

Задача 12.2

1. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$, если $\delta(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
3. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - x^2}$, $y = 0$, $x \geq 0$, если $\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ — поверхностная плотность пластины в точке.

4. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y + 1$, $y^2 = x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.
5. Найдите массу пластины, имеющей форму кольца и ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 25$, если $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 9$ — поверхностная плотность пластины в точке.
6. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ и $y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x$.
7. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$, $x = 0$, $y \geq 0$, если $\delta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
8. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x = 2y^2$, $x + 2y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$.
9. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$, $y \geq 0$, если $\delta(x, y) = x^2 + y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
10. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y + z = 3a$, $z = 0$.
11. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x = 0$.

$$x + y + z = 3a, z = 0.$$

11. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, x^2 + y^2 = a^2, x = 0, x \geq 0$, если $\delta(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 12. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2, x + y = 0, y = 0, z = 0$.
 13. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = x, y = 0, x^2 + y^2 = a^2$, если $\delta(x, y) = 1 + \frac{y^2}{x^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 14. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2, 2x + y = 4, x = 0, y = 0, z = 0$.
 15. Найдите массу пластины, имеющей форму кольца и ограниченной линиями $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}, x^2 + y^2 = \pi^2$, если $\delta(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 16. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4x^2 + 2y^2 + 1, x + y - 3 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$.
 17. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = x, x = 0, x^2 + y^2 = a^2$, если $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 18. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y + z = 2, y = x^2, z = 0$.
-
19. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $y = 0, x^2 + y^2 = ax, y > 0$, если $\delta(x, y) = y$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 20. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2, x + y = 2, z = 0, y = 0, x > 0$.
 21. Найдите массу пластины, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0$, если $\delta(x, y) = x^2 + y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 22. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z, y = x^2, z = 0, y = 1$.
 23. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2 + (y - 1)^2 = 1, x^2 + y^2 = 4y, x = 0, x \geq 0$, если $\delta(x, y) = xy^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 24. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y, y^2 = x, y^2 = 2 - x, z = 0$.
 25. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), y = 0, x > 0, y > 0$, если $\delta(x, y) = x^2 - y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 26. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = Rx, y = 0, y > 0$, если $\delta(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 27. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2, x + 2y = 6, x = 0, y = 0, z = 0$.
 28. Найдите массу пластины, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x > 0, y > 0$, если $\delta(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ — поверхностная плотность пластины в точке.
 29. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $y + z = 8, y = 2x^2, z = 0$.
 30. Найдите массу пластины, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 4y$, если $\delta(x, y) = x^2 + y^2$ — поверхностная плотность пластины в точке.

II. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж данного тела и его проекцию на плоскость xOy .

- 1 А. $z = 0, z = x, y = 0, y = 4, x = \sqrt{25 - y^2}$.
- 2 Б. $z = 0, z = 9 - y^2, x^2 + y^2 = 9$.
- 3 В. $z = 0, z = 4 - x - y, x^2 + y^2 = 4$.
- 4 Г. $z = 0, z = y^2, x^2 + y^2 = 9$.
- 5 Д. $z = 0, y + z = 2, x^2 + y^2 = 4$.
- 6 Е. $z = 0, 4x = y^2, 2x - y = 0, x + y = 9$.
- 7 Ж. $z = 0, z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4$.
- 8 З. $z = 0, z = 1 - y^2, x = y^2, x = 2y^2 + 1$.
- 9 И. $z = 0, z = 1 - x^2, y = 0, y = 3 - x$.
- 10 К. $z = 0, z = 4\sqrt{y}, x = 0, x + y = 4$.
- 11 Л. $z = 0, z = 2 - x - y, x^2 + y^2 = 1$.
- 12 М. $z = 0, z = y^2, x = 0, x + y = 2$.
- 13 Н. $z = 0, z = y^2/4, 2x - y = 0, x + y = 9$.
- 14 О. $z = 0, z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1$.
- 15 П. $z = 0, y + 2x - 4 = 0, x^2 + y^2 = 4$.
- 16 Р. $z \geq 0, zx^2 + y^2, x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0$.
- 17 С. $z \geq 0, z = x^2, x - 2y + 2 = 0, x + y - 7 = 0$.
- 18 Т. $z \geq 0, z = 2x^2 + 3y^2, y = x^2, y = x$.
- 19 У. $z \geq 0, z = 2x^2 + y^2, y \geq x, y = 3x, x = 2$.

