Расчетно-графическое задание

Тема: Предметных задачи, описывающие реальный процесс, решение которых сводится к решению задачи Коши или краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в MathCad

Цель: Выработать практические навыки решения прикладных задач в MathCad

Рассмотрим в качестве примера расчет переходного процесса в последовательном электрическом колебательном контуре.

Свободные колебания тока в контуре описываются уравнением

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=0,$$

где I – ток, L – индуктивность контурной катушки, R – сопротивление потерь контура, C – емкость конденсатора. Примем $R = 5$ Ом, $L = 10^{-5}$ Гн и $C = 10^{-9}$ Ф.

Используя обозначения $z_0 = I$ и $z_1 = dz_0/dt = dI/dt$, преобразуем исходное уравнение в систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{dz_0}{dt}=z_1\\ \dfrac{dz_1}{dt}=-\dfrac{1}{L}\left(Rz_1+\dfrac{1}{C}z_0\right).\end{cases}\qquad(17)$$

Приняв в качестве начальных условий $I = 1$ мА и $dI/dt = 0$, запишем решение в пакете MathCAD следующим образом:

$R := 5 \qquad L := 10^{-5} \qquad C := 10^{-9} \qquad t0 := 0 \qquad tk := 5\cdot 10^{-6} \qquad N1 := 500$

$$f(t,z) := \begin{pmatrix} z_1 \\ \dfrac{-R}{L}\cdot z_1-\dfrac{1}{L\cdot C}\cdot z_0\end{pmatrix} \qquad F1 := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix}10^{-3}\\0\end{pmatrix}, t0, tk, N1, f\right]$$

В этом примере использована функция rkfixed. Она вычисляет решение системы, содержащей обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка методом Рунге-Кутта с фиксированным шагом интегрирования.

Обращение к функции выполняется следующим образом:

$$F := \mathrm{rkfixed}(Z0,\ t0,\ tk,\ N,\ f)\ ,$$

где F – выходные данные, возвращаемые функцией, Z0 – вектор начальных значений, размерность которого должна соответствовать порядку решаемой системы, t0 – начальное значение аргумента, tk – верхний предел изменения аргумента, N – количество рассчитываемых точек на интервале от t0 до tk, f – имя функции, описывающей правую часть системы дифференциальных уравнений.

Из приведенного примера видно, как записывается функция f(t,z) в документе MathCAD. Имя зависимой переменно z должно совпадать с именами ее компонент, присутствующих в правой части формулы f(t,z). Сами дифференциальные уравнения в предварительно приводятся к каноническому виду (17) так, чтобы в левой части каждого из них находилась только производная по одной из компонент z. Первым в системе должно записываться уравнение, определенное для производной от нулевой компоненты z, то есть от z_0, затем – от z_1 и так далее. Следует отметить, что отсчет индексов в MathCAD определяется параметром ORIGIN и обычно по умолчанию начинается с нуля.

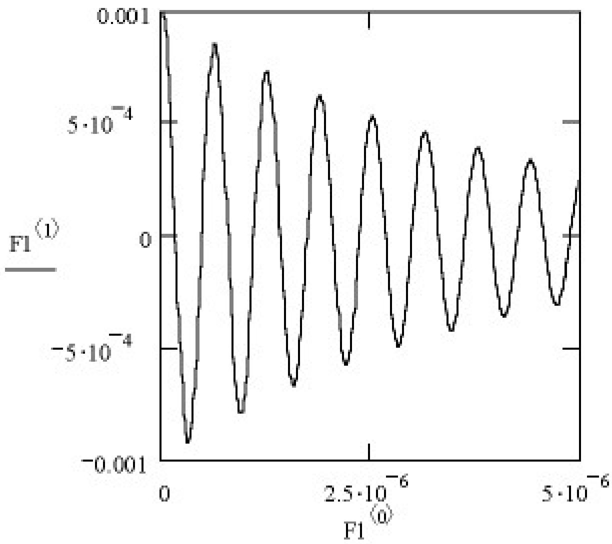
Функция rkfixed возвращает найденное решение в виде двухмерного массива (см. рис. 4, *а*). В приведенном примере результат передается переменной F1. Значения независимой переменной t размещаются в нулевом столбце $F^{<0>}$ массива. Они изменяются в пределах от t0 до tk с шагом (tk – t0) / N. В приведенном примере t0 = 0, tk = $5 \cdot 10^{-6}$ с, N = N1 = 500, поэтому шаг изменения аргумента равен (tk –t0) / N1 = $5 \cdot 10^{-6}$ / 500 = 10^{-8} с.

Найденное численно решение $z_0(t)$ и первая производная $z_1(t)$ записываются соответственно в первом и во втором столбцах – $F1^{<1>}$ и $F1^{<2>}$. Результат решения методом Рунге-Кутта показан графически на рис. 4, *б*.

F1 =

	0	1	2
0	0	$1 \cdot 10^{-3}$	0
1	$1 \cdot 10^{-8}$	$9.95 \cdot 10^{-4}$	-995.842
2	$2 \cdot 10^{-8}$	$9.801 \cdot 10^{-4}$	$-1.977 \cdot 10^{3}$
3	$3 \cdot 10^{-8}$	$9.556 \cdot 10^{-4}$	$-2.933 \cdot 10^{3}$
4	$4 \cdot 10^{-8}$	$9.216 \cdot 10^{-4}$	$-3.855 \cdot 10^{3}$
5	$5 \cdot 10^{-8}$	$8.786 \cdot 10^{-4}$	$-4.735 \cdot 10^{3}$
6	$6 \cdot 10^{-8}$	$8.271 \cdot 10^{-4}$	$-5.563 \cdot 10^{3}$
7	$7 \cdot 10^{-8}$	$7.675 \cdot 10^{-4}$	$-6.331 \cdot 10^{3}$
8	$8 \cdot 10^{-8}$	$7.007 \cdot 10^{-4}$	$-7.032 \cdot 10^{3}$
9	$9 \cdot 10^{-8}$	$6.271 \cdot 10^{-4}$	$-7.66 \cdot 10^{3}$
10	$1 \cdot 10^{-7}$	$5.477 \cdot 10^{-4}$	$-8.208 \cdot 10^{3}$

