Лабораторная работа №3 Решение систем линейных уравнений

Цель работы: решить систему линейных уравнений (СЛУ) методами Крамера, Гаусса и методом простой итерации. Сравнить полученные результаты с результатами применения встроенных в MathCAD функций для решения СЛУ.

Порядок выполнения работы:

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 12x_1 + 4.2x_2 - 0.8x_3 = -5.4 \\ -4.1x_1 + 2.2x_2 - 0.16x_3 = 1.6 \\ -1.6x_1 - 4.3x_2 + 8.4x_3 = 12.2 \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера. Для этого зададим в MathCAD системную переменную ORIGIN и присвоим ей значение равное 1 (по умолчанию 0). Это нужно для того, чтобы индексы элементов матрицы начинались не с 0, а с более привычной 1. Запишем основную матрицу системы A, содержащую значения коэффициентов системы уравнений. Для этого на панели инструментов матрица выберем пункт «матрица», укажем в открывшемся окне количество строк (3) и столбцов (3) и внесем значения коэффициентов в появившийся шаблон. Аналогично составим вектор-столбец свободных членов системы B

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 12 & 4.2 & -0.8 \\ -4.1 & 2.2 & -0.16 \\ -1.6 & -4.3 & 8.4 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} -5.4 \\ 1.6 \\ 12.2 \end{pmatrix}$$

2. Проверим возможность применения метода Крамера для решения СЛУ. Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы $|A| \neq 0$. Для вычисления определителя воспользуемся пунктом «определитель» с панели инструментов матрица и вычислим его значение, которое присвоим переменной Δ. Так как значение определителя не равно 0, можем приступать к решению.

$$\Delta := |A| = 342.307$$

3. Заменим в матрице A первый столбец на вектор-столбец B и вычислим определитель получившейся матрицы Δ1. Аналогичным способом, последовательно заменяя в матрице A ее второй и третий столбцы на вектор-столбец B, вычисляем определители Δ2 и Δ3. После этого, разделив определитель основной матрицы на

полученные определители $x_i = \Delta / \Delta_i$, находим решение СЛУ.

$A1 := A \qquad A2 := A \qquad A3 := A$

$A1^{\langle 1 \rangle} := B \qquad A2^{\langle 2 \rangle} := B \qquad A3^{\langle 3 \rangle} := B$

$$A1 = \begin{pmatrix} -5.4 & 4.2 & -0.8 \\ 1.6 & 2.2 & -0.16 \\ 12.2 & -4.3 & 8.4 \end{pmatrix}$$

$$A2 = \begin{pmatrix} 12 & -5.4 & -0.8 \\ -4.1 & 1.6 & -0.16 \\ -1.6 & 12.2 & 8.4 \end{pmatrix}$$

$$A3 = \begin{pmatrix} 12 & 4.2 & -5.4 \\ -4.1 & 2.2 & 1.6 \\ -1.6 & -4.3 & 12.2 \end{pmatrix}$$

$\Delta1 := |A1| = -133.747$

$\Delta2 := |A2| = 35.314$

$\Delta3 := |A3| = 489.762$

$$x1 := \left(\frac{\Delta1}{\Delta}\right) = -0.391$$

$$x2 := \left(\frac{\Delta2}{\Delta}\right) = 0.103$$

$$x3 := \left(\frac{\Delta3}{\Delta}\right) = 1.431$$

4. Найдем решение СЛУ методом Гаусса. Для этого требуется привести исходну СЛУ к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно находятся все неизвестные. Для решения СЛУ в MathCAD указанным методом необходимо объединить матрицы A и B, составив расширенную матрицу P. Для этого можно воспользоваться командой augment

$P := \mathrm{augment}(A, B)$

$$P = \begin{pmatrix} 12 & 4.2 & -0.8 & -5.4 \\ -4.1 & 2.2 & -0.16 & 1.6 \\ -1.6 & -4.3 & 8.4 & 12.2 \end{pmatrix}$$

Определим ранг матриц A и P с помощью команды rank. Он равен 3 и для основной, и для расширенной матриц. Отсюда можно сделать вывод, что система совместна и имеет единственное решение, так как ранг матриц совпадает и равен количеству неизвестных.

$\mathrm{rank}(A) = 3$

$\mathrm{rank}(P) = 3$

Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду методом

Гаусса-Жордана с помощью команды rref.