- 20 Ф. $z \geq 0, y + x + z = 2, y = \sqrt{x}, y = x.$
 21 Х. $z \geq 0, x + y + z = 3, y = 1 - x^2, y \geq 0.$
 22 Ц. $z \geq 0, z = 2x^2 + y^2, x + y = 4, x \geq 0, y \geq 0.$
 23 Ч. $z \geq 0, 2x = y^2, 2x - 3y - 12 = 0, x \geq 0, y \geq 0.$
 24 Ш. $z \geq 0, z = 10 + x^2 + 2y^2, y = x, x = 1, y \geq 0.$
 25 Щ. $z \geq 0, z = x^2, x + y = 6, y = 2x, x \geq 0, y \geq 0.$
 26 Э. $z = 0, y + 2z + 2 = 0, x^2 + y^2 = 1.$
 27 Ю. $z = 0, x + y + z = 10, 3y = \sqrt{x}, y \leq x, y = 1.$
 28 Я. $z = 0, z = 3x + 2y + 6, y = x^2, x = y^2.$

III. Вычислить криволинейный интеграл

1. А. $\int_L (x^2 - y) dx - (x - y^2) dy$, где L — дуга окружности $x = 5 \cos t, y = 5 \sin t$ между точками $A(5; 0)$ и $B(0; 5)$ при положительном направлении обхода (против часовой стрелки).
 2. Б. $\int_L (x + y) dx - (x - y) dy$, где L — контур треугольника с вершинами $O(0; 0), A(2; 0), B(4; 5)$.
 3. В. $\int_L \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$, где L — контур треугольника с вершинами $A(1; 0), B(1; 1), C(0; 1)$ при положительном направлении обхода (против часовой стрелки).
 4. Г. $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, где L — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(-1; 1)$ до точки $B(1; 1)$.
 5. Д. $\int_L (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy$, где L — верхняя половина эллипса $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$.
 6. Е. $\int_L (x^2 + y) dx - (y^2 + x) dy$, где L — контур треугольника ABC с

вершинами $A(1; 2)$, $B(1; 5)$, $C(3; 5)$.

- 7 Ж. $\int_L y dx + x/y dy$, где L — дуга кривой $y = e^{-x}$ от точки $A(0; 1)$ до точки $B(-1; e)$.
- 8 З. $\int_L (y^2 + 1)/y dx - x/y^2 dy$, где L — отрезок прямой от точки $A(1; 2)$ до точки $B(2; 4)$.
- 9 И. $\int_L (xy - x^2) dx + x dy$, где L — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 2)$.
- 10 К. $\int_L y/x dx + x dy$, где L — дуга кривой $y = \ln x$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(e; 1)$.
- 11 Л. $\int_L (xy - y^2) dx + x dy$, где L — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $B(1; 2)$.
- 12 М. $\int_L (xy - x) dx + x^2/2 dy$, где L — дуга параболы $y = 2\sqrt{x}$ от точки $O(0; 0)$ до точки $B(1; 2)$.
- 13 Н. $\int_L (x + 2y) dx + (x - y) dy$, где L — окружность $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода (против хода часовой стрелки).
- 14 О. $\int_L x dx - y dy$, где L — дуга астроиды $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$ от точки $A(2; 0)$ до точки $B(0; 2)$.
- 15 П. $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$, где L — отрезок прямой, соединяющий точки $A(1; 2)$ и $B(3; 6)$.

- 16 P. $\int_L (x^2 - y) dx - (x - y^2) dy$, где L - ломаная линия, состоящая из отрезков прямых $x = 3$ и $y = 2$, от точки $A(1; 2)$ до точки $B(3; 5)$.
- 17 С. $\int_L (x^2 + y) dx + (y^2 + x) dy$, где L - ломаная линия, состоящая из отрезков прямых $x = 5$ и $y = 1$, от точки $A(2; 1)$ до точки $B(5; 3)$.
- 18 Т. $\int_L x dx - y dy$, где L - контур треугольника с вершинами $A(-1; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$ при положительном направлении обхода.
- 19 У. $\int_L (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, где L - дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.
- 20 Ф. $\int_L (x^2 y - x) dx + (y^2 x - 2y) dy$, где L - дуга эллипса $x = 3 \cos t$, $y = 2 \sin t$ при положительном направлении обхода.
- 21 Х. $\int_L (xy - 1) dx + x^2 y dy$, где L - дуга эллипса $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(0; 2)$.
- 22 Ц. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, где L - ломаная линия $OBA: O(0; 0), B(2; 1), A(2; 1)$.
- 23 Ч. $\int_L (x^2 - y^2) dx + xy dy$, где L - отрезок прямой $AB: A(1; 1), B(3; 4)$.
- 24 Ш. $\int_L \cos y dx - \sin x dy$, где L - отрезок прямой $AB: A(2\pi, -2\pi), B(-2\pi, 2\pi)$.
- 25 Щ. $\int_L xy dx + (y - x) dy$, где L - дуга параболы $y^2 = x$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 1)$.