I. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

З а д а н и е. Груз массой m прикреплен к пружине жесткостью c (рис.I.I). Начальная деформация пружины λ_0, начальная

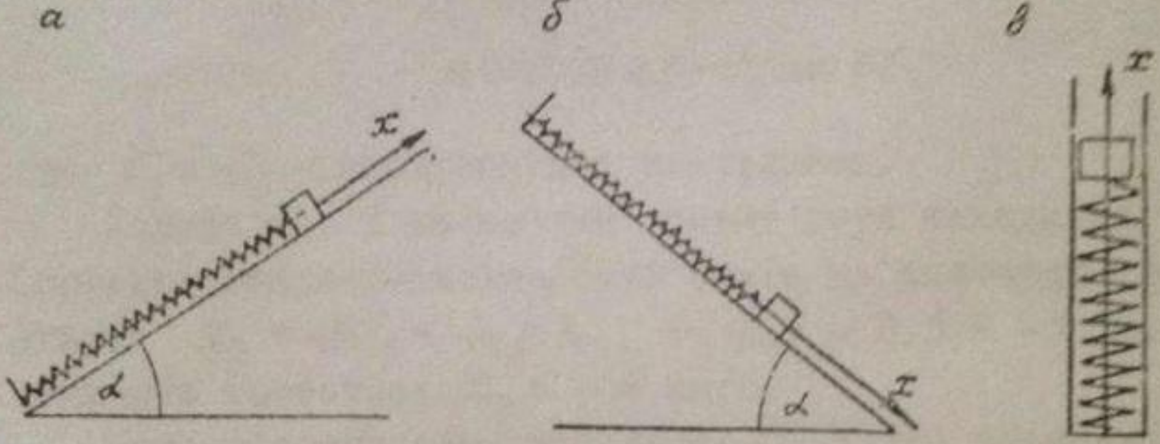

Рис.1.1

скорость груза v_0. Найти уравнение движения груза; амплитуду, частоту и период колебаний; наибольшее значение модуля силы упругости. Массой пружины, а также сопротивлениями движению груза и пружины пренебречь. Начало координат взять в положении статического равновесия груза на пружине. Принять $g = 10$ м/с^2. Задание выполнять на формате II.

П р и м е р I.I. Пружина жесткостью 20 Н/см расположена вдоль плоскости, наклонечной к горизонту под углом 30°. В некоторый момент пружину сжимают на 0,5 см, прикрепляют груз массы IO кг и сообщают ему скорость 56 см/с, направленную вверх параллельно наклонной плоскости.

Р е ш е н и е. Найдем сначала положение O статического равновесия груза (рис.I.2,а). Пусть A – точка, соответствующая концу недеформированной пружины. Тогда $AO = \lambda_{ст}$ – статическая деформация, которой соответствует сила упругости $F_{ст} = c\lambda_{ст}$.

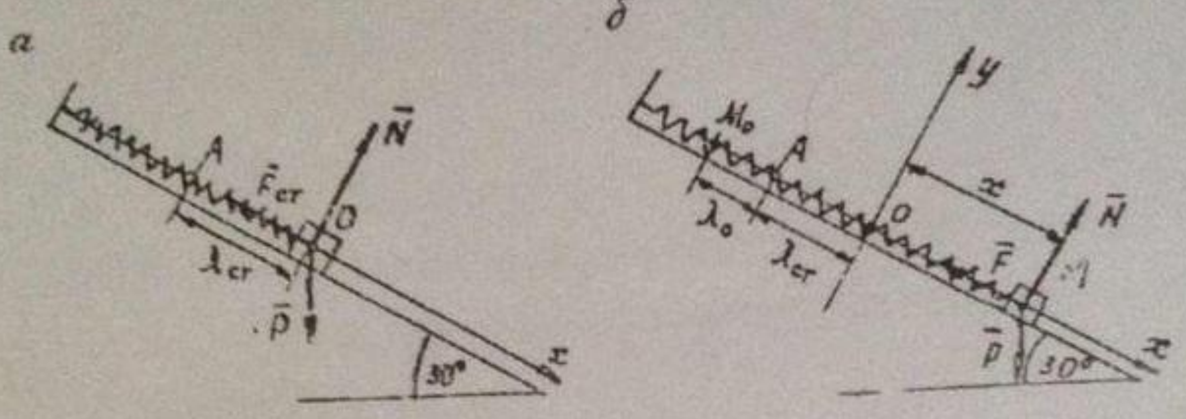

Рис.1.2

Рассмотрим равновесие груза. На него действуют три силы $\bar{P}$, $\bar{N}$ и $\bar{F}_{ст}$. Выберем ось x параллельно наклонной плоскости и напишем уравнение равновесия в проекциях на эту ось:

$$\sum X_i = P\sin 30^\circ - F_{ст} = 0 \qquad \text{или} \qquad P\sin 30^\circ - c\lambda_{ст} = 0,$$

откуда $\lambda_{ст} = P\sin 30^\circ/c = mg\sin 30^\circ/c$.

Для вычислений в единицах СИ нужно коэффициент жесткости перевести в Ньютоны на метры. Тогда $c = 2000$ Н/м. Примем $g = 10$ м/с^2. Таким образом $\lambda_{ст} = 10\cdot 10\cdot 0{,}5/2000 = 0{,}025$ м = 2,5 см.