$R := \mathrm{rref}(P)$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.391 \\ 0 & 1 & 0 & 0.103 \\ 0 & 0 & 1 & 1.431 \end{pmatrix}$$

Анализ матрицы R показывает, что исходное СЛУ удалось привести к виду

$$\begin{cases} x_1 = -0.391 \\ x_2 = 0.103 \\ x_3 = 1.431 \end{cases}$$

Выделить последний столбец из матрицы R можно с помощью следующих функций

$n := \mathrm{cols}(R)$

$x := R^{\langle n \rangle}$

$$x = \begin{pmatrix} -0.391 \\ 0.103 \\ 1.431 \end{pmatrix}$$

5. Первые два метода решения СЛУ относились к точным методам. Эти методы популярны, но могут приводить к значительным погрешностям при вычислениях плохо обусловленных СЛУ. Плохо обусловленной называется такая система, у которой модуль определителя основной матрицы мал по сравнению с какой либо из норм матрицы. Нормой матрицы называют максимальную из сумм модулей коэффициентов строк или столбцов. В этом случае можно применять методы последовательных приближений, к которым относится метод простой итерации. Для применения этого метода сначала рассмотрим вопрос обеспечения сходимости итераций. Если в основной матрице A выполняется условие $\left|A_{i,i}\right| > \sum_{j=1}^{n} \left|A_{i,j}\right|, j \neq i$, т.е. сумма модулей элементов строки матрицы, за вычетом элемента лежащего на главной диагонали, должна быть меньше значения модуля элемента, лежащего на главной диагонали матрицы. Для строк 1 и 3 матрицы A это условие выполняется: $|12| > |4.2| + |-0.8|$ и $|8.4| > |-1.6| + |-4.3|$, а для строки 2 нет: $|2.2| < |-4.1| + |-0.16|$. Требуется преобразовать исходную систему уравнений. Для этого умножим второе уравнение на 3 и сложим его с первым. В результате получим СЛУ, у которой для второй строки $|10.8| < |-0.3| + |-1.28|$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4.2x_2 - 0.8x_3 = -5.4 \\ -0.3x_1 + 10.8x_2 - 1.28x_3 = -0.6 \\ -1.6x_1 - 4.3x_2 + 8.4x_3 = 12.2 \end{cases}$$

6. Разрешим исходную систему уравнений относительно переменных, оставляя в левой части уравнения искомую переменную

$$\begin{cases} x_1 = (-5.4 - 4.2x_2 + 0.8x_3)/12 \\ x_2 = (-0.6 + 0.3x_1 + 1.28x_3)/10.8 \\ x_3 = (12.2 + 1.6x_1 + 4.3x_2)/8.4 \end{cases}$$

или в общем виде

$$\begin{cases} x_1 = f(x_2, x_3) \\ x_2 = f(x_1, x_3) \\ x_3 = f(x_1, x_2) \end{cases}.$$

Задавая начальные приближения для x^0_1, x^0_2, x^0_3, получим первые приближения x^1_1, x^1_2, x^1_3, подставляя первые приближения - получим вторые и т.д. до тех пока не будет выполнено условие $\left|x_1^{k+1} - x_1^k\right| \le \varepsilon$,

где ε - допустимая погрешность вычисления неизвестной, задаваемая пользователем

$$\begin{cases} x^{k+1}{}_1 = f(x^k{}_2, x^k{}_3) \\ x^{k+1}{}_2 = f(x^k{}_1, x^k{}_3) \\ x^{k+1}{}_3 = f(x^k{}_1, x^k{}_2) \end{cases}$$

Пример выполнения расчета в MathCAD приведен ниже. Матрицы A и B заданы уже для преобразованной системы уравнения. Матрицы a и b являются основной и дополнительной матрицами, полученными при выделении неизвестных, ранжированная переменная k задаёт количество итераций. Выражение $x^{\langle k \rangle} := b + a \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$ является записью СЛУ в матричном виде.

$i := 1 .. 3 \quad j := 1 .. 3$

$$A := \begin{pmatrix} 12 & 4.2 & -0.8 \\ -0.3 & 10.8 & -1.28 \\ -1.6 & -4.3 & 8.4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -5.4 \\ -0.6 \\ 12.2 \end{pmatrix}$$

$$a_{i,j} := -\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,i}}\right) \qquad b_i := \frac{B_i}{A_{i,i}} \qquad a_{i,i} := 0$$

$$k := 2..10$$

$$b = \begin{pmatrix} -0.45 \\ -0.056 \\ 1.452 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & -0.35 & 0.067 \\ 0.028 & 0 & 0.119 \\ 0.19 & 0.512 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x)^{\langle 1 \rangle} := 0$$

$$x^{\langle k \rangle} := b + a \cdot x^{\langle k-1 \rangle}$$

x =

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	-0.391	-0.39	-0.393	-0.391	-0.391	-0.391	-0.391
2	0.103	0.114	0.112	0.104	0.104	0.103	0.103	0.103
3	1.431	1.505	1.436	1.436	1.431	1.431	1.431	...
4								