а



б

Рис. 4. Решение задачи Коши в MathCAD

Выполним аналогичный расчет с уменьшенным вдвое шагом при N = N2 = 1000 и оценим погрешность решения по правилу Рунге (11):

$N2 := 1000 \quad p := 4 \quad i := 0..N1$

$$F2 := \mathrm{rkfixed}\left[\begin{pmatrix}10^{-3}\\0\end{pmatrix}, t0, tk, N2, f\right] \quad \Delta_i := \frac{\left|\left(F2^{\langle 1\rangle}\right)_{2\cdot i} - \left(F1^{\langle 1\rangle}\right)_i\right|}{2^p - 1} \quad \max(\Delta) = 7.7\times 10^{-10}$$

Таким образом, погрешность решения Δ при шаге $h/2$ не превышает 10^{-9}.

Рассмотрим решение этой же задачи методом Эйлера с использованием рекурсивной процедуры. Изменив для удобства записи обозначения переменных $z_0 \rightarrow Y0$ и $z_1 \rightarrow Y1$, преобразуем систему уравнений (17):

$$\begin{cases}\dfrac{dY0}{dt} = Y1\\[2mm] \dfrac{dY1}{dt} = -\dfrac{R}{L}Y1 - \dfrac{1}{LC}Y0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{Y0_{i+1} - Y0_i}{\Delta t} \approx Y1_i\\[2mm] \dfrac{Y1_{i+1} - Y1_i}{\Delta t} \approx -\dfrac{R}{L}Y1_i - \dfrac{1}{LC}Y0_i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Y0_{i+1} \approx Y0_i + \Delta t\, Y1_i\\[2mm] Y1_{i+1} \approx Y1_i - \Delta t\left(\dfrac{R}{L}Y1_i + \dfrac{1}{LC}Y0_i\right).\end{cases}$$

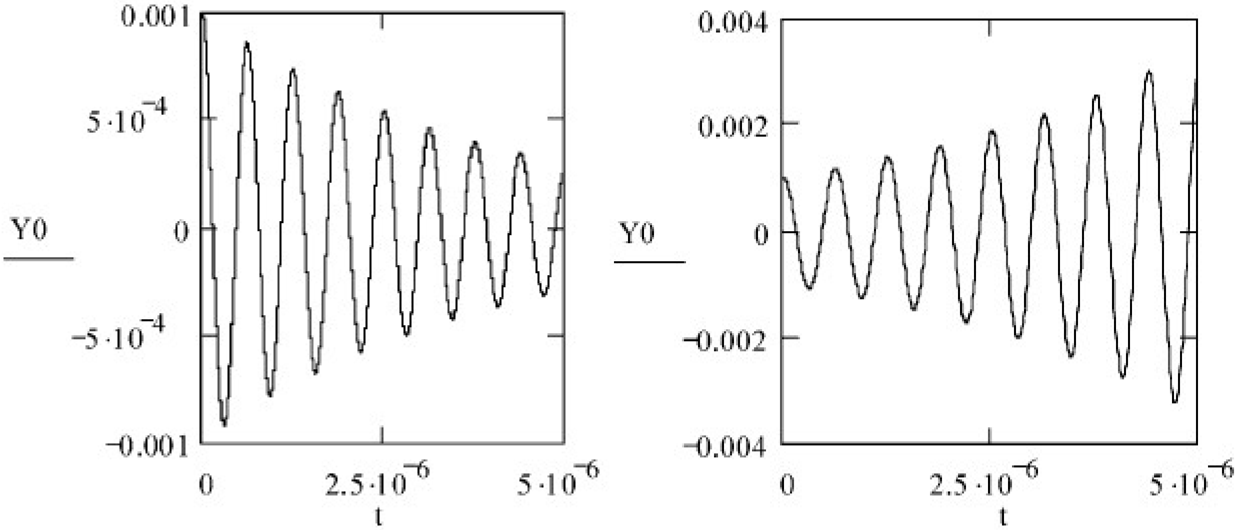
Здесь использована замена производных на их приближенные аналоги $dY/dt \approx \Delta Y/\Delta t$. Благодаря этому решение задачи можно представить в MathCAD следующим образом:

$$R := 5 \qquad L := 10^{-5} \qquad C := 10^{-9} \qquad \Delta t := 1\cdot 10^{-10} \qquad i := 0..\,50000-1$$

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ Y0_0 \\ Y1_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t_{i+1} \\ Y0_{i+1} \\ Y1_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_i + \Delta t \\ Y0_i + \Delta t\cdot Y1_i \\ Y1_i - \Delta t\cdot\left(\frac{R}{L}\cdot Y1_i + \frac{1}{L\cdot C}\cdot Y0_i\right) \end{bmatrix}.$$

В данной записи, соответствующей методу Эйлера (5), параметр Δt – шаг интегрирования, i – счетчик точек решения. Начальные значения переменных *t*, *Y*0 и *Y*1 заданы одновременным присваиванием. Использованная в примере рекурсивная ("возвратная") процедура вычисляет последующие точки решения с индексом i+1 из предыдущих с индексом i.

Рассчитанные методом Эйлера зависимости Y0(t) приведены на рис. 5.



а *б*

Рис. 5. Расчет методом Эйлера

Зависимость, представленная на рис. 5, *а* получена при $\Delta t = h = 10^{-10}$ с, а на рис. 5, *б* – при $\Delta t = h = 7 \cdot 10^{-9}$ с. В последнем случае неприемлемый с физической точки зрения результат объясняется выбором слишком большого шага интегрирования (см. п. 1.2.4). Метод Эйлера дает корректный результат при $h = 10^{-10}$ с, то есть расчете порядка 50000 точек. Однако оценка погрешности такого решения по правилу Рунге дает $\Delta \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Кроме rkfixed в MathCAD имеется еще ряд функций, обеспечивающих решение задачи Коши. К ним относятся odesolve, rkadapt, Bulstoer, Stiffb и Stiffr. Функциии rkadapt и Bulstoer предназначены для решения задач с гладкими функциями и медленно меняющимися решениями, Stiffb и Stiffr – для задач с жесткими системами. Функция sbval позволяет привести краевую задачу к задаче Коши и решить ее методом стрельбы.

