ и $3m+2$, $m = 0, 1, 2...$, в нуле равны нулю. Отличны от нуля при $x = 0$ только производные, порядок которых кратен трем:

$$\begin{array}{lcl} y^{VI}(0) &=& 4 \cdot y'''(0) = 4 \cdot 1, \quad y^{IX}(0) = 7 \cdot y^{VI}(0) = 7 \cdot 4 \cdot 1, \ldots \\ y^{(3m)}(0) &=& 1 \cdot 4 \cdot \ \ldots \ \cdot [3(m-1)+1], \qquad m = 1, 2, \ldots \end{array}$$

Ответ: $y(x) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot \ \ldots \ \cdot (1 + 3(m-1))}{(3m)!}\, x^{3m}.$

III. **Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции в ряд Маклорена.**

1. $f(x) = \ln(5 + e^{-2x})$.
2. $f(x) = \operatorname{arcctg}(2 + 3x)^{-1}$.
3. $f(x) = \exp(\operatorname{arctg} 3x)$.
4. $f(x) = \exp(x^2 + 4x + 7)$.
5. $f(x) = \exp(5 - x)^{-1}$.
6. $f(x) = (1 + \operatorname{ctg}(x + 1))^{-1}$.
7. $f(x) = x \sin(1 + 2x)$.
8. $f(x) = 1 + x \operatorname{arctg}(x + 1)$.
9. $f(x) = \ln \cos 3x$.
10. $f(x) = \exp(\arcsin 3x)$.
11. $f(x) = (\cos 3x)^{-1}$.
12. $f(x) = \ln(1 - \sin x)^{-1}$.
13. $f(x) = e^x \cos^{-1} 2x$.

14. $f(x) = \exp\left(1 + \sin\dfrac{x}{2}\right)$.

15. $f(x) = \operatorname{arctg} e^{-3x}$.

16. $f(x) = \exp\left(1 + \sin x\right)$.

17. $f(x) = \exp\left(\operatorname{tg} 3x\right)$.

18. $f(x) = \sqrt{3 + 5x - x^2}$.

19. $f(x) = x \operatorname{ctg}(3 - x)$.

20. $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{arctg} 2x}$.

21. $f(x) = \ln^2(1 - 5x)$.

22. $f(x) = \ln\cos(1 - 3x)$.

23. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 3}$.

24. $f(x) = \ln(3 - \sin 2x)$.

25. $f(x) = x \operatorname{tg}(x + 1)$.

26. $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - 2x)$.

27. $f(x) = \sqrt[3]{1 + \cos x}$.

28. $f(x) = \operatorname{arctg}(2 + e^{-x})$.

29. $f(x) = \sin^3(1 + x)$.

30. $f(x) = \sqrt[3]{2 + 3x + x^3}$.

IV. Построить ряд Тейлора данной функции в окрестности точки x_0, используя стандартные разложения Маклорена основных элементарных функций. Указать область, в которой разложение справедливо.

1. a) $f(x) = \sin 3x,\ x_0 = \pi;$
   ~~b) $f(x) = xe^{3+x},\ x_0 = 1.$~~

2. a) $f(x) = e^{2+3x},\ x_0 = 2;$
   ~~b) $f(x) = 6\sin x^3 + x^2(6 - x^4),\ x_0 = 0.$~~

3. a) $f(x) = \ln(6 + 3x),\ x_0 = -1;$
   ~~b) $f(x) = 2 - 3(x^5 - x) + 3\cos x^2,\ x_0 = 0.$~~

4. a) $f(x) = 5(2 - x)^{-1/3},\ x_0 = 1;$
   ~~b) $f(x) = x^2\cos(x + 1),\ x_0 = -1.$~~

5. a) $f(x) = \cos(x/4),\ x_0 = \pi;$
   ~~b) $f(x) = x^2(1 + x)^{-2},\ x_0 = 0.$~~

6. a) $f(x) = 2^{3(x+1)},\ x_0 = -2;$
   ~~b) $f(x) = x(x + 2)^{-1},\ x_0 = 1.$~~

7. a) $f(x) = e^{x^2 - 4x},\ x_0 = 2;$
   ~~b) $f(x) = 1 + x^2 - \ln(2 - x),\ x_0 = 1.$~~

8. a) $f(x) = (4 - 3x)^{-1},\ x_0 = -1;$
   ~~b) $f(x) = (x + 2)(e^{x^2} - 1),\ x_0 = 0.$~~