7. Оценим погрешность вычислений по приведенной выше формуле. Из расчетов видно, что на 9 шаге итерации она не превышает 6×10^{-6}, чего достаточно для ряда практических задач.

$$\Delta x1_k := x_{1,k} - x_{1,k-1} \qquad \Delta x2_k := x_{2,k} - x_{2,k-1} \qquad \Delta x3_k := x_{3,k} - x_{3,k-1}$$

$\Delta x1_k =$	$\Delta x2_k =$	$\Delta x3_k =$
-0.391	0.011	0.074
$1.163 \cdot 10^{-3}$	$-2.033 \cdot 10^{-3}$	-0.069
$-3.88 \cdot 10^{-3}$	$-8.13 \cdot 10^{-3}$	$-8.191 \cdot 10^{-4}$
$2.791 \cdot 10^{-3}$	$-2.049 \cdot 10^{-4}$	$-4.901 \cdot 10^{-3}$
$-2.55 \cdot 10^{-4}$	$-5.033 \cdot 10^{-4}$	$4.267 \cdot 10^{-4}$
$2.046 \cdot 10^{-4}$	$4.349 \cdot 10^{-5}$	$-3.062 \cdot 10^{-4}$
$-3.564 \cdot 10^{-5}$	$-3.061 \cdot 10^{-5}$	$6.123 \cdot 10^{-5}$
$1.48 \cdot 10^{-5}$	$6.268 \cdot 10^{-6}$	$-2.246 \cdot 10^{-5}$
$-3.691 \cdot 10^{-6}$	$-2.251 \cdot 10^{-6}$	$6.027 \cdot 10^{-6}$

8. Сравним полученные результаты с результатами применения вычислительного блока Given-Find, используемого для решения уравнений и систем уравнений в MathCAD. Перед применением вычислительного блока требуется задать начальные приближения для неизвестных (обычно их задают равными 0, за исключением случав, когда при подстановке в выражения СЛУ получается деление на нуль). Внутри вычислительного блока необходимо записать сами уравнения, приравняв их к 0 (Внимание! Для этого необходимо использовать логический оператор «равно» с панели инструментов «Булева алгебра».) Пример применения вычислительного блока для решения СЛУ приведен ниже.

$x1 := 0$

$x2 := 0$

$x3 := 0$

Given

$$12 \cdot x1 + 4.2 \cdot x2 - 0.8 \cdot x3 + 5.4 = 0$$

$$-4.1 \cdot x1 + 2.2 \cdot x2 - 0.16 \cdot x3 - 1.6 = 0$$

$$-1.6 \cdot x1 - 4.3 \cdot x2 + 8.4 \cdot x3 - 12.2 = 0$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} -0.391 \\ 0.103 \\ 1.431 \end{pmatrix}$$

Задания для самостоятельного выполнения

Решить систему СЛУ методом Крамера, методом Гаусса и методом простых итераций. Проверить правильность полученных выражений решив СЛУ с помощью встроенной функции. При применении итерационного метода необходимо выбрать количество итераций, обеспечивающее погрешность итераций не более 10^{-5}.