Указания к выполнению работы

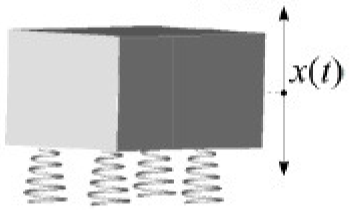
1. Формализуйте задачу для решения в MathCad. При необходимости произведите ее нормировку и другие преобразования, облегчающие решение в MathCad.

2. Обратите особое внимание на отличие формулировок задачи Коши и краевой задачи.

3. Решите задачу с помощью пакета MathCad.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задание 1. Для защиты от вибрации приборный блок установлен специальные на упругие опоры (амортизаторы). Его движение на амортизаторах



при отсутствии боковых и крутильных колебаний описывается дифференциальным уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=0\ ,$$

где x – отклонение блока от исходного положения, t – время, m – масса блока, d^2x/dt^2 – ускорение, β – коэффициент трения (в амортизаторах), dx/dt – скорость движения при колебаниях блока, kx – слагаемое, отвечающее за сопротивление упругих элементов (пружин), k – коэффициент жесткости амортизаторов. Суммарная жесткость пружин зависит от деформации x: $k = k_0\,(1 + ax^2)$.

Решите уравнение при следующих данных: β = 0,5 кг/с; начальные условия $x = 1$ см, $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры заданы в таблице.

Параметр	Вариант					
	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
m, кг	12	5	7	9,5	15	4
k_0, Н/м	0,5	1	1,5	1	2	2
a, 1/м^2	1	–0,5	2	2	+3	–0,5

Получите точки решения, охватывающие не менее пяти периодов колебаний, и постройте по ним соответствующий участок зависимости $x(t)$.

Задание 2. Приборный блок установлен на упругие опоры (амортизаторы). Его вертикальные колебания описывается дифференциальным уравнением, приведенным в задании 1.

Амортизаторы имеют встроенные демпфирующие элементы. Поэтому коэффициент трения β в системе зависит от деформации x: $\beta = \beta_0\,(1 + ax^2)$.

Решите уравнение для следующих исходных данных: коэффициент трения $k = 1$ Н/м; начальные условия $x = 1{,}5$ см и $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры заданы в таблице.

Параметр	Вариант					
	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
m, кг	5	10	8,5	7	3	12
β_0, кг/с	1,5	1	0,5	0,5	0,3	1
a, 1/м^2	0,5	1	1,5	0,2	0,3	0,3

Получите начальные точки решения, охватывающие несколько периодов колебаний, и постройте по ним соответствующий участок зависимости $x(t)$.

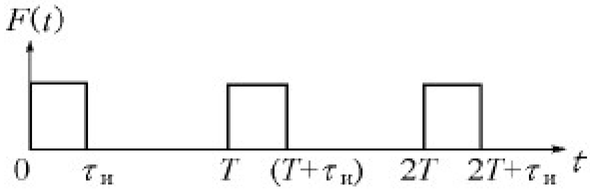
Задание 3. Вертикальные колебания механической системы (см. задание 1) под действием вынуждающей силы описывается уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=F(t)\ ,$$

где x – отклонение системы от исходного положения, t – время, m – масса блока, β – коэффициент трения, k – коэффициент жесткости амортизаторов.

Внешнее воздействие представляет собой периодическую последовательность ударных импульсов $F(t)$

$$F(t)=\begin{cases}F_\text{m} \ \text{при} \quad nT\le t<nT+\tau_\text{и},\\ 0 \quad \text{при} \quad nT+\tau_\text{и}\le t<(n+1)T,\end{cases}$$



где $n = 0, 1, 2, 3, 4\ldots$.

Решите уравнение для следующих данных: масса m = 1 кг; коэффициент трения β = 0,5 кг/с, коэффициент жесткости k = 5 Н/м. Начальные условия $x = 0$ и $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры даны в таблице.

Параметр	Вариант					
	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
$\tau_\text{и}$, с	0,5	1	0,1	0,3	0,2	1,2
T, с	1,5	2	1	1,5	2,5	1,7
F_m, Н	3000	2500	2000	3000	2500	2000

Получите начальные точки решения, охватывающие не менее трех периодов колебаний. Постройте зависимости $F(t)$ и $x(t)$.

Задание 4. Вертикальные колебания механической системы (см. задание 1) под действием последовательности полусинусоидальных импульсов описывается дифференциальным уравнением вида

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\beta\frac{dx}{dt}+kx=\left|F_\text{m}\cos(\omega t)\right|\ ,$$

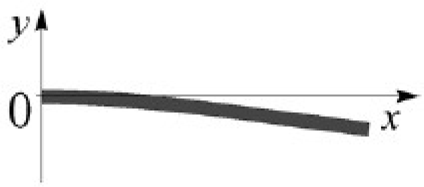
где x – отклонение системы от исходного положения, t – время, m – масса блока, β – коэффициент трения, k – коэффициент жесткости амортизаторов, F_m и ω – параметры вынуждающей силы.

Решите уравнение для следующих данных: масса m = 3 кг; коэффициент трения β = 1 кг/с, коэффициент жесткости k = 4 Н/м. Начальные условия $x = 0$ и $dx/dt = 0$ при $t = 0$. Остальные параметры даны в таблице.

Параметр	Вариант					
	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
m, кг	2	3	1,5	14	2,5	3
F_m, Н	150	1960	980	720	250	170
ω, рад/с	0,1	2	2	0,2	12,5	0,3

Получите участок решения $x(t)$, на котором устанавливаются устойчивые колебания в системе. Постройте зависимости $F(t) = |F_\text{m}\cos(\omega t)|$ и $x(t)$.