9. a) $f(x) = (5-2x)^{1/3}$, $x_0 = 2$;
~~b) $f(x) = x\sin(x+1)$, $x_0 = -1$.~~

10. a) $f(x) = (x^2-3x+2)^{-1}$, $x_0 = 0$;
~~b) $f(x) = xe^{2x}$, $x_0 = 1$.~~

11. a) $f(x) = \ln(2-5x)$, $x_0 = -3$;
~~b) $f(x) = \mathrm{sh}2x$, $x_0 = 1$.~~

12. a) $f(x) = (7+3x)^{-1/4}$, $x_0 = -1$;
~~b) $f(x) = \mathrm{ch}3x$, $x_0 = 2$.~~

13. a) $f(x) = e^{x^2-6x+7}$, $x_0 = 3$;
~~b) $f(x) = x(x^2-2x+5)^{-1}$, $x_0 = 1$.~~

14. a) $f(x) = (5+x^2)^{-1/2}$, $x_0 = 0$;
~~b) $f(x) = x^2e^x$, $x_0 = 1$.~~

15. a) $f(x) = (2x-5)^{-1}$, $x_0 = -3$;
~~b) $f(x) = x+2+xe^x$, $x_0 = 1$.~~

16. a) $f(x) = \cos(\pi x/3)$, $x_0 = -3/2$;
~~b) $f(x) = x\ln(1+3x)$, $x_0 = 1$.~~

17. a) $f(x) = e^{-3(x^2+5)}$, $x_0 = 0$;
~~b) $f(x) = x(x+3)^{-1}$, $x_0 = 1$.~~

18. a) $f(x) = x^3\cos^2 3x$, $x_0 = 0$;
~~b) $f(x) = (x+1)(x-2)^{-1}$, $x_0 = 1$.~~

19. a) $f(x) = e^x + x + 3$, $x_0 = 2$;
~~b) $f(x) = (1+x)\ln(3+x)$, $x_0 = -2$.~~

20. a) $f(x) = x^2 + 3 + 1/x$, $x_0 = 1$;
~~b) $f(x) = \mathrm{ch}2x$, $x_0 = -1$.~~

21. a) $f(x) = \ln(x^2+6x+5)$, $x_0 = 0$;
~~b) $f(x) = xe^{1-x}$, $x_0 = 1$.~~

22. a) $f(x) = e^{2-x} + 3x$, $x_0 = 4$;
~~b) $f(x) = (7-2x)(x^2-x-2)^{-1}$, $x_0 = 0$.~~

23. a) $f(x) = x^2 + \cos 2x$, $x_0 = -\pi$;
~~b) $f(x) = x\ln(4+3x)$, $x_0 = -1$.~~

24. a) $f(x) = (x^2 + x)^{-1}, \ x_0 = -2;$
~~b) $f(x) = (2x + 3)(e^{x^2} - 1), \ x_0 = 0.$~~

25. a) $f(x) = x^2 e^{-6x}, \ x_0 = 0;$
~~b) $f(x) = x^3 + \ln(2 - x), \ x_0 = 1.$~~

26. a) $f(x) = x^2 \cos(x^3 + \pi/4), \ x_0 = 0;$
~~b) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}, \ x_0 = -3.$~~

27. a) $f(x) = (2 + 7x^5)^{-1/2}, \ x_0 = 0;$
~~b) $f(x) = \mathrm{sh} x, \ x_0 = 2.$~~

28. a) $f(x) = (4x)^{1/3}, \ x_0 = -1;$
~~b) $f(x) = x^2 + \sin(1 - x), \ x_0 = 1.$~~

29. a) $f(x) = \sin(x^2 + \pi/4), \ x_0 = 0;$
~~b) $f(x) = x \ln(3 + x), \ x_0 = -1.$~~

30. a) $f(x) = (2x + 3)^{-2/3}, \ x_0 = -2;$
~~b) $f(x) = \mathrm{ch} x, \ x_0 = 1.$~~

5. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} dx.$

2. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1 - e^{-x/2}}{x} dx.$

3. $\int\limits_0^{1,5} 1\sqrt[4]{81 + x^4} dx.$

4. $\int\limits_0^{0,2} \cos(25x^2) dx.$

5. $\int\limits_0^{0,4} \sin(5x/2)^2 dx.$

6. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2} dx.$

7. $\int\limits_0^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{64 + x^3}} dx.$

8. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln(1 + x/2)}{x} dx.$

9. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2} dx.$

10. $\int\limits_0^{0,1} \sin(100x^2) dx.$

11. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.$

12. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{16 + x^4}} dx.$

13. $\int\limits_0^{0,5} \cos(4x^2)dx.$

14. $\int\limits_0^{0,2} \sin(25x^2)dx.$

15. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx.$

16. $\int\limits_0^{1,5} \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}dx.$

17. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x/5)}{x}dx.$

18. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx.$

19. $\int\limits_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx.$

20. $\int\limits_0^{1} \cos x^2 dx.$

21. $\int\limits_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[3]{125+x^3}}dx.$

22. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx.$

23. $\int\limits_0^{0,5} \sin(4x^2)dx.$

24. $\int\limits_0^{0,1} \cos(100x^2)dx.$

25. $\int\limits_0^{2} \frac{1}{\sqrt[4]{256+x^4}}dx.$

26. $\int\limits_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx.$

27. $\int\limits_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt[4]{625+x^4}}dx.$

28. $\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}dx.$

29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25}dx.$

30. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx.$

6. Найти решение задачи Коши в виде ряда.