1	$\begin{cases} 1{,}5x_1 - 0{,}8x_2 + 4{,}25x_3 = 5{,}1; \\ 1{,}2x_1 + 7{,}18x_2 - 3{,}2x_3 = 4{,}2; \\ 0{,}5x_1 - 1{,}5x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 6{,}7x_1 - 0{,}6x_2 + 0{,}83x_3 = 6{,}8; \\ 0{,}8x_1 + 1{,}1x_2 + 7{,}2x_3 = 5{,}2; \\ 1{,}2x_1 + 5{,}4x_2 - 0{,}54x_3 = -3{,}2 \end{cases}$
3	$\begin{cases} -1{,}32x_1 + 2{,}15x_2 + 7{,}6x_3 = -1{,}4; \\ 2{,}62x_1 + 6{,}1x_2 - 4{,}12x_3 = 5{,}6; \\ 8{,}3x_1 - 2{,}84x_2 - 1{,}5x_3 = -6{,}5 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 0{,}51x_1 - 10{,}2x_2 - 3{,}62x_3 = -2{,}05; \\ 3{,}09x_1 + 1{,}23x_2 - 4{,}64x_3 = -5{,}6; \\ 3{,}2x_1 - 2{,}31x_2 - 8{,}4x_3 = 6{,}1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 7{,}12x_1 - 6{,}66x_2 + 2{,}6x_3 = -3{,}1; \\ -1{,}76x_1 + 6{,}5x_2 - 0{,}87x_3 = 2{,}85; \\ 0{,}65x_1 + 0{,}87x_2 - 8{,}7x_3 = 5{,}56 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 6{,}4x_1 - 0{,}73x_2 + 2{,}1x_3 = 3{,}8; \\ -1{,}07x_1 + 3{,}8x_2 - 1{,}5x_3 = -1{,}2; \\ 2{,}7x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 = -7{,}5 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 9{,}21x_1 - 1{,}84x_2 + 0{,}7x_3 = -3{,}2; \\ -6{,}17x_1 + 8{,}5x_2 - 2{,}87x_3 = -3{,}75; \\ 0{,}7x_1 + 0{,}87x_2 - 8{,}7x_3 = 2{,}64 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 4{,}3x_1 - 1{,}2x_2 + 10{,}3x_3 = 4{,}2; \\ 0{,}21x_1 + 6{,}2x_2 + 3{,}54x_3 = 5{,}1; \\ -0{,}31x_1 - 0{,}52x_2 + 3{,}6x_3 = -2{,}1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 6{,}9x_1 + 2{,}3x_2 + 1{,}21x_3 = 3{,}1; \\ x_1 + 2{,}3x_2 - 3{,}4x_3 = -2{,}3; \\ 0{,}21x_1 - 0{,}43x_2 + 6{,}3x_3 = 3{,}6 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 12{,}4x_1 - 0{,}56x_2 + 4{,}2x_3 = 6{,}3; \\ -0{,}65x_1 + 4{,}4x_2 + 1{,}5x_3 = 1{,}5; \\ 1{,}5x_1 + 2{,}1x_2 - 2{,}8x_3 = 1{,}7 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 1{,}2x_1 - 1{,}06x_2 - 6{,}7x_3 = 2{,}12; \\ 4{,}2x_1 - 6{,}3x_2 - 0{,}9x_3 = -1{,}1; \\ 0{,}6x_1 + 6{,}8x_2 + 0{,}82x_3 = 0{,}83 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 9{,}7x_1 + 0{,}35x_2 - 1{,}84x_3 = 2{,}15; \\ 4{,}64x_1 - 7{,}1x_2 - 4{,}37x_3 = 1{,}5; \\ 0{,}32x_1 + 0{,}48x_2 - 3{,}3x_3 = -3{,}1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 6{,}5x_1 - 2{,}34x_2 + 1{,}4x_3 = 2{,}8; \\ 0{,}5x_1 + 7{,}3x_2 - 2{,}4x_3 = -3{,}8; \\ 8{,}6x_1 + 0{,}34x_2 - 6{,}4x_3 = 0{,}64 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2{,}8x_1 + 4{,}3x_2 - 3{,}7x_3 = 5{,}1; \\ -0{,}45x_1 - 8{,}24x_2 + 4{,}8x_3 = 5{,}4; \\ 0{,}54x_1 + 2{,}3x_2 + 3{,}7x_3 = 1{,}54 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 6x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}67x_3 = 1{,}9; \\ 3{,}8x_1 + 1{,}25x_2 - 4{,}3x_3 = 6{,}4; \\ 0{,}38x_1 - 0{,}64x_2 + 3{,}2x_3 = 5{,}4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 1{,}5x_1 - 2{,}6x_2 + 7x_3 = -11{,}2; \\ 6{,}6x_1 + 1{,}3x_2 - 1{,}24x_3 = 5{,}3; \\ 0{,}85x_1 - 8{,}4x_2 + 4{,}7x_3 = 1{,}6 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 6{,}2x_1 - 0{,}52x_2 + 2{,}3x_3 = -1{,}8; \\ -4{,}2x_1 + 3{,}4x_2 - 0{,}5x_3 = 0{,}7; \\ 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 + 3{,}6x_3 = 3{,}2 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 0{,}63x_1 - 0{,}54x_2 + 1{,}7x_3 = 3{,}6; \\ 0{,}65x_1 + 4{,}4x_2 + 0{,}15x_3 = 2{,}3; \\ 1{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 4{,}1x_3 = 2{,}8 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 8{,}4x_1 - 0{,}25x_2 + 3{,}1x_3 = -5{,}7; \\ -0{,}3x_1 + 6{,}1x_2 - 1{,}54x_3 = 3{,}3; \\ -6{,}8x_1 + 1{,}2x_2 - 7x_3 = 4{,}5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 12x_1 + 4{,}2x_2 - 0{,}8x_3 = -5{,}4; \\ -4{,}1x_1 + 2{,}2x_2 - 0{,}16x_3 = 1{,}6; \\ -1{,}6x_1 - 4{,}3x_2 + 8{,}4x_3 = 12{,}2 \end{cases}$