Задание 5. Прогиб однородной балки под собственным весом при консольном закреплении описывается дифференциальным уравнением



$$y'' = -\frac{PL^2}{EJ}\left(\frac{1}{L} - \frac{x}{L^2}\right)\left[1 + (y')^2\right]^{3/2},$$

где L – длина балки, P – удельный вес балки (на единицу длины), EJ – жесткость балки, x – координата ($0 < x < 1$).

Задавшись начальными условиями $y = 0$ и $y' = 0$ при $x = 0$, получите точки решения $y(x)$ на всей длине балки для указанных параметров.

Параметр	Вариант					
	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
L, м	1,5	1	0,9	2	2,5	1
PL^2/EJ	0,001	0,005	0,002	0,01	0,015	0,002

Задание 6. Количество особей в популяциях двух видов, взаимодействующих между собой по типу жертва – хищник, равно соответственно x и y. Изменение популяций во времени описывается системой дифференциальных уравнений (модель Лотки-Вольтерра)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy, \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy, \end{cases}$$

где t – время, ax – скорость размножения жертв, bxy – скорость их истребления с учетом частоты встреч с хищниками, cy – скорость вымирания хищников, dxy – скорость размножения хищников в присутствии жертв.

Задавшись параметрами a, b, c, d и приняв начальные условия x_0, y_0 при $t = 0$, решите задачу. Получите участок решения, на котором наблюдаются повторяющиеся колебания численности популяций. Постройте соответствующие графики $x(t)$, $y(t)$ и $y(x)$.

Параметр	Вариант					
	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6
a	0,15	0,2	3,2	0,2	0,15	0,1
b	0,0001	0,001	2,1	0,001	0,02	0,01
c	1	2,1	1,8	3,1	5	2,7
d	0,005	0,01	1	0,01	0,001	0,002
x_0	200	500	5	1000	10000	1000
y_0	50	150	3	500	200	50

Задание 7. Развитие популяций хищников и их жертв описывается моделью Холлинга-Тэннера:

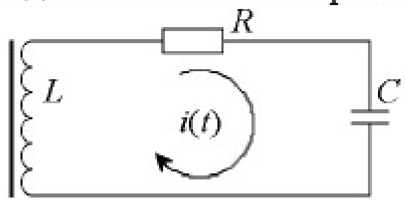
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\left(1 - \dfrac{x}{k1}\right)x - \dfrac{b}{k2 + x}xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = \left(c - d\dfrac{y}{x}\right)y, \end{cases}$$

где x и y – относительная численность жертв и хищников соответственно, t – время, ax – скорость размножения жертв, $ax/k1$ – учитывает конкуренцию жертв из-за пищи, $bxy/(k2+x)$ – скорость истребления жертв хищниками с учетом насыщения последних, cy – скорость размножения хищников, cdy^2/x – учитывает вымирание хищников при недостатке пищи x.

Используя заданные в таблице параметры и начальные условия x_0, y_0 получите участок решения, описывающий колебания $x(t)$ и $y(t)$.

Параметр	Вариант					
	7-1	7-2	7-3	7-4	7-5	7-6
x_0	20	35	7	32	15	50
y_0	5	7	3	17	2	5
a	1,5	1,7	2,7	1,1	2,4	1,6
b	1,5	4,2	3,1	2,9	4,1	5,6
c	0,1	0,6	0,2	0,09	0,08	0,2
d	0,1	0,13	0,05	0,15	0,08	0,1
$k1$	8	9,3	7,6	12	5,9	13,5
$k2$	1	2,1	2,5	1,5	2,1	1,8

Задание 8. Свободные колебания тока в последовательном электрическом колебательном контуре описываются дифференциальным уравнением



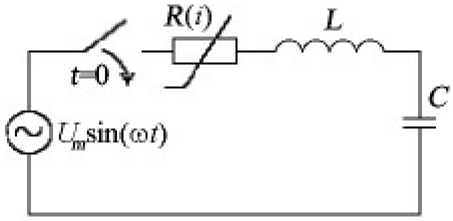
$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = 0\ ,$$

где i – ток, L – индуктивность катушки, R – сопротивление потерь контура, C – емкость конденсатора. Предполагается, индуктивность катушки зависти от протекающего через нее тока: $L = L_0\,(1 - k\,i^2)$, где k – коэффициент.

Рассчитайте и постройте график зависимости $i(t)$, охватывающий не менее пяти периодов колебаний, для начальных условий $di/dt = 0$ и $i = 10$ мА при $t = 0$. Остальные параметры указаны в таблице.

Параметр	Вариант					
	8-1	8-2	8-3	8-4	8-5	8-6
R, Ом	1	0,5	1	2	1,5	2
C, мкФ	0,001	0,01	0,1	0,047	0,0068	0,068
L_0, мкГн	1	5	10	50	50	10
k, 1/А^2	$5\cdot10^3$	$9\cdot10^3$	10^3	$5\cdot10^3$	$4\cdot10^2$	10^3

Задание 9. Вынужденные колебания тока в электрическом колебательном контуре (см. рисунок) описываются дифференциальным уравнением



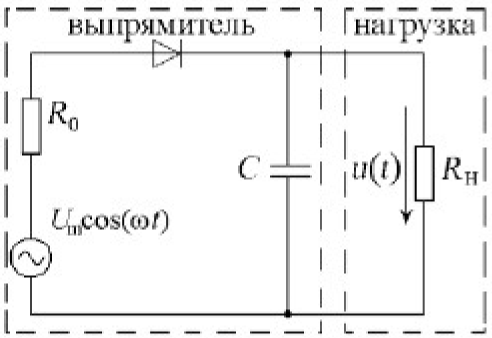
$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=U_m\omega\cos(\omega t),$$

где i – ток, L – индуктивность катушки, R – сопротивление потерь, C – емкость конденсатора, U_m – амплитуда напряжения генератора, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота. Сопротивление нелинейного резистора зависит от протекающего через него тока: $R = R_0(1 + k i^2)$, где k – коэффициент.

Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u(t) = U_m\sin(\omega t)$ и $i(t)$, охватывающие несколько периодов колебаний, для $U_m = 1$ В и начальных условий $di/dt = 0$ и $i = 0$ при $t = 0$. Остальные данные приведены в таблице.

Параметр	Вариант					
	9-1	9-2	9-3	9-4	9-5	9-6
R_0, Ом	2	3	5	3	7,5	1
L, мкГн	1	5	10	50	2	10
C, мкФ	0,001	0,01	0,1	0,047	0,0047	0,068
f, Гц	10^6	$5\cdot10^6$	10^5	$2\cdot10^5$	$2\cdot10^6$	$6\cdot10^4$
k, 1/А^2	$8\cdot10^{10}$	$2\cdot10^{14}$	10^{14}	$5\cdot10^{10}$	$4\cdot10^{15}$	$7\cdot10^{12}$

Задание 10. На выходе однополупериодного диодного выпрямителя для ослабления пульсаций напряжения параллельно нагрузке включен конденсатор. Зависимость напряжения u на выходе выпрямителя от времени t описывается дифференциальным уравнением



$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{C}\left(\frac{U_m\cos(\omega t)-u}{R_0+R_Д}-\frac{u}{R_Н}\right),$$

где C – емкость конденсатора, $R_н$ – сопротивление нагрузки, R_0 – выходное сопротивление источника переменного напряжения (трансформатора), $R_Д$ – сопротивление диода, U_m – амплитуда переменного напряжения, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота.

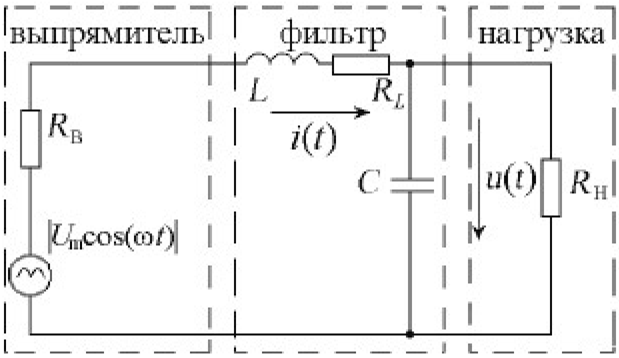
Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u_0(t) = U_m\cos(\omega t)$ и $u(t)$ при $U_m = 12$ В, $f = 50$ Гц для приведенных в таблице параметров. Начальное условие $u(t{=}0) = 0$. В расчете используйте аппроксимацию

$$R_0+R_Д=\begin{cases}10^5,\ \text{если}\ u>U_m\cos(\omega t),\\ 5,\ \text{если}\ u\le U_m\cos(\omega t).\end{cases}$$

Параметр	Вариант					
	10-1	10-2	10-3	10-4	10-5	10-6
$R_Н$, Ом	200	310	170	100	75	180
C, мкФ	2000	500	200	470	5000	680

Задание 11. Напряжение с выхода двухполупериодного диодного выпрямителя подается на нагрузку через LC-фильтр, ослабляющий нежелательные пульсации. Зависимости напряжения u на выходе фильтра и общий ток i в цепи от времени t описываются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{C}\left(i - \dfrac{u}{R_{\text{Н}}}\right), \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{L}\left[\left|U_{\text{m}}\cos(\omega t)\right| - iR_0 - u\right], \end{cases}$$



где L и C – индуктивность дросселя и емкость конденсатора фильтра, $R_{\text{Н}}$ – сопротивление нагрузки, $R_0 = R_{\text{В}} + R_L$, $R_{\text{В}}$ – выходное сопротивление выпрямителя, R_L – сопротивление обмотки дросселя, U_{m} – амплитуда пульсирующего напряжения на выходе выпрямителя, $\omega = 2\pi f$ – угловая частота.

Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u_{\text{В}}(t) = |U_{\text{m}}\cos(\omega t)|$, $u(t)$ и $i(t)$. Исходные данные: $U_{\text{m}} = 12$ В и $f = 50$ Гц. Начальные условия $u(t=0)=0$, $i(t=0)=0$. Параметры R_0, $R_{\text{Н}}$, L и C приведены в таблице.

Параметр	Вариант					
	11-1	11-2	11-3	11-4	11-5	11-6
R_0, Ом	20	75	35	120	90	20
$R_{\text{Н}}$, Ом	500	1000	750	1000	2000	1000
L, Гн	0,5	0,7	0,1	1	1,2	0,05
C, мкФ	100	40	200	50	100	1000

Задача 12. Уравнение Ван-дер-Поля, описывающее колебания в нелинейной системе (например, автогенераторе), имеет следующий вид:

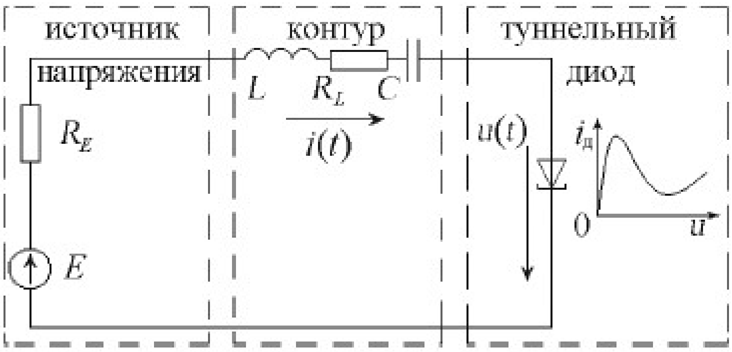
$$y'' + \left(y^2 - b\right)y' + y = 0,$$

где y, y' и y'' – функция, её первая и вторая производные по времени t. Постоянная b определяет потери в системе. Нелинейные свойства системы, например рабочие характеристики активного элемента генератора, учитываются слагаемым y^2.