1. $2y'' + xy' + 10y = x - x^2;\ y(0) = 1/30, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2xy' + 4y = 1 + x + x^2;\ y(0) = 3/16, y'(0) = 0.$
3. $5y'' - 2xy' - 2y = -2x^2;\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$
4. $2y'' - xy' + 2y = 1;\ y(0) = -1, y'(0) = -12.$
5. $2y'' + xy' + 10y = 11x;\ y(0) = 2, y'(0) = 1.$
6. $2y'' - xy' + 2y = x - 4x^2;\ y(0) = -1, y'(0) = 1.$
7. $3y'' - xy' + 2y = 1 + 2x^2;\ y(0) = 5, y'(0) = 0.$

8. $3y'' - xy' + 3y = 1;\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

9. $4y'' - 2xy' - 4y = 3x^3;\ y(0) = 0, y'(0) = 2.$

10. $3y'' + 2xy' + 4y = 1;\ y(0) = 1, y'(0) = 0.$

11. $4y'' - 3xy' + 3y = 1;\ y(0) = 0, y'(0) = 0.$

12. $4y'' - 3xy' - 3y = 2x + 2x^3;\ y(0) = 0, y'(0) = 3.$

13. $3y'' - 4xy' + 4y = 3x^2;\ y(0) = 0, y'(0) = 1/2.$

14. $5y'' + 2xy' - 4y = 0;\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$

15. $5y'' + 2xy' - 4y = -7x;\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$

16. $4y'' + 3xy' - 6y = -x;\ y(0) = 2, y'(0) = 0.$

17. $2xy'' + (x-1)y' + y = 1 + 5x;\ y(0) = 2, y'(0) = 1.$

18. $2xy'' + (x-1)y' + y = 6x^2;\ y(0) = 1, y'(0) = 1.$

19. $2xy'' + (x+2)y' + y = 2x + 1;\ y(0) = -1, y'(0) = 1.$

20. $2xy'' + (x+4)y' + y = x + 1;\ y(0) = 0, y'(0) = 1/4.$

21. $xy'' + (x+1)y' + y = 10x;\ y(0) = 2, y'(0) = -2.$

22. $xy'' - (x-1)y' - y = x + 1;\ y(0) = -1, y'(0) = 0.$

23. $xy'' + (2x^2+1)y' + 2xy = 2;\ y(0) = 0, y'(0) = 2.$

24. $2xy'' + (2x+1)y' + y = x;\ y(0) = 1, y'(0) = -1.$

25. $xy'' + (x+2)y' + 2y = -1; y(0) = 0, y'(0) = -1/2.$

26. $xy'' + (x^2+1)y' + 2xy = 10x;\ y(0) = 0, y'(0) = 0.$

27. $xy'' + (x^2+1)y' + 2xy = 1;\ y(0) = 0, y'(0) = 1.$

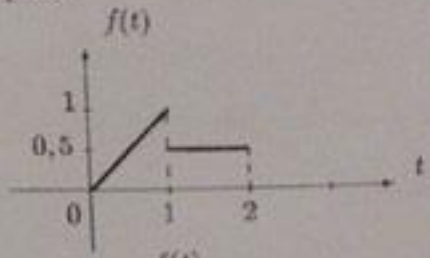
28. $2y'' + 2xy' + 4y = 3x;\ y(0) = 1, y'(0) = 1/2.$

29. $y'' - 2xy' - 4y = 8x^2;\ y(0) = -1/2, y'(0) = 1.$

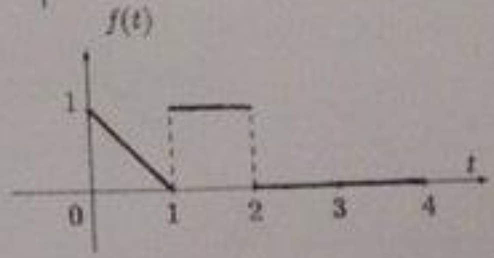
30. $xy'' + (1-x)y' - y = 1 + x;\ y(0) = -1, y'(0) = 0.$

VII. Для заданной графически функции $f(t)$ построить 4 ряда Фурье и их графики.

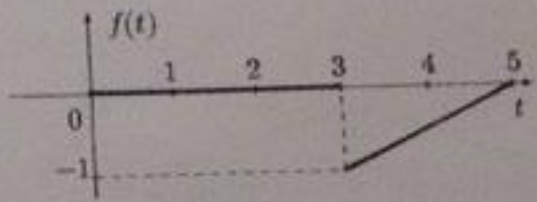
1.