Начало координат поместим в положении O статического равновесия груза (рис.I.2,б). Груз изобразим в промежуточном положении M. На груз при его движении действуют силы $\bar{P}$, $\bar{N}$ и $\bar{F}$, причем на основании закона Гука $F = c\lambda = c(\lambda_{ст} + x)$, так как полная деформация λ пружины определяется отрезком $AM = \lambda_{ст} + x$. В то же время $c\lambda_{ст} = P\sin 30^\circ$, поэтому $F = cx + P\sin 30^\circ$.

Составляем дифференциальное уравнение движения груза $m\ddot{x} = X$. Очевидно, $X = P\sin 30^\circ - F = P\sin 30^\circ - cx - P\sin 30^\circ = -cx$.

Дифференциальное уравнение примет вид $m\ddot{x} = -cx$. Обозначим $k^2 = c/m$, где k – частота,

$$k^2 = \sqrt{2000/10} \approx 14 \ с^{-1}.$$

Тогда $\ddot{x} + k^2 x = 0$.

Таким образом мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$ имеет мнимые корни $r = \pm ki$, которым соответствует общее решение вида

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (I.I)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Найдем их. В начальный момент груз находился в положении M_0 (пружина предварительно была сжата на величину $\lambda_0 = 0,5$ см), значит $x_0 = -OM_0 = -\lambda_0 - \lambda_{ст} = -0,5 - 2,5 = -3$ см. Начальная скорость известна: $\dot{x}_0 = -56$ см/с.

Продифференцируем уравнение (I.I) по времени:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt - C_2 k \cos kt. \qquad (I.2)$$

Подставив в уравнения (I.I) и (I.2) $t = 0$ и начальные данные, получим $x_0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$; $\dot{x}_0 = -C_1 k \cdot 0 + C_2 k \cdot 1$. Решение этой системы: $C_1 = x_0 = -3$ см; $C_2 = \dot{x}_0 / k = -56/I4 = -4$ см.

Уравнение движения груза можно записать так: $x = -(3\cos I4t + 4\sin I4t)$ см.

Амплитуда колебания $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ см $= 0,05$ м.

Период $\tau = 2\pi/k = 6,28/I4 \simeq 0,45$ с.

Значение силы упругости максимально при наибольшей деформации пружины. Очевидно, $\lambda_{max} = \lambda_{ст} + a$. Поэтому $F_{max} = c(\lambda_{ст} + a) = 2000(0,025 + 0,05) = I50$ Н.

Таблица 1.1

Номер задачи	Номер рисунка	m, кг	c, Н/см	v_0, см/с	λ_0, см	α
1.1	1.1, а	$7\sqrt{2}$	10	-	-	45°
1.2	1.1, а	$16\sqrt{3}$	10	-	-	60
1.3	1.1, б	$28\sqrt{2}$	10	-	-	45
1.4	1.1, б	20	10	-	-	30
1.5	1.1, в	20	40	-	-	-
1.6	1.1, а	$14\sqrt{2}$	20	240	-	45
1.7	1.1, а	$16\sqrt{3}$	40	96	-	60
1.8	1.1, б	$7\sqrt{2}$	10	240	-	45
1.9	1.1, б	5	5	120	-	30
1.10	1.1, в	16	8	105	-	-
1.11	1.1, а	$7\sqrt{2}$	10	240	-	45
1.12	1.1, а	$36\sqrt{3}$	90	96	-	60
1.13	1.1, б	$14\sqrt{2}$	20	240	-	45
1.14	1.1, б	10	10	120	-	30
1.15	1.1, в	32	16	105	-	-
1.16	1.1, а	$14\sqrt{2}$	20	-	5	45
1.17	1.1, а	$36\sqrt{3}$	10	-	48	60
1.18	1.1, б	$28\sqrt{2}$	40	-	3	45
1.19	1.1, б	10	20	-	3,5	30
1.20	1.1, в	10	10	-	5	-
1.21	1.1, а	$7\sqrt{2}$	10	-	3	45
1.22	1.1, а	$4\sqrt{3}$	10	-	4	60
1.23	1.1, б	$28\sqrt{2}$	10	-	18	45
1.24	1.1, б	10	20	-	7,5	30
1.25	1.1, в	20	20	-	10	-
1.26	1.1, б	20	10	42	$\lambda_{ст}$	30
1.27	1.1, в	20	20	40	$\lambda_{ст}$	-
1.28	1.1, б	10	5	28	$\lambda_{ст}$	30
1.29	1.1, в	10	10	30	$\lambda_{ст}$	-
1.30	1.1, в	20	40	42	1	-

$= 2000(0{,}025 + 0{,}05) = 150$ ...

З а д а ч и I.1–I.5. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз и отпускают без толчка.

З а д а ч и I.6–I.10. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вверх.

З а д а ч и I.11–I.15. К свободному концу недеформированной пружины прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

З а д а ч и I.16–I.20. К сжатой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

З а д а ч и I.21–I.25. К растянутой пружине прикрепляют груз и отпускают без толчка.

З а д а ч и I.26–I.27. Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вниз.

З а д а ч и I.28–I.29. Грузу, находящемуся в положении статического равновесия, сообщают скорость, направленную вверх.

Задача I.30. К сжатой пружине прикрепляют груз, которому сообщают скорость, направленную вниз.

Заданные значения величин приведены в табл. I.1.