Задавшись указанными в таблице начальными условиями и параметром b, решите уравнение и постройте графики зависимостей $y(t)$ и $y'(t)$, охватывающие несколько периодов колебаний.

Параметр	Вариант					
	12-1	12-2	12-3	12-4	12-5	12-6
$y(0)$	1	0	1	2	2	-3
$y'(0)$	1	1	-2	1	3	20
b	7	$3y$	y	y'	$1{,}5\,y'$	0

Задание 13. Генератор, выполненный на туннельном диоде, содержит последовательный электрический LC-контур и источник постоянного напряжения E. Колебания напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ в генераторе описываются системой дифференциальных уравнений



$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{C}\left[i - i_д(u)\right], \\ \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{L}\left[E - iR_0 - u\right], \end{cases}$$

где t – время, L и C – индуктивность катушки и емкость конденсатора контура, $R_0 = R_E + R_L$, R_E – внутреннее сопротивление источника питания, R_L – сопротивление обмотки катушки индуктивности.

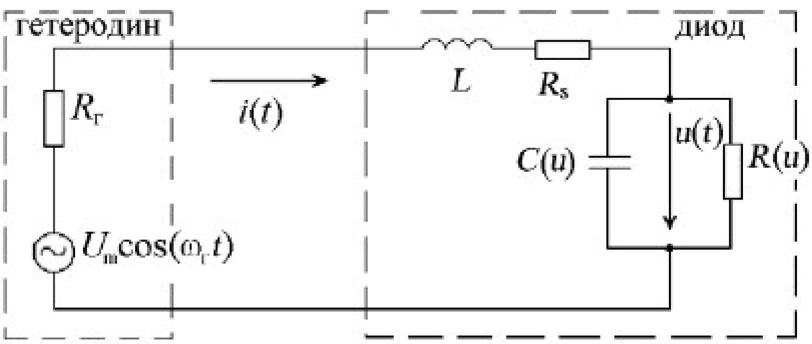
N-образная вольт-амперная характеристика туннельного диода $i_Д(u)$ описывается формулой

$$i_Д(u) = \left(0{,}6u - 14u^3 + 20u^4\right)\exp(-10u) + 0{,}02\left[\exp(u) - 1\right].$$

Рассчитайте и постройте графики зависимостей $u(t)$ и $i(t)$. Начальные условия $u(t=0) = 0$, $i(t=0) = 0$. Параметры E, R_0, L и C даны в таблице.

Параметр	Вариант					
	13-1	13-2	13-3	13-4	13-5	13-6
E, В	0,27	0,3	0,22	0,18	0,36	0,19
R_0, Ом	7	4,2	3,5	4,8	11,3	5,2
L, нГн	20	$7\cdot10^3$	$1{,}5\cdot10^4$	10	17	200
C, пФ	12	2200	130	12	27	120

Задание 14. При расчете преобразователя частоты на диоде с барьером Шоттки используется эквивалентная схема, показанная на рисунке.



Элементы $U_m\cos(\omega_Г t)$ и $R_г$ на рисунке относятся к гетеродину, напряжение с которого поступает на смесительный диод. Диод представлен эквивалентной схемой, содержащей следующие элементы: L – индуктивность выводов, R_S – омическое сопротивление потерь, $C(u)$ и $R(u)$ – емкость и сопротивление барьерной области диода, зависящие от обратного смещения на его переходе. Зависимости напряжения u на барьере диода и тока i в общей цепи от времени t могут быть найдены из нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{C(u)}\left[i - \dfrac{u}{R(u)} \right] , \\ \dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{L}\left[U_{\text{m}} \cos(\omega_{\text{г}} t) - u - i\left(R_{\text{s}} + R_{\text{г}}\right) \right] . \end{cases}$$

Решите систему уравнений при следующих данных: $R_{\text{г}}$ = 50 Ом, L = 1,2 нГн, R_{s} = 6 Ом. Начальные условия: $u(t)$ = 0, $i(t)$ = 0 при t = 0. Амплитуда U_{m} и частота $f_{\text{г}}$ колебаний гетеродина указаны в таблице.

Параметр	Вариант					
	14-1	14-2	14-3	14-4	14-5	14-6
L, нГн	1,2	1,5	1,7	1,4	2,2	1,1
R_S, Ом	6	5,5	4,7	5,8	4,8	7
U_{m}, В	0,65	0,55	0,7	0,8	0,9	0,97
$f_{\text{г}}$, ГГц	9	14	11	8,2	12	16

В расчете применяйте следующие аппроксимации зависимостей $R(u)$ и $C(u)$ для диода с барьером Шоттки. Для вольт-амперной характеристики используйте формулу

$$i_{\text{д}}(u) = \frac{u}{R(u)} = i_0\left[\exp(bu) - 1\right],$$

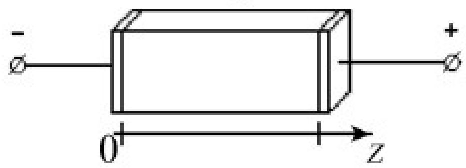
где $i_0 = 5 \cdot 10^{-13}$ А, b = 28 1/В. Зависимость $C(u)$ описывается формулой

$$C(u) = \frac{C_0}{\sqrt{1 - u/\varphi}},$$

где C_0 = 0,14 пФ, φ = 0,85 В – высота потенциального барьера.

Рассчитайте несколько периодов колебаний и постройте графики зависимостей $u_{\Gamma}(t) = U_{\text{m}}\cos(\omega_{\Gamma} t)$, $u(t)$ и $i(t)$.

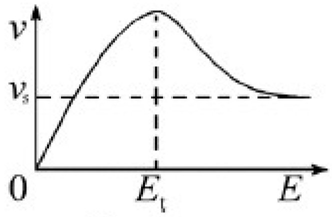
Задание 15. Распределение напряженности электрического поля в полупроводнике описывается уравнением Пуассона. Для одномерного случая, когда изменение поля рассматривается только по координате z (вдоль полупроводникового образца), это уравнение можно привести к следующему виду:



$$\frac{dE}{dz} = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{j}{v} - qN_0 \right) ,$$

где ε_1 – диэлектрическая (решеточная) проницаемость полупроводника, j – плотность тока вдоль оси $0z$, v – дрейфовая скорость электронов вдоль оси $0z$, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд, N_0 – уровень легирования полупроводника.