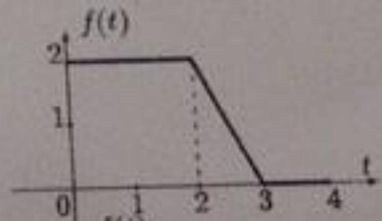
2.



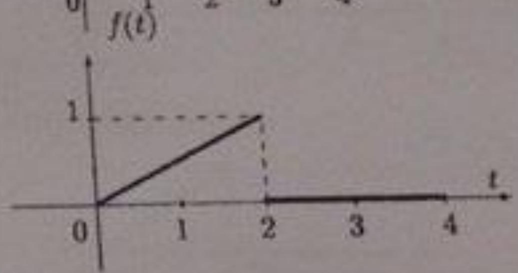
3.



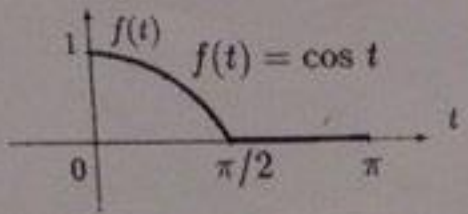
4.



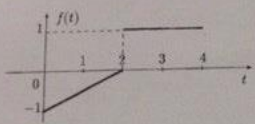
5.



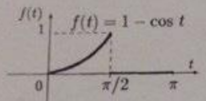
6.



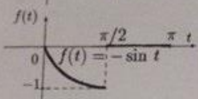
7.



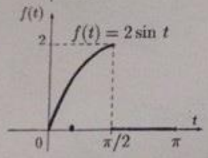
8.



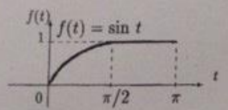
9.



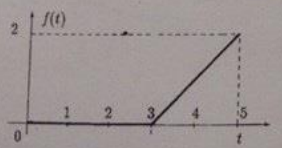
10.



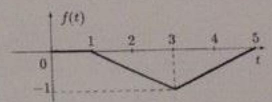
11.



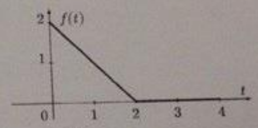
12.



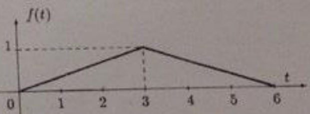
13.



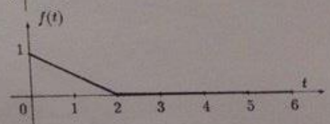
14.



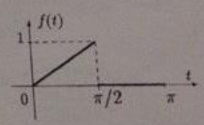
15.



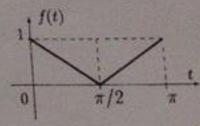
16.



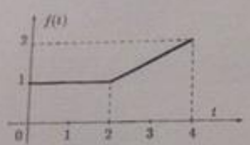
17.



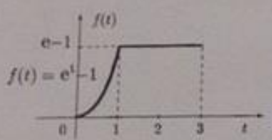
17.



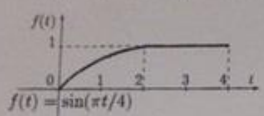
19.



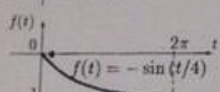
20.



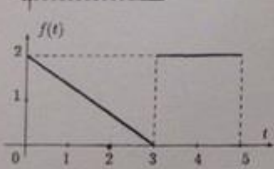
21.



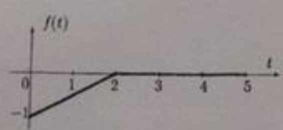
22.



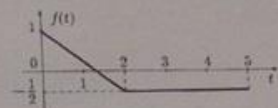
23.



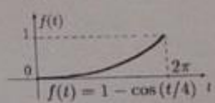
24.



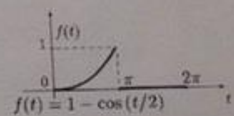
25.



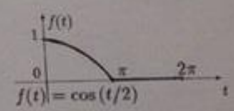
26.



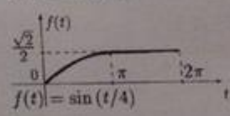
27.



28.



29.



30.