В полупроводнике типа арсенида галлия зависимость дрейфовой скорости v от напряженности электрического поля E существенно нелинейная. Характеристика $v(E)$ описывается аппроксимацией:



$$v(E)=\frac{\mu_0 E + v_S\left(E/E_t\right)^4}{1+\left(E/E_t\right)^4},$$

где $\mu_0 = 0{,}6$ м^2/В·с, $v_S = 10^5$ м/с, $E_t = 3{,}5\cdot10^5$ В/м.

Решите уравнение при следующих данных: диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_1 = 12{,}5\varepsilon_0 = 12{,}5 \times 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, поперечное сечение образца $S = 2{,}5$ мкм × 300 мкм. Ток $i = j\,S$, протекающий через образец, и начальное значение $E(z)$ при $z = 0$ указаны в таблице.

Рассчитайте зависимость $E(z)$ на участке структуры длиной не менее 50 мкм и найдите соответствующее распределение концентрации свободных носителей заряда $n(z)=j/qv\left[E(z)\right]$.

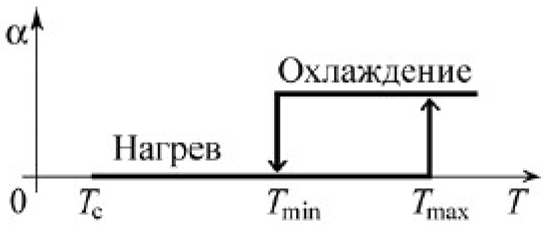
Параметр	Вариант					
	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	15-6
N_0, м$^{-3}$	$5\cdot10^{20}$	$4{,}5\cdot10^{20}$	$5{,}3\cdot10^{20}$	$4\cdot10^{20}$	$5{,}7\cdot10^{20}$	$4{,}1\cdot10^{20}$
i, мА	5,5	8,3	6,7	7,45	10,6	7,62
$E(0)$, В/м	$0{,}1\cdot10^5$	$3{,}7\cdot10^5$	$2{,}5\cdot10^5$	$3\cdot10^5$	$3{,}5\cdot10^5$	$3{,}6\cdot10^5$

Задание 16. Для охлаждения микропроцессора используется металлический теплоотводящий радиатор. Процесс передачи тепла от радиатора в окружающий воздух описывается дифференциальным уравнением

$$cm\frac{dT}{dt} = P - \alpha S\left(T - T_C\right),$$

где m и c – масса и удельная теплоемкость материала радиатора, T – температура радиатора, t – время, P – выделяемая микропроцессором мощность, $\alpha S\left(T-T_C\right)$ – отводимое тепло, α – коэффициент теплоотдачи конвекцией, S – площадь поверхности радиатора, T_C – температура окружающей среды.

Радиатор снабжен вентилятором, который автоматически включается если температура процессора и радиатора превышает допустимый предел, то есть $T > T_{max}$, и останавливается, если $T < T_{min}$. Включение обдува эквивалентно изменению коэффициента теплоотдачи α по следующему закону:



$$\alpha=\begin{cases}\alpha 0,\ \text{если}\ T \le T_{min}\ \text{или}\ T < T_{max}\ \text{при}\ dT/dt > 0,\\ \alpha 1,\ \text{если}\ T \ge T_{max}\ \text{или}\ T > T_{min}\ \text{при}\ dT/dt < 0,\end{cases}$$

где $\alpha 0$ – коэффициент теплоотдачи при выключенном вентиляторе, $\alpha 1$ – коэффициент теплоотдачи при обдуве.

Рассчитайте участок зависимости $T(t)$, на котором система охлаждения выходит на рабочий режим $T_{min} < T(t) < T_{max}$. Параметры радиатора: c = 950 Дж/кг·К, m = 0,05 кг, S = 0,04 м^2. Начальную температуру процессора примите равной $T(t\!=\!0) = T_с$ = 293 К. Прочие данные указаны в таблице.

Параметр	Вариант					
	16-1	16-2	16-3	16-4	16-5	16-6
P, Вт	42	55	27	65	43	22
$\alpha 0$, Вт/м^2·К	17	15	12	25	21	9
$\alpha 1$, Вт/м^2·К	80	95	35	82	160	75
T_{min}, К	313	308	313	313	308	303
T_{max}, К	353	343	343	353	343	343

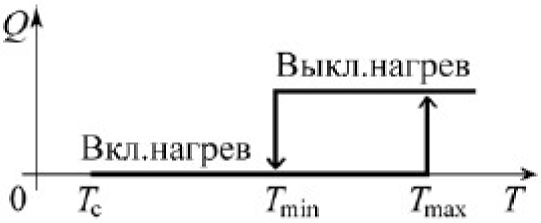
Задание 17. Работа системы автоматического регулирования температуры нагревателя описывается дифференциальным уравнением

$$cm\frac{dT}{dt} = Q_{вх} - \alpha S\left(T - T_с\right) ,$$

где c и m – удельная теплоемкость и масса нагревателя, T – температура нагревателя, t – время, $Q_{вх}$ – вырабатываемое нагревателем тепло, α – приведенный коэффициент теплоотдачи, S – площадь поверхности нагревателя, $T_с$ – температура окружающей среды.

Для поддержания температуры T заданных пределах $T_{min} < T < T_{max}$ нагреватель мощностью P переключается по следующему закону:

$$Q_{вх} = \begin{cases} P, \text{ если } T \le T_{min} \text{ или } T < T_{max} \text{ при } dT/dt > 0, \\ 0, \text{ если } T \ge T_{max} \text{ или } T > T_{min} \text{ при } dT/dt < 0, \end{cases}$$



где T_{min} и T_{max} – минимальное и максимальное значения температуры.

Рассчитайте участок зависимости $T(t)$, на котором нагреватель выходит на рабочий режим при начальной его температуре $T(t\!=\!0) = T_с$ и T_{min} = 290 К, T_{max} = 295 К. Мощность P и другие параметры даны в таблице.

Параметр	Вариант					
	17-1	17-2	17-3	17-4	17-5	17-6
P, Вт	2000	250	350	1000	750	500
cm, Дж/К	240	140	100	270	700	470
αS, Вт/К	15	5	8	10	5	7
$T_с$, К	288	263	275	233	278	293
T_{min}, К	290	290	300	290	313	303
T_{max}, К	295	305	315	325	328	333

Задание 18. Для защиты электрических цепей от перегрузки используются плавкие предохранители. Процесс нагрева плавкого элемента до его разрушения описывается уравнением теплового баланса

$$(c_1 m_1 + c_2 m_2)\frac{dT}{dt} + \alpha S(T - T_C) = i^2 R_0\left[1 + \beta(T - T_0)\right] ,$$

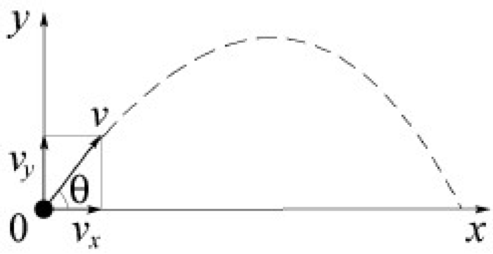
где c_1 и m_1 – удельная теплоемкость и масса плавкого элемента, c_2 и m_2 – удельная теплоемкость и масса среды, в которой находится элемент, T – температура элемента, t – время, α – коэффициент теплоотдачи, S – поверхность охлаждения, T_C – температура окружающей среды, i – ток, протекающий через элемент, R_0 – электрическое сопротивление элемента при $T_0 = 293$ К, β – температурный коэффициент сопротивления.

Эффективность защиты зависит от того, насколько быстро при перегрузке плавкий элемент предохранителя разорвет электрическую цепь.

Рассчитайте зависимость $T(t)$ при начальном условии $T(t{=}0) = T_C = 293$ К. Слагаемое c_2m_2 в уравнении полагайте равным нулю. Определите время, за которое перегорает предохранитель, если температура плавления его рабочего элемента равна 1373 К.

Параметр	Вариант					
	18-1	18-2	18-3	18-4	18-5	18-6
c_1m_1, Дж/К	$1{,}7\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-4}$	$3{,}3\cdot10^{-4}$	$4{,}4\cdot10^{-5}$	$8\cdot10^{-4}$	$1{,}4\cdot10^{-3}$
αS, Вт/К	$3\cdot10^{-5}$	$3{,}5\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-5}$	$1{,}2\cdot10^{-5}$	$6\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-5}$
R_0, Ом	0,04	0,014	0,017	0,14	0,006	0,004
i, А	1	2	1,5	0,5	3	5
β, 1/К	0,05	0,06	0,05	0,04	0,07	0,08

Задание 19. Движение снаряда, выпущенного под углом θ к горизонту (см. рисунок), описывается системой дифференциальных уравнений, являющихся уравнениями баланса сил, действующих вдоль координат x и y:



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kv_x , \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -kv_y - gm , \end{cases}$$

где $v_x = v\cos\theta$ и $v_y = v\cos\theta$ – горизонтальная и вертикальная составляющая скорости снаряда $v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}}$, t – время, k – коэффициент трения, учитывающий сопротивление воздуха, m – масса снаряда, $g \approx 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения.

С учетом $v_x = dx/dt$ и $v_y = dy/dt$ исходная система уравнений приводится к следующему виду:

$$\begin{cases} dx/dt = v_x \,, \\ dv_x/dt = -k/m \cdot v_x \,, \\ dy/dt = v_y \,, \\ dv_y/dt = -k/m \cdot v_y - g. \end{cases}$$

Рассчитайте зависимости $x(t)$ и $y(t)$. Постройте траекторию снаряда $y(x)$ из точки $x(t{=}0) = 0$ и $y(t{=}0) = 0$ при заданных k, m, θ и начальной скорости $v(t{=}0)$.

Параметр	Вариант					
	19-1	19-2	19-3	19-4	19-5	19-6
k, кг/с	1,4	0,05	2,9	1	2	1,8
m, кг	15	0,3	110	42	85	52
$v(t{=}0)$, м/с	300	10	350	140	300	330
θ, град	15	45	25	33	20	45

Задание 20. Процесс производства, хранения и сбыта товара описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = O - k_1 T(S - V) \,, \\ \dfrac{dV}{dt} = k_1 T(S - V) - k_2 V \,, \\ \dfrac{dD}{dt} = Ck_1 T(S - V) - \dfrac{O}{C} - k_3 T \,, \end{cases}$$

где T – количество товара на рынке, V – количество не потребленного товара у покупателей, D – доход в единицу времени, O – объем выпуска товара, k_1 – коэффициент скорости продаж, S – потенциальный спрос (объем товара, удовлетворяющий потребность при отсутствии ажиотажного спроса), C – условная цена товара ($C > 1$), k_2 – коэффициент потребления товара, k_3 – плата за хранение единицы товара. Переменные T, O, V, D и параметры S и C измеряются в условных денежных единицах.

Рассчитайте зависимости $T(t)$, $V(t)$ и $D(t)$ при начальном условии $D(t{=}0) = 0$. Остальные данные приведены в таблице.

Параметр	Вариант					
	20-1	20-2	20-3	20-4	20-5	20-6
$T(t{=}0)$	3	10	15	4	12	7
$V(t{=}0)$	3	20	5	11	12	5
O	11,7	7	21	15	18	32,6
S	15,5	3	18	15	21	18
C	1,2	1,3	1,5	1,1	1,2	1,2
k_1	0,02	0,03	0,2	0,5	0,05	0,02
k_2	3	2	1,1	2	1,3	2,6
k_3	0,01	0,001	0,1	0,05	0,12	